Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СЕРДИКА – Българско
математическо списание
19 (1993) 243-257

ОПОРНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ – I

В. В Альсевич, О. И. Костюкова, Ю. Х. Пешева

Многие качественные проблемы теории оптимальных процессов в динамических системах с последействием к настоящему времени решены достаточно полно. Однако в большинстве опубликованных работ рассматривались только конечномерные краевые условия (как и для обыкновенных систем). Для систем, с последействием более естествены функциональные краевые условия, так как состояния таких систем представляются элементами бесконечномерного функционального пространства. Это было отмечено в теории устойчивости еще до появления теории оптимального управления (Н. Н. Красовский, 1959). Учет функциональных краевых условий при оптимизации систем встречает серьезные трудности [3]. В данной работе исследуется задача оптимального управления для системы с запаздыванием и функциональными ограничениями на правом конце траектории. В основе метода исследования конструктивный подход, разработанный Р.Габасовым и Ф.Кирилловой и их учениками (1980–1988) для задач оптимизации обыкновенных систем. В указанном подходе основную роль играет понятие опоры, с помощью которотой эффективно учитываются ограничения задач оптимизации. Результаты, полученные при помощи этих методов, позволяют строить эффективные численные алгоритмы построения оптимального управления. Функциональные ограничения в задаче оптимального управления для системы с последействием вызывают необходимость принципиального обобщения понятий, известных для обыкновенных систем. Поэтому результаты гораздо сложнее, чем для задачи с фазовыми ограничениями в обыкновенной системе (Р. Габасов, Ф. Кириллова, 1984). Доказанный критерий оптимальности (опорный принцип максимума) видимо не имеет аналогов в теории оптимального управления. Сложность результатов и преобразований соответствует сложности задачи.

1. Критерий управляемости

Постановка задачи. На траекториях системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t \in [0, t^* + h] = T, \\ &x(\tau) = x_0(\tau), \quad \tau \in [-h, 0[\,, x(0) = x^0, \end{aligned} \tag{1}$$

решаем задачу максимизации линейного терминального критерия

$$J(u) = c^T x(t^* + h) \longrightarrow \max, \tag{2}$$

где $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t)$ – скаляр, c, b – n-векторы; A_0, A_1 – $n \times n$-матрицы; $h > 0$.

В качестве управляющих воздействий рассмотрим кусочно-непрерывные функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничению

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T. \tag{3}$$

Среди указанных управлений будем выбирать только те, для которых соответствующие траектории $x(t)$ системы (1) удовлетворяют ограничению

$$d^T x(t) = y, \quad t \in T^* = [t^*, t^* + h], \tag{4}$$

где d, y – заданные n-вектор и число. Другими словами, управления $u(t)$, $t \in T$ будем выбирать так, чтобы контролировать выход $y(t) = d^T x(t)$ системы на промежутке времени T^*. Управление, обладающее такими свойствами, будем называть допустимыми. Цель работы – получить критерий оптимальности допустимого управления.

Обсуждение задачи. Рассматриваемая задача относится к задачам оптимизации динамических систем с последействием и фазовыми ограничениями. Первые результаты по задаче (1)–(4) докладывались авторами в [2]. В ограничении (4) y может быть функцией времени $y = y(t)$, $t \in T^*$.

Очевидно, что для выполнения тождества (4), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &d^T x(t^*) = y(t^*), \\ &d^T \dot{x}(t) = \dot{y}(t), \quad t \in \,]\, t^*, t^* + h]. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя в (5) $\dot{x}$ из (1), получаем:

$$d^T A_0 x(t) + d^T A_1 x(t-h) + d^T b u(t) = \dot{y}(t), \quad t \in \,]\, t^*, t^* + h], \tag{6}$$

откуда при $d^T b \neq 0$:

$$u(t) = \frac{1}{d^T b}(\dot{y}(t) - d^T A_0 x(t) - d^T A_1 x(t-h)), \quad t \in \,]\, t^*, t^* + h]. \tag{7}$$

Так как управление (7) должно удовлетворять ограничению (3), то возможно будут существовать отрезки $[\tau_i, \tau^i]$ из $]\,t^*, t^* + h]$, на которых управление (7) может выходить на границы или же за пределы границ ($u(t) \geq f^*$, или $u(t) \leq f_*$). Чтобы это не произошло, системы с запаздыванием (в отличии от обыкновенных систем) иногда позволяют заранее выбирать управление $u(t)$, $t \leq t^*$, которое будет удерживать управление (7) в заданных границах. В самом деле чтобы удерживать управление (7) в пределах границ на участке $[\tau_i, \tau^i]$ заменим на этом участке тождество (6) эквивалентными соотношениями

$$\begin{aligned} &d^T A_0 x(\tau_i) + d^T A_1 x(\tau_i - h) + d^T b u(\tau_i + 0) = \dot{y}(\tau_i), \\ &d^T A_0 \dot{x}(t) + d^T A_1 \dot{x}(t - h) + d^T b \dot{u}(t) = \ddot{y}(t), \quad t \in \,]\,\tau_i, \tau^i], \end{aligned} \tag{8}$$

и подставляя вместо $\dot{x}(t)$, $\dot{x}(t-h)$ их выражения из (1), получаем

$$\begin{aligned} &d^T A_0^2 x(t) + d^T(A_0 A_1 + A_1 A_0) x(t-h) + d^T A_1^2 x(t - 2h) + d^T A_0 b u(t) \\ &\qquad + d^T A_1 b u(t-h) + d^T b \dot{u}(t) = \ddot{y}(t), \quad t \in]\tau_i, \tau^i], \end{aligned} \tag{9}$$

