Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **42** (2016), 89–102

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

DIFFÉOMORPHISMES DE CONTACT SUR T^3

Saad Aggoun

Communicated by O. Mushkarov

Abstract. In this paper we will determine all the diffeomorphisms F on the torus T^3 that leave the contact form $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ invariant $(F^*\omega_n = \omega_n)$.

1. Introduction. En 1969 W. M. Bootby [1] met en évidence l'énormité du groupe $G(F, M, \omega)$ des difféomorphismes F sur une variété M de dimension $(2p+1)$ qui laissent une forme de contact ω invariante $(F^*\omega = \omega)$.

Dans cet article on s'intéresse au groupe $G\left(F, T^3, \omega_n\right)$ des difféomorphismes F sur le tore T^3 qui laissent la forme de contact $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ invariante. C'est un groupe de dimension infinie.

Le groupe des flôts des automorphismes infinitésimaux de ω_n est un sous-groupe abélien de dimension infinie de $G\left(F, T^3, \omega_n\right)$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37J55, 53D10, 53D17, 53D35.

Key words: Forme de contact, champ de Reeb, crochet de Poisson, automorphisme infinitésimal.

En 1958, dans le colloque de Bruxelle, P. Libermann [2] a montré que les automorphismes infinitésimaux d'une forme de contact correspondent bijectivement aux fonctions qui sont des intégrales premières du champ de Reeb R de ω.

Ceci permet de transporter sur l'espace des fonctions la structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel des automorphismes infinitésimaux de ω et on obtient un crochet de Poisson $[f, g]$ qui dépend de ω.

L'étude des algèbres de Lie de dimensions infinies ainsi obtenues est loin d'être avancée. En 1973, A. Lichnerowicz [3] qui espèrait distinguer des formes de contact par les propriétés de leurs algèbres de Lie a donné une série de résultats tous universels.

Pour $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2 \; (n \in \mathbb{N}^*)$, on démontrera que l'algèbre de Lie $A(\omega_n)$ des automorphismes infinitésimaux de ω_n est abélienne et de dimension infinie. De plus il existe une infinité de formes de contact non difféomorphes sur T^3 ayant des algèbres de Lie de dimensions infinies, abéliennes et isomorphes.

L'unicité du champ de Reeb, son invariance par F_* et l'invariance du crochet de Poisson sont très bénéfiques dans la détermination de F.

2. Préliminaires.

Définition 2.1. *On dit qu'une forme de Pfaff ω est une forme de contact sur une variété M de dimension $(2p+1)$ si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

i) $\omega \wedge d\omega^p$ est une forme volume (sans zéros).

ii) $\omega_x(u) = 0$ et $i(u)\, d\omega_x = 0$ implique $u = 0$ pour $u \in T_x M$.

Définition 2.2. *Soit ω une forme de contact sur une variété M de dimension $(2p+1)$. Les équations $i(R)\,\omega = 1$ et $i(R)\, d\omega = 0$ admettent un unique champ de vecteurs sans zéros R comme solution appelé champ de Reeb associé à ω.*

Définition 2.3. *Une forme de contact ω est invariante par rapport à un champ de vecteurs X ou X est un automorphisme infinitésimal de ω si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

i) $L_X \omega = 0$ où L est la dérivé de Lie $(doi + iod)$ de ω.

ii) $f_t^* \omega = \omega$ où f_t est le flôt à un paramètre de X.

Définition 2.4. *Si X et Y sont deux automorphismes infinitésimaux de ω, il en est de même pour $[X, Y]$, de sorte que si $\omega(X) = f$ et $\omega(Y) = g$ on aura :*

$$\omega([X, Y]) = [f, g],$$

qui est par définition le crochet de Poisson des deux intégrales premières f *et* g *de* R *associées aux deux automorphismes infinitésimaux* X *et* Y *de la forme de contact* ω.

Définition 2.5. *A chaque automorphisme infinitésimal* X *de* ω *est associée la fonction* $f = \omega(X)$.*Inversement pour toute intégrale* f *de* R *les équations* $\omega(X) = f$ *et* $L_X\omega = i(X)\,d\omega + df = 0$ *admettent un unique champ de vecteurs* X *comme solution. On désigne par* $A(\omega)$ *l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de* ω *munie du crochet de Poisson* $[f, g]$.

Pour plus de détails voir [4].