откуда при условии $d^T A_1 b \neq 0$ находим $u(t-h)$, $\;t \in]\tau_i, \tau^i]$ (или то же самое $u(t)$, $\;t \in]\tau_i - h, \tau^i - h]$):

$$\begin{aligned} u(t) = -\frac{1}{d^T A_1 b}\big[&d^T A_0^2 x(t+h) + d^T(A_0 A_1 + A_1 A_0) x(t) \\ &+ d^T A_1^2 x(t-h) + d^T A_0 b u(t+h) + d^T b \dot{u}(t+h) - \ddot{y}(t+h)\big], \\ &t \in \,]\,\tau_i - h, \tau^i - h]. \end{aligned} \tag{10}$$

Теперь можем сказать, что если выбрать любое кусочно-дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in]\tau_i, \tau^i]$, удовлетворяющее (3), а управление (10) находится в пределах границ, то при некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих равенство (8), на отрезке $]\tau_i, \tau^i]$ будет выполняться фазовое ограничение (4). Если же существует отрезок $[\tau_{ji}, \tau^{ji}] \subset [\tau_i, \tau^i]$, такой что на $]\tau_{ji} - h, \tau^{ji} - h]$ управление (10) выходит на границы или за их пределы, тогда поступая аналогично, как и выше, т.е. дифференцируя (9), выбираем управление $u(t)$ на отрезке $]\tau_{ji} - 2h, \tau^{ji} - 2h]$, обеспечивающее выполнение фазового ограничения (4) на $[\tau_{ji}, \tau^{ji}]$ и т.д.

Таким образом, разбив множество T^* на отрезки

$$[\mu_i, \mu_{i+1}], \quad \mu_i < \mu_{i+1}, \quad i = \overline{0, \rho}, \quad \mu_0 = t^*, \quad \mu_{\rho+1} = t^* + h,$$

на каждом из них можно обеспечить выполнение равенства (4), если для каждого i существует число k_i $\;(k_i \leq [\frac{t^*}{h}])$, такое что управление $u(t - k_i h)$, $\;t \in$ $]\mu_i, \mu_{i+1}]$, найденное в виде “обратной связи” по описанному выше правилу будет находиться в заданных границах. Заметим, что кроме этого, необходимо еще обеспечить выполнение некоторых соотношений типа равенства (8). На этом предварительном обсуждении основаны все дальнейшие построения.

Опора. Опору [1] введем при помощи управляемости – фундаментального свойства динамических систем с последействием. Делим множество T^* на отрезки произвольным образом точками μ_i, $i = \overline{0, \rho+1}$, $\rho \geq 0$, $\mu_i < \mu_{i+1}$, $\mu_0 = t^*$, $\mu_{\rho+1} = t^* + h$. Обозначим $T_i = [\mu_i, \mu_{i+1}]$, $i \in \{\overline{0, \rho}\} = I$. Каждому отрезку T_i ставим в соответствие число k_i, $0 \leq k_i \leq m$, $(m \leq [\frac{t^*}{h}])$, – "глубину" отрезка ($k_i \neq k_{i+1}$, иначе отрезки T_i, T_{i+1} объединяются в один отрезок). Для удобства дальнейшего изложения положим $k_{-1} = k_{\rho+1} = -1$. Рассмотрим отрезки

$$\tilde{T}_i = [\mu_i, \mu_{i+1}], \quad i \in I^{++} = \{i \in I : k_i > k_{i-1}, k_i > k_{i+1}\},$$
$$\tilde{T}_i = [\mu_i, \mu_{i+1}[, \quad i \in I^{+-} = \{i \in I : k_i > k_{i-1}, k_i < k_{i+1}\},$$
$$\tilde{T}_i =]\mu_i, \mu_{i+1}], \quad i \in I^{-+} = \{i \in I : k_i < k_{i-1}, k_i > k_{i+1}\},$$
$$\tilde{T}_i =]\mu_i, \mu_{i+1}[, \quad i \in I^{--} = \{i \in I : k_i < k_{i-1}, k_i < k_{i+1}\}$$

и множество индексов

$$I^+ = I^{++} \cup I^{+-}, \quad I^- = I^{-+} \cup I^{--}, \quad I_p = \{i \in I : k_i = p\}.$$

На отрезках $\tilde{T}_i$ выберем точки τ_{ij}, $j = \overline{1, s_i}$, $\tau_{ij} < \tau_{i,j+1}$, $j = \overline{1, s_i - 1}$. Обозначим

$$\mu_i^s = \mu_i - sh, \quad \tau_{ij}^s = \tau_{ij} - sh, \quad T_i^s = [\mu_i^s, \mu_{i+1}^s], \quad T_0 = \bigcup_{i=0}^{\rho} \bigcup_{s=0}^{k_i - 1} T_i^s.$$

На множестве T_0 зададим функции $f(t)$, $t \in T^*$, $\Delta u_*(t)$, $t \in T_i^s$, $s = \overline{0, k_i - 1}$, $i = \overline{0, \rho}$, со следующими свойствами:

1) $f(t) \in C^{k_i+1}$, $t \in T_i$, $i = \overline{0, \rho}$, т.е. функция $f(t)$, $t \in T_i$, непрерывна и имеет непрерывные производные до k_i-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную $(k_i + 1)$-го порядка;

2) $f(t) \in C^{k_i+2}$ в окрестности точек $t \in \{\tau_{ij},\ j = \overline{1, s_i}\} \backslash \{\mu_i, \mu_{i+1}\}$, $i = \overline{0, \rho}$; $f(t) \in C^{\min\{k_i+1, k_{i+1}+1\}}$ в окрестности точек $\mu_{i+1}, i = \overline{0, \rho}$.

3) $\Delta u_*(t) \in C^{k_i - s+1}$, $t \in T_i^s$, $s = \overline{0, k_i - 1}$, $i = \overline{0, \rho}$;

4) а) если $s < \min\{k_i + 1, k_{i+1} + 1\}$, то $\Delta u_*(t) \in C^{\min\{k_i - s+1, k_{i+1} - s+1\}}$ в окрестности точек μ_{i+1}^s, $i = \overline{0, \rho}$;

б) если $s < k_i$, то $\Delta u_*(t) \in C^{k_i - s+2}$ в окрестности точек $t \in \{\tau_{ij}^s, j = \overline{1, s_i}\} \backslash \{\mu_i^s, \mu_{i+1}^s\}$, $i = \overline{0, \rho}$.

В точках $\tau_{ij}^{k_i}$ задаем числа Δu_{ij}, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{0, \rho}$. В дальнейшем будем считать $\tau_{i_1}^{k_i} = \mu_i^{k_i} + 0$, если $\tau_{i_1} = \mu_i$ и $\tau_{i,s_i}^{k_i} = \mu_{i+1}^{k_i} - 0$, если $\tau_{i,s_i} = \mu_{i+1}$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему в приращениях:

$$\begin{aligned} &\Delta\dot{x}(t) = A_0\Delta x(t) + A_1\Delta x(t-h) + b\Delta u(t), \quad t\in T, \\ &\Delta x(t) = 0, \quad t\in[-h,0]. \end{aligned} \tag{11}$$

Определение 1. *Динамическая система* (11) *называется управляемой относительно множества* T_0 *и моментов* $\tau_{i\nu}^{k_i}$, $\nu=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{0,\rho}$, *если для любых функций* $f(t)$, $t\in T^*$, $\Delta u_*(t)$, $t\in T_0$ *и чисел* $\Delta u_{i\nu}$, $i=\overline{0,\rho}$, $\nu=\overline{1,s_i}$, *найдется* $\Delta u(t)$, $t\in T_H = T\setminus T_0$, *что вдоль управления*

$$\Delta\bar{u}(t) = \begin{cases} \Delta u_*(t), & t\in T_0, \\ \Delta u(t), & t\in T_H, \end{cases}$$

и соответствующей траектории $\Delta x(t)$ *системы* (11) *выполняется тождество*

$$d^T\Delta x(t) \equiv f(t), \quad t\in T^* \tag{12}$$

и равенства

$$\Delta u(\tau_{ij}^{k_i}) = \Delta u_{ij}, \quad i=\overline{0,\rho}, \quad j=\overline{1,s_i}. \tag{13}$$

Получим критерий управляемости. При сделаных выше предположениях тождество (12) можно заменить, эквивалентной системой

$$d^T\Delta x(t) \equiv f(t), \quad t\in T_i, \quad i=\overline{0,\rho},$$

или

$$\begin{aligned} &d^T\Delta x^{(p)}(\mu_i+0) = f^{(p)}(\mu_i), \quad p=\overline{0,k_i}, \\ &d^T\Delta x^{(k_i+1)}(t) = f^{(k_i+1)}(t), \quad t\in T_i, \quad i=\overline{0,\rho}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя уравнение (11), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} d^T\Delta x^{(p)}(t) = \sum_{s=0}^{p} d_s^T(p)\Delta x(t-sh) + \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{s=0}^{p-j-1} d_s^T(p-j-1)b\Delta u^{(j)}(t-sh), \\ t\in T_i,^{\dagger} \end{aligned} \tag{15}$$

где n-векторы $d_s(p)$ вычислены по рекуррентным формулам:

$$d_0(0) = d, \quad d_0^T(1) = d^TA_0, \quad d_1^T(1) = d^TA_1,$$

$$d_0^T(p) = d_0^T(p-1)A_0, \quad d_p^T(p) = d_{p-1}^T(p-1)A_1,$$

---

† *В дальнейшем будем считать, что* $\Sigma_j^s(\cdot)=0$, *если* $s<j$.

$d_s^T(p) = d_s^T(p-1)A_0 + d_{s-1}^T(p-1)A_1, \quad s = 1, 2, \ldots, p-1, \quad d_s(p) = 0, \quad s < 0, \quad s > p.$

Рассмотрим функции

(16) $$g_0(t) = 0, g_p(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{p-j-1} d_s^T(p-j-1)b\Delta u_*^{(j)}(t-sh), p = \overline{1, k_i}, t \in T_i, i = \overline{0, \rho}.$$

Они известны, так как заданы функции $\Delta u_*(t), t \in T_0$. Тогда равенства (15) имеют вид

(17) $$d^T \Delta x^{(p)}(t) = \sum_{s=0}^{p} d_s^T(p)\Delta x(t-sh) + g_p(t), \quad p = \overline{0, k_i}, \quad t \in T_i, \quad i = \overline{0, \rho}.$$