3. Résultats.

Théorème 3.1. *Soit* F *un difféomorphisme de* T^3 *qui laisse la forme de contact* $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *invariante c'est-à-dire* $F^*\omega_n = \omega_n$ *alors* F *a l'une des formes suivantes :*

$$\begin{aligned}
F_{(k,1)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(-\,\theta_2 + \alpha(\theta_3), \theta_1 + \beta(\theta_3), \theta_3 + \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,2)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(\theta_2 + \alpha(\theta_3), \theta_1 + \beta(\theta_3), -\,\theta_3 + \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,3)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(\theta_2 + \alpha(\theta_3), -\,\theta_1 + \beta(\theta_3), \theta_3 + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,4)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(-\,\theta_2 + \alpha(\theta_3), -\,\theta_1 + \beta(\theta_3), -\,\theta_3 + \frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,5)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(\theta_1 + \alpha(\theta_3), \theta_2 + \beta(\theta_3), \theta_3 + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,6)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(\theta_1 + \alpha(\theta_3), -\,\theta_2 + \beta(\theta_3), -\,\theta_3 + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,7)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(-\,\theta_1 + \alpha(\theta_3), -\,\theta_2 + \beta(\theta_3), \theta_3 + \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\\
F_{(k,8)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \left(-\,\theta_1 + \alpha(\theta_3), \theta_2 + \beta(\theta_3), -\,\theta_3 + \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Avec $k \in \mathbb{Z}$ *et* $\alpha'(\theta_3)\cos nh(\theta_3) + \beta'(\theta_3)\sin nh(\theta_3) = 0$, *où* $h(\theta_3)$ *est la troisième composante de* F.

Théorème 3.2. *L'algèbre de Lie* $A(\omega_n)$ *des automorphismes infinitésimaux de la forme de contact* $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *sur le tore* T^3 *est de dimension infinie et abélienne.*

Théorème 3.3. *Pour m et n deux entiers naturels non nuls et différents :*
i) Les formes de contact $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$ *et* $\omega_m = \cos m\theta_3 d\theta_1 + \sin m\theta_3 d\theta_2$ *sont non difféomorphes.*
ii) Les algèbres de Lie correspondantes $A(\omega_n)$ *et* $A(\omega_m)$ *sont isomorphes.*

Théorème 3.4. *Les flôts des automorphismes infinitésimaux de la forme de contact* $\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *sur le tore* T^3 *engendrent un sous-groupe abélien de dimension infinie de* $G\left(F, T^3, \omega_n\right)$.

Théorème 3.5. *L'équation* $\alpha'(\theta_3)\cos nh(\theta_3) + \beta'(\theta_3)\sin nh(\theta_3) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *admet une solution* $(\alpha(\theta_3), \beta(\theta_3))$ *si et seulement s'il existe une fonction f de θ_3 telle que*

$$\begin{aligned}
\alpha(\theta_3) &= f(\theta_3)\cos nh(\theta_3) - \frac{f'(\theta_3)\sin nh(\theta_3)}{n},\\
\beta(\theta_3) &= f(\theta_3)\sin nh(\theta_3) + \frac{f'(\theta_3)\cos nh(\theta_3)}{n}.
\end{aligned}$$

4. Lemmes.

Lemme 4.1. *Soit ω_n la forme de contact définie sur T^3 par :*

$$\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Alors le champ de Reeb correspondant est donné par : $R_n = (\cos n\theta_3, \sin n\theta_3, 0)$.

Démonstration. Posons $R_n = (A, B, C)$ et cherchons A, B et C pour que : $\omega_n(R_n) = 1$ et $i(R_n)\, d\omega_n = 0$. Ces équations donnent :

$$\begin{aligned}
A\cos n\theta_3 + B\sin n\theta_3 &= 1,\\
A\sin n\theta_3 - B\cos n\theta_3 &= 0,\\
C\cos n\theta_3 &= 0,\\
C\cos n\theta_3 &= 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
A &= \cos n\theta_3,\\
B &= \sin n\theta_3,\\
C &= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$R_n = (\cos n\theta_3, \sin n\theta_3, 0). \qquad \square$$

Lemme 4.2. *Soit f une intégrale première du champ de Reeb R_n de la forme de contact*

$$\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2 \ \ (n \in \mathbb{N}^*) .$$

Alors f est une fonction périodique ne dépendant que de θ_3.