Обозначим

(18) $$\bar{g}_{k_i+1}(t) = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{s=0}^{k_i-j} d_s^T(k_i-j)b\Delta u_*^{(j)}(t-sh) + \sum_{s=0}^{k_i-1} d_s^T(k_i)b\Delta u_*(t-sh),$$
$$t \in T_i, \quad i = \overline{0, \rho}.$$

Тогда с учетом (17), (18) равенства (14) можно записать в виде:

(19) $$\sum_{s=0}^{p} d_s^T(p)\Delta x(\mu_i - sh) = f^{(p)}(\mu_i + 0) - g_p(\mu_i + 0), \quad p = \overline{0, k_i}, \quad i = \overline{0, \rho},$$

(20) $$\sum_{s=0}^{k_i+1} d_s^T(k_i+1)\Delta x(t-sh) + d_{k_i}^T(k_i)b\Delta u(t-k_ih) = f^{(k_i+1)}(t) - \bar{g}_{k_i+1}(t),$$
$$t \in T_i, i = \overline{0, \rho}.$$

Учитывая свойства 1) – 4) функций $f(t)$, $\Delta u_*(t)$, функции $f^{(p)}(t) - g_p(t)$ непрерывны в точке μ_{i_0+1} для всех $p = \overline{0, \min\{k_{i_0}, k_{i_0+1}\}}$. Следовательно соотношения (19), (20) эквивалентны соотношениям (20) и

(21) $$\sum_{s=0}^{p} d_s^T(p)\Delta x(\mu_i - sh) = f^{(p)}(\mu_i + 0) - g_p(\mu_i + 0), \quad p \in S_i, \quad i = \overline{0, \rho},$$

где

(22) $$S_i = \begin{cases} \emptyset, & i \in I^-, \\ \{k_{i-1}+1, k_{i-1}+2, \ldots, k_i\}, & i \in I^+. \end{cases}$$

Не останавливаясь на особых случаях, предположим, что

(23) $$\alpha_i = d_{k_i}^T(k_i)b = d^T A_1^{k_i} b \neq 0, i = \overline{0, \rho}.$$

Тогда из равенств (20) получаем

$$\Delta u(t-k_ih)=\bar{f}_i(t)-\frac{1}{\alpha_i}\sum_{s=0}^{k_i+1}d_s^T(k_i+1)\Delta x(t-sh),\quad t\in T_i,\quad i=\overline{0,\rho}, \tag{24}$$

где

$$\bar{f}_i(t)=\frac{1}{\alpha_i}(f^{(k_i+1)}(t)-\bar{g}_{k_i+1}(t)),\quad t\in T_i,\quad i=\overline{0,\rho}. \tag{25}$$

Из (24) и (11) получаем:

$$\Delta\dot{x}(t-ph)=A_0\Delta x(t-ph)+A_1\Delta x(t-(p+1)h)+b\Delta u(t-ph),$$
$$p>k_i,\quad t-ph\geq 0,\quad \Delta x(t)\equiv 0,\quad t\in[-h,0];$$
$$\Delta\dot{x}(t-k_ih)=\sum_{s=0}^{k_i+1}B_{is}\Delta x(t-sh)+b\bar{f}_i(t); \tag{26}$$
$$\Delta\dot{x}(t-ph)=A_0\Delta x(t-ph)+A_1\Delta x(t-(p+1)h)+b\Delta u_*(t-ph),$$
$$p=\overline{0,k_i-1},\quad t\in T_i,\quad i=\overline{0,\rho},$$

где

$$B_{is}=-\frac{bd_s^T(k_i+1)}{\alpha_i},\quad s=\overline{0,k_i-1},$$
$$B_{i,k_i}=A_0-\frac{bd_{k_i}^T(k_i+1)}{\alpha_i}, \tag{27}$$
$$B_{i,k_i+1}=A_1-\frac{bd_{k_i+1}^T(k_i+1)}{\alpha_i},\quad i=\overline{0,\rho}.$$

Используя (24), равенства (13) принимают вид:

$$\sum_{s=0}^{k_i+1}d_s^T(k_i+1)\Delta x(\tau_{ij}-sh)=\alpha_i\bar{f}_i(\tau_{ij})-\alpha_iu_{ij},\quad i=\overline{0,\rho},\quad j=\overline{1,s_i}. \tag{28}$$

В результате задача управляемости сводится к разрешимости относительно функций

$$\Delta u(t),\quad t\in T_{HH}=T_H\backslash T_{\text{оп}},\quad T_{\text{оп}}=\bigcup_{i=0}^{\rho}T_i^{k_i},$$

конечномерной краевой задачи (21), (26), (28). Прежде, чем решать эту задачу, исследуем систему (26). Обозначим $k_*=\max\limits_{i=\overline{0,\rho}}k_i$, $\tau_*=t^*-k_*h$. Тогда на отрезке $[0,\tau_*]$ система (26) совпадает с системой (11) и ее решение согласно формуле Коши имеет вид:

$$\Delta x(t)=\int_0^t F(t,\tau)b\Delta u(\tau)d\tau,\quad t\in[0,\tau_*], \tag{29}$$

где $F(t,\tau)$ – решение системы

$$
(30)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial \tau} = -F(t,\tau)A_0 - F(t,\tau+h)A_1, \tau \le t,\\ &F(t,t) = E, \quad F(t,\tau) \equiv 0, \quad \tau > t.\end{aligned}
$$