Démonstration. L'équation $R_n(f) = 0$ d'après le Lemme 4.1 signifie que f est constante le long des courbes intégrales de R_n dont l'équation est

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \cos n\theta_3, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \sin n\theta_3, \\ \frac{d\theta_3}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= t\cos(nk) + constante, \\ \theta_2(t) &= t\sin(nk) + constante, \\ \theta_3(t) &= constante\,(k) . \end{aligned}$$

Lorsque tg (nk) est irrationnel la trajectoire est dense sur un tore T^2 de sorte que par continuité f est constante sur ce tore ; on a donc $\dfrac{\partial f}{\partial \theta_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \theta_2} = 0$ pour θ_1, θ_2 arbitraires et θ_3 dans un ensemble dense sur le cercle. Il en résulte que f est constante par rapport à θ_1 et θ_2, ainsi f est une fonction périodique ne dépendant que de θ_3. □

Lemme 4.3. *Le crochet de Poisson de deux intégrales premières f et g de R sur une variété de dimension trois est donné par l'une des formules suivantes :*

$$\begin{aligned} [f,g] &= X(g), \\ [f,g] &= -Y(f), \\ [f,g] &= d\omega(X,Y), \end{aligned}$$

où X et Y sont les deux automorphismes infinitésimaux de ω associés respectivement aux intégrales premières f et g de R avec $X(f) = 0$ et $Y(g) = 0$.

Démonstration. Par définition

$$[f,g] = \omega([X,Y]) .$$

De la relation

$$\omega([X,Y]) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - d\omega(X,Y),$$

on trouve que :

$$[f,g] = X(g) - Y(f) - d\omega(X,Y).$$

Les relations

$$L_X\omega = 0,$$

et

$$L_Y\omega = 0,$$

donnent :

$$X\rfloor d\omega + df = 0.$$

et

$$Y\rfloor d\omega + dg = 0.$$

En calculant ces expréssions en X et Y on trouve :

$$\begin{array}{rcl} d\omega(X,Y) + Y(f) & = & 0, \\ X(f) & = & 0, \\ Y(g) & = & 0, \\ d\omega(X,Y) - X(g) & = & 0. \end{array}$$

En remplaçant dans l'expression de $[f,g]$ on trouve que :

$$\begin{array}{rcl} [f,g] & = & X(g) \\ [f,g] & = & -Y(f) \\ [f,g] & = & d\omega(X,Y). \end{array}$$ □

Lemme 4.4. *Si X est un automorphisme infinitésimal de la forme de contact*

$$\omega_n = \cos n\theta_3 d\theta_1 + \sin n\theta_3 d\theta_2 \; (n \in \mathbb{N}^*),$$

tel que $\omega_n(X) = f$ alors X est donné par

$$X = \left(f(\theta_3)\cos n\theta_3 - \frac{f'(\theta_3)\sin n\theta_3}{n}, f(\theta_3)\sin n\theta_3 + \frac{f'(\theta_3)\cos n\theta_3}{n}, 0 \right).$$

Démonstration. D'après le Lemme 4.2 f est une fonction périodique ne dépendant que de θ_3.Soit $X = (A, B, C)$ un automorphisme infinitésimal de la forme de contact ω_n.

Les équations

$$\omega_n (X) = f (\theta_3)$$

et

$$L_X \omega_n = 0$$

impliquent que

$$\begin{aligned} C \sin n\theta_3 &= 0, \\ C \cos n\theta_3 &= 0, \\ A \sin n\theta_3 - B \cos n\theta &= -f' (\theta_3), \\ A \cos n\theta_3 + B \sin n\theta_3 &= f (\theta_3). \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne :

$$X = \left(f (\theta_3) \cos n\theta_3 - \frac{f' (\theta_3) \sin n\theta_3}{n}; f (\theta_3) \sin n\theta_3 + \frac{f' (\theta_3) \cos n\theta_3}{n}; 0 \right). \quad \square$$

Lemme 4.5. *L'équation $\alpha' (\theta_3) \cos n\theta_3 + \beta' (\theta_3) \sin n\theta_3 = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ admet une solution $(\alpha (\theta_3), \beta (\theta_3))$ si et seulement s'il existe une fonction f de θ_3 telle que :*

$$\begin{aligned} \alpha (\theta_3) &= f (\theta_3) \cos n\theta_3 - \frac{f' (\theta_3) \sin n\theta_3}{n}, \\ \beta (\theta_3) &= f (\theta_3) \sin n\theta_3 + \frac{f' (\theta_3) \cos n\theta_3}{n}, \end{aligned}$$

Démonstration. Si

$$\begin{aligned} \alpha (\theta_3) &= f (\theta_3) \cos n\theta_3 - \frac{f' (\theta_3) \sin n\theta_3}{n}, \\ \beta (\theta_3) &= f (\theta_3) \sin n\theta_3 + \frac{f' (\theta_3) \cos n\theta_3}{n}, \end{aligned}$$

alors

$$\alpha' (\theta_3) = -\left(n f (\theta_3) + \frac{f'' (\theta_3)}{n} \right) \sin n\theta_3,$$

$$\beta'(\theta_3) = \left(nf(\theta_3) + \frac{f''(\theta_3)}{n}\right)\cos n\theta_3,$$

et l'équation $\alpha'(\theta_3)\cos n\theta_3 + \beta'(\theta_3)\sin n\theta_3 = 0$ est vérifiée.