Введем обозначения

$$
(31)\qquad A_{ps}(t) = \begin{cases} \mathbf{O}, & s = \overline{0,p-1},\\ A_0, & s = p,\\ A_1, & s = p+1,\\ \mathbf{O}, & s = \overline{p+2,k_*}, \quad p = \overline{0,k_i-1};\\ B_{is}, & s = \overline{0,k_i+1},\\ \mathbf{O}, & s = \overline{k_i+2,k_*}, \quad p = k_i;\\ \mathbf{O}, & s = \overline{p+2,k_*},\\ A_1, & s = p+1,\\ A_0, & s = p,\\ \mathbf{O}, & s = \overline{0,p-1}, \quad p = \overline{k_i+1,k_*}; \quad t \in T_i, \quad i = \overline{0,\rho};\\ A_1, & s = k_*+1, p = k_*, \quad t \in T_i, \quad i \notin I_{k_*},\\ B_{i,k_*+1}, & s = k_*+1, \quad p = k_*, \quad t \in T_i, \quad i \in I_{k_*};^{\dagger} \end{cases}
$$

$$
(32)\qquad q_p(t) = \begin{cases} \triangle u_*(t-ph), \quad p = \overline{0,k_i-1},\\ \bar{f}_i(t), \quad p = k_i,\\ \triangle u(t-ph), \quad p = \overline{k_i+1,k_*}; \quad t \in T_i, \quad i = \overline{0,\rho}. \end{cases}
$$

Тогда систему (26) можем переписать в виде:

$$
(33)\qquad \triangle\dot{x}(t-ph) = \sum_{s=0}^{p+1} A_{ps}(t)\triangle x(t-sh) + bq_p(t), \quad t \in T^*, \quad p = \overline{0,k_*}.
$$

Заменим систему (33) эквивалентной системой, не содержащей опережающего и запаздывающего аргумента. Введем $n(k_*+1)$-мерную вектор-функцию $z(t)$:

$$
z(t) = \begin{pmatrix} \triangle x(t)\\ \triangle x(t-h)\\ \vdots\\ \triangle x(t-k_*h) \end{pmatrix}, \quad t \in T^*,
$$

[†] *В дальнейшем будем считать, что $\{j,s\} = \emptyset$, если $s < j$.*

матрицу размерности $n(k_*+1)\times n(k_*+1)$:

$$A(t)=\begin{pmatrix} A_{ps}(t),\, s=\overline{0,k_*} \\ p=\overline{0,k_*}\end{pmatrix},\quad t\in T^*$$

$$A(t)=\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_0 & A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0}\\ a_{k_i0} & a_{k_i1} & a_{k_i2} & \dots & a_{k_ik_i-1} & a_{k_ik_i} & a_{k_ik_i+1} & a_{k_ik_i+2} & \dots & a_{k_ik_*}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & \dots & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_0 \end{bmatrix}$$

$$a_{k_is}=-\frac{bd_s^T(k_i+1)}{\alpha_i},\quad s=\overline{0,k_i-1};\quad a_{k_ik_i}=A_0-\frac{bd_{k_i}^T(k_i+1)}{\alpha_i};$$

$$a_{k_ik_i+1}=A_1-\frac{bd_{k_i+1}^T(k_i+1)}{\alpha_i};\quad a_{k_is}=\mathbf{0},\quad s=\overline{k_i+2,k_*},\quad t\in T_i.$$

и вектор-функцию $q(t)$ размерности $n(k_*+1)$:

$$q(t)=\begin{pmatrix} bq_p(t)\\ p=\overline{0,k_*-1},\\ bq_{k_*}(t)+A_{k_*,k_*+1}(t)\Delta x(t-(k_*+1)h)\end{pmatrix},\qquad t\in T^*.$$

Тогда система (33) принимает вид

$$\dot z(t)=A(t)z(t)+q(t),t\in T^*. \tag{34}$$

Начальное условие для нее

$$z(t^*)=\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ \vdots\\ z_{k_*}\end{pmatrix}=z^*, \tag{35}$$

где

$$z_{k_*}=\int_0^{\tau_*}F(\tau_*,\tau)b\Delta u(\tau)d\tau, \tag{36}$$

а z_p, $p=\overline{0,k_*-1}$ – неопределенные пока n-векторы. Очевидно, система (34),(35) эквивалентна системе (11) на $[0,\tau_*]$ и системе (33), если

$$G_{p+1}z(t^*+h)=z_p,\quad p=\overline{0,k_*-1}, \tag{37}$$

где

$$G_p = (\underbrace{\mathbf{O}, \dots, \mathbf{O}}_{p}, \mathbf{E}, \mathbf{O}, \dots, \mathbf{O}). \tag{38}$$

Здесь G_p - $n \times n(k_*+1)$-матрица, $\mathbf{O}$ – $n \times n$-нулевая матрица, $\mathbf{E}$ – $n \times n$-единичная матрица.

Обозначим через $\Phi(t,\tau)$ фундаментальную матрицу решений однородной части системы (34), т.е. $\Phi(t,\tau)$ – решение системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial \tau} &= -\Phi(t,\tau)A(\tau), \quad t \in [t^*, t^*+h], \quad \tau \le t, \\ \Phi(t,t) &= E, \quad \Phi(t,\tau) \equiv 0, \quad \tau > t. \end{aligned} \tag{39}$$

По формуле Коши решение системы (34) принимает вид:

$$z(t) = \Phi(t,t^*)z^* + \int_{t^*}^{t} \Phi(t,\tau)q(\tau)d\tau, \quad t \in T^*. \tag{40}$$

Теперь перепишем соотношения (21) и (28), используя $z(t)$. Для этого введем вектор r_p размерности $n(k_*+1)$ и числа ξ_{ij}, η_{ip}:

$$\begin{aligned} r_p^T &= (d_0^T(p), d_1^T(p), \dots, d_p^T(p), 0, \dots 0), \quad p \in S_i, \\ \eta_{ip} &= f^{(p)}(\mu_i+0) - g_p(\mu_i+0), \quad p \in S_i, \\ \xi_{ij} &= \bar{f}_i(\tau_{ij}) - u_{ij}, \quad i = \overline{0,\rho}, \quad j = \overline{1,s_i}. \end{aligned} \tag{41}$$

Тогда соотношения (21) и (28) принимают вид:

$$\begin{aligned} & r_p^T z(\mu_i) = \eta_{ip}, \quad i = \overline{0,\rho}, \quad p \in S_i; \\ & r_{k_i+1}^T z(\tau_{ij}) = \alpha_i \xi_{ij}, \quad i \in I \backslash I_{k_*}, \\ & \bar{r}_{k_*+1}^T z(\tau_{ij}) + d_{k_*+1}^T(k_*+1)\Delta x(\tau_{ij} - (k_*+1)h) = \alpha_i \xi_{ij}, \quad i \in I_{k_*}, \quad j = \overline{1,s_i}. \end{aligned} \tag{42}$$

где $\bar{r}_{k_*+1}^T = (d_0^T(k_*+1), \dots, d_{k_*}^T(k_*+1))$.

Таким образом, управляемост системы (11) относительно T_0 и $\tau_{ij}^{k_i}$, $i = \overline{0,\rho}, j = \overline{1,s_i}$ сводится к разрешимости относительно $\Delta u(t)$, $t \in T_{HH}$, и n-векторов z_p, $p = \overline{0, k_* - 1}$, соотношений (37), (42). Исследуем разрешимость этой задачи.

Представим матрицу $\Phi(t,\tau)$ в виде:

$$\Phi(t,\tau) = (\Phi_p(t,\tau), \quad p = \overline{0,k_*}),$$

где $\Phi_p(t,\tau)$ — $n(k_*+1) \times n$ — матрица. Тогда (40) можем записать следующим образом:

$$z(t) = z^0(t) = \sum_{p=0}^{k_*-1} \Phi_p(t,t^*)z_p + \int_0^{\tau_*} \Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau)b\Delta u(\tau)d\tau +$$

$$\int_0^{\tau_*-h}\left(\int_{\tau_*-h}^{t-(k_*+1)h}\Phi_{k_*}(t,\tau_1+(k_*+1)h)A_{k_*,k_*+1}(\tau_1+(k_*+1)h)F(\tau_1,\tau)d\tau_1\right)$$

$$b\Delta u(\tau)d\tau+ \tag{43}$$

$$\int_{\tau_*-h}^{t-(k_*+1)h}\left(\int_{\tau}^{t-(k_*+1)h}\Phi_{k_*}(t,\tau_1+(k_*+1)h)A_{k_*,k_*+1}(\tau_1+(k_*+1)h)F(\tau_1,\tau)d\tau_1\right)$$

$$b\Delta u(\tau)d\tau+\sum_{i\in I(t)\setminus I_{k_*}(t)}\sum_{p=k_i+1}^{k_*}\int_{T_i^p}\Phi_p(t,\tau+ph)b\Delta u(\tau)d\tau,\quad t\in T^*,$$

где

$$z^0(t)=\sum_{i\in I(t)}\left[\sum_{p=0}^{k_i-1}\int_{T_i^p}\Phi_p(t,\tau+ph)b\Delta u_*(\tau)d\tau+\int_{T_i^{k_i}}\Phi_{k_i}(t,\tau+k_ih)b\bar f_i(\tau+k_ih)d\tau\right],$$

$$I(t)=\{i\in I: T_i\cap[t^*,t]\neq\emptyset\},$$

$$I_{k_*}(t)=\{i\in I_{k_*}: T_i\cap[t^*,t]\neq\emptyset\}.$$

Разсмотрим следующую матрицу размерности $n(k_*+1)\times n$:

$$\Omega(t,\tau)=\begin{cases}\Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau)+\int_{\tau_*-h}^{t-(k_*+1)h}\Phi_{k_*}(t,\tau_1+(k_*+1)h)\\ \quad A_{k_*,k_*+1}(\tau_1+(k_*+1)h)F(\tau_1,\tau)d\tau_1, 0\le\tau\le\tau_*-h;\\ \Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau)+\int_{\tau}^{t-(k_*+1)h}\Phi_{k_*}(t,\tau_1+(k_*+1)h)\\ \quad A_{k_*,k_*+1}(\tau_1+(k_*+1)h)F(\tau_1,\tau)d\tau_1,\ \tau_*-h\le\tau\le t-(k_*+1)h;\\ \Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau),\quad t-(k_*+1)h\le\tau\le\tau_*;\\ \Phi_p(t,\tau+ph),\quad \tau\in T_i^p,\quad \tau\le t-ph;\\ 0,\quad \tau\in T_i^p,\quad \tau>t-ph,\quad i=\overline{0,\rho},\quad p=\overline{0,k_*},\quad t\in T^*.\end{cases} \tag{44}$$

Равенство (43) принимает вид:

$$z(t)=z^0(t)+\int_{T_{HH}}\Omega(t,\tau)b\Delta u(\tau)d\tau+\sum_{p=0}^{k_*-1}\Omega(t,t^*-ph)z_p,\quad t\in T^*, \tag{45}$$

при этом

$$z^0(t)=\int_{T_0}\Omega(t,\tau)b\Delta u_*(\tau)d\tau+\int_{T_{\text{оп}}}\Omega(t,\tau)b\bar f(\tau)d\tau, \tag{46}$$

где

$$\bar{f}(\tau) = \bar{f}_i(\tau + k_i h), \quad \tau \in T_i^{k_i}, \quad i = \overline{0,\rho}, \quad \bar{f}(\tau) \equiv 0, \quad \tau \notin T_{\text{оп}}. \tag{47}$$

Рассмотрим матричную функцию $\Omega(t,\tau)$. Учитывая (39), можно получить для нее дифференциальные уравнения. Имеем:

$$\Omega(t,\tau) \equiv 0, \quad \tau \in T_i^p, \quad \tau > t - ph, \quad i = \overline{0,\rho}, \quad p = \overline{0,k_*};$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial\Phi_p(t,\tau+ph)}{\partial\tau} = -\sum_{s=0}^{k_*}\Phi_s(t,\tau+ph)A_{sp}(\tau+ph) = \\ = -\sum_{s=0}^{k_*}\Omega(t,\tau+(p-s)h)A_{sp}(\tau+ph), \quad \tau \in T_i^p, \quad i=\overline{0,\rho}, \quad p=\overline{0,k_*},\end{gathered} \tag{48}$$

или, учитывая вид матрицы $A(\tau)$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Omega(t,\tau)A_0 - \Omega(t,\tau+h)A_1 + \Omega(t,\tau+(p-k_i)h).\frac{bd_p^T(k_i+1)}{\alpha_i}, \\ \tau \in T_i^p, \quad p=\overline{0,k_i}, \quad \tau \le t-ph. \\ \frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Omega(t,\tau)A_0 - \Omega(t,\tau+h)A_1 + \Omega(t,\tau+h)\frac{bd_{k_i+1}^T(k_i+1)}{\alpha_i}, \\ \tau \in T_i^{k_i+1}, \quad \tau \le t-(k_i+1)h, \quad i \notin I_{k_*}, \\ \frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Omega(t,\tau)A_0 - \Omega(t,\tau+h)A_1, \quad \tau \in T_i^p, \\ p = \overline{k_i+2,k_*}, \quad i \notin I_{k_*}, \quad \tau \le t-ph. \\ \frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -[\Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau)]A_0 - [\Phi_{k_*}(t,t^*)F(\tau_*,\tau+h)]A_1 \\ = -\Omega(t,\tau)A_0, \quad t-(k_*+1)h \le \tau \le \tau_*; \\ \frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Omega(t,\tau)A_0 - \Omega(t,\tau+h)A_{k_*,k_*+1}(\tau+(k_*+1)h), \\ \tau_*-h \le \tau < t-(k_*+1)h; \\ \frac{\partial\Omega(t,\tau)}{\partial\tau} = -\Omega(t,\tau)A_0 - \Omega(t,\tau+h)A_1, \quad 0 \le \tau \le \tau_*-h;\end{gathered} \tag{49}$$

Запишем теперь условия (37), (42). С учетом (45) имеем:

$$G_{p+1}\left[z^0(t^*+h) + \int_{T_{HH}}\Omega(t^*+h,\tau)b\Delta u(\tau)d\tau + \sum_{s=0}^{k_*-1}\Omega(t^*+h,t^*-sh)z_s\right] = z_p,$$

$$p = \overline{0, k_* - 1};$$

$$r_p^T \left[z^0(\mu_i) + \int_{T_{HH}} \Omega(\mu_i, \tau) b \Delta u(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k_*-1} \Omega(\mu_i, t^* - sh) z_s \right] = \eta_{ip}, \quad i = \overline{0, \rho}, \quad p \in S_i;$$

(50) $$r_{k_i+1}^T \left[z^0(\tau_{ij}) + \int_{T_{HH}} \Omega(\tau_{ij}, \tau) b \Delta u(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k_*-1} \Omega(\tau_{ij}, t^* - sh) z_s \right] = \alpha_i \xi_{ij},$$

$$i \in I \backslash I_{k_*}, \quad j = \overline{1, s_i},$$

$$\bar{r}_{k_*+1}^T \left[z^0(\tau_{ij}) + \int_{T_{HH}} \Omega(\tau_{ij}, \tau) b \Delta u(\tau) d\tau + \sum_{s=0}^{k_*-1} \Omega(\tau_{ij}, t^* - sh) z_s \right] +$$

$$\int_0^{\tau_{ij}^{k_*+1}} d_{k_*+1}^T (k_* + 1) F(\tau_{ij}^{k_*+1}, \tau) b \Delta u(\tau) d\tau = \alpha_i \xi_{ij}, \quad i \in I_{k_*}, \quad j = \overline{1, s_i}.$$

Эта система разрешима относительно z_p, $p = \overline{0, k_* - 1}$, $\Delta u(t), t \in T_{HH}$, тогда и только тогда, когда существуют такие различные моменты

$$t_k \in T_{HH}, \quad k \in K_0, \quad |K_0| = \sum_{i=0}^{\rho} (|S_i| + s_i),$$

что $\det P_{\text{оп}} \neq 0$, где $P_{\text{оп}}$ – $(N \times N)$ – матрица вида ($N = |K_0| + nk_*$):

(51) $$P_{\text{оп}} = \begin{bmatrix} P_{\text{оп}}^1 & \vdots & \\ \dots & \vdots & P_{\text{оп}}^3 \\ P_{\text{оп}}^2 & \vdots & \end{bmatrix},$$

(52) $$P_{\text{оп}}^1 = \begin{bmatrix} G_{p+1} \Omega(t^* + h, t^* - sh), s = \overline{0, k_* - 1} \\ p = \overline{0, k_* - 1} \end{bmatrix} - E,$$

(53) $$P_{\text{оп}}^2 = \begin{bmatrix} r_p^T \Omega(\mu_i, t^* - sh), s = \overline{0, k_* - 1}, \quad p \in S_i, i = \overline{0, \rho}; \\ r_{k_i+1}^T \Omega(\tau_{ij}, t^* - sh), s = \overline{0, k_* - 1}, \quad j = \overline{1, s_i}, i \in I \backslash I_{k_*}; \\ \bar{r}_{k_*+1}^T \Omega(\tau_{ij}, t^* - sh), s = \overline{0, k_* - 1}, \quad j = \overline{1, s_i}, i \in I_{k_*}; \end{bmatrix},$$

$$
(54) \qquad P^3_{\text{оп}} = \begin{bmatrix} G_{p+1}\Omega(t^* + h, t_k)b, k \in K_0, p = \overline{0, k_* - 1}; \\ r^T_p \Omega(\mu_i, t_k)b, \quad k \in K_0, i = \overline{0, \rho}, \quad p \in S_i; \\ r^T_{k_i+1}\Omega(\tau_{ij}, t_k)b, \quad k \in K_0, j = \overline{1, s_i}, \quad i \in I \backslash I_{k_*}; \\ \bar{r}^T_{k_*+1}\Omega(\tau_{ij}, t_k)b + d^T_{k_*+1}(k_* + 1)F(\tau^{k_*+1}_{ij}, t_k)b, \\ k \in K_0, \quad j = \overline{1, s_i}, i \in I_{k_*} \end{bmatrix}
$$

Определение 2. *Совокупность* $S_{\text{оп}} = \{T_i, k_i, \tau_{ij}, j = \overline{1, s_i}, i = \overline{0, \rho}, t_k, k \in K_0\}$ *назовем опорой задачи* (1) –(4), *если соответствующая ей опорная матрица* $P_{\text{оп}}$ *невырожденная.*

Из проведенных рассуждений следует:

Теорема 1. *Система* (11) *управляема тогда и только тогда, когда существует опора задачи.*

Пара $\{u, S_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления $u(\cdot)$ и опоры задачи S_0 называется [1] опорным управлением.

Итак, пусть заданы функции $f(t), t \in T^*, \Delta u(t), t \in T_0 \cup T_{HH}$ и векторы z_p, $p = \overline{0, k_* - 1}$, обладающие свойствами 1) – 4), и удовлетворяющие условиям (50), а $z(t), \ \ t \in T^*$, соответствующее им решение системы (34) – (36).

Пусть:

$$
\Delta u(t - k_i h) = \bar{f}_i(t) - \frac{1}{\alpha_i} r^T_{k_i+1} z(t), \quad t \in T_i, \quad i \in I \backslash I_{k_*},
$$

$$
\Delta u(t-k_i h) = \bar{f}_i(t) - \frac{1}{\alpha_i}\bar{r}^T_{k_*+1} z(t) - \frac{1}{\alpha_i}\int_0^{t-(k_*+1)h} d^T_{k_*+1}(k_*+1)F(t-(k_*+1)h, \tau)b\Delta u(\tau)d\tau
$$

(55)

$$
t \in T_i, i \in I_{k_*}.
$$

Из вышеприведенных рассуждений следует, что $\Delta u(t), t \in T$, и соответствующая траектория $\Delta x(t), t \in T$, системы (11), удовлетворяют условиям (12) – (13). Кроме того, управление $\Delta u(t), \ \ t \in T^{k_i}_i, \ \ i = \overline{0, \rho}$, определенное соотношениями (55), непрерывно в точках

$$
\mu^{k_i}_i, i \in I^{-+} \cup I^{--}, \quad \mu^{k_i}_{i+1}, \quad i \in I^{+-} \cup I^{--},
$$

$$
\{\tau^{k_i}_{ij}, j = \overline{1, s_i}\} \backslash \{\mu^{k_i}_i, \mu^{k_i}_{i+1}\}, \quad i = \overline{0, \rho}.
$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Конструктивные методы оптимизации Ч.2. Задачи управления. Минск, Изд-во Университетское, 1984.

[2] В. В. Альсевич, О. И. Костюкова, Ю. Х. Пешева, Оптимизация управляемых систем с последействием и функциональными ограничениями на фазовые переменные, Международная конференция "Математические методы в исследовании операций", София 1987, тезисы.

[3] Ю. Х. Пешева, Задача оптимального быстродействия в системах дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, *Сердика* **9** (1983), 343-352.

В.В.Альсевич
ФПМИ, кафедра МОУ
Белгосуниверситет
просп. Фр.Скорины, 4
220 080 г. Минск
Беларусь

О.И.Костюкова
Институт математики
АН Беларуси
ул. Типографская, 11
г. Минск, ГСП
Беларусь

Ю.Х.Пешева
Институт прикладной математики и информатики
Технический университет
почтовый ящик 384
1000 София
Болгария

Поступило 02.07.1992
Переработано 01.02.1993