Réciproquement, si $(\alpha(\theta_3), \beta(\theta_3))$ est solution de l'équation $\alpha'(\theta_3)\cos n\theta_3 + \beta'(\theta_3)\sin n\theta_3 = 0$, on pose

$$f(\theta_3) = \alpha(\theta_3)\cos n\theta_3 + \beta(\theta_3)\sin n\theta_3,$$

ce qui donne

$$f'(\theta_3) = n\left[\beta(\theta_3)\cos n\theta_3 - \alpha(\theta_3)\sin n\theta_3\right],$$

et par suite

$$f(\theta_3)\cos n\theta_3 - \frac{f'(\theta_3)\sin n\theta_3}{n} = \alpha(\theta_3),$$

$$f(\theta_3)\sin n\theta_3 - \frac{f'(\theta_3)\cos n\theta_3}{n} = \beta(\theta_3). \qquad \square$$

5. Démonstrations des théorèmes.

Démonstration de Théorème 3.1. Soit F une application de T^3 dans T^3 telle que $F^*\omega_n = \omega_n$.

On pose :

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (f(\theta_1, \theta_2, \theta_3), g(\theta_1, \theta_2, \theta_3), h(\theta_1, \theta_2, \theta_3)),$$

et on obtient les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_1}\sin nh = \cos n\theta_3, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_2}\sin nh = \sin n\theta_3, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_3}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_3}\sin nh = 0. \tag{5.3}$$

De la relation $F^*\omega_n = \omega_n$ on déduit que :

$$F^*(\omega_n \wedge d\omega_n) = \omega_n \wedge d\omega_n,$$

et

$$F_* R_n = R_n,$$

c'est-à-dire

$$det\,(F) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\cos n\theta_3 + \frac{\partial f}{\partial \theta_2}\sin n\theta_3 = \cos nh, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_1}\cos n\theta_3 + \frac{\partial g}{\partial \theta_2}\sin n\theta_3 = \sin nh, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1}\cos n\theta_3 + \frac{\partial h}{\partial \theta_2}\sin n\theta_3 = 0. \tag{5.6}$$

L'équation (5.6) signifie que $R_n\,(h) = 0$ et d'après le Lemme 4.2 on déduit que h est une fonction de θ_3 seulement.En dérivant les équations (5.4) et (5.5) par rapport à $\theta_1$et θ_2 on obtient :

$$R_n\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\right) = R_n\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\right) = R_n\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_1}\right) = R_n\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta_2},$$

sont des intégrales premières de R_n et par suite elles ne dépendent que de θ_3. On pose :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = \alpha_1\,(\theta_3)\,, \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = \alpha_2\,(\theta_3)\,, \frac{\partial g}{\partial \theta_1} = \beta_1\,(\theta_3)\,, \frac{\partial g}{\partial \theta_2} = \beta_2\,(\theta_3)\,,$$

où α_i et β_i $(i = 1.2)$ sont des fonctions de θ_3.Par intégration on trouve :

$$\begin{aligned} f\,(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \theta_1\alpha_1\,(\theta_3) + \theta_2\alpha_2\,(\theta_3) + \alpha_3\,(\theta_3)\,, \\ g\,(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \theta_1\beta_1\,(\theta_3) + \theta_2\beta_2\,(\theta_3) + \beta_3\,(\theta_3)\,, \\ h\,(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \gamma\,(\theta_3)\,, \end{aligned}$$

où α_3, β_3 et γ sont trois nouvelles fonctions ne dépendant que de θ_3. F est un difféomorphisme de T^3 donc nécessairement α_1, α_2, β_1 et β_2 doivent être des constantes entières qu'on note dans toute la suite a, b, c et d. L'équation $\det\,(F) = 1$ donne dans ces conditions $(ad - bc)\,\gamma'\,(\theta_3) = 1$. F est inversible si et seulement si $ad - bc = \pm 1$ et par suite $\gamma'\,(\theta_3) = \pm 1$. Ainsi on a :

$$ad - bc = 1 \text{ et } \gamma'\,(\theta_3) = 1 \text{ ou bien } ad - bc = -1 \text{ et } \gamma'\,(\theta_3) = -1.$$

En remplaçant dans les équations (5.1) et (5.2) $\cos h$ et $\sin h$ par leurs expressions données en (5.4) et (5.5) on obtient :

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, ad - bc = 1 \text{ et } h(\theta_3) = \theta_3 + \gamma, (\gamma \in \mathbb{R}),$$

ou bien

$$a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0, ad - bc = -1 \text{ et } h(\theta_3) = -\theta_3 + \gamma, (\gamma \in \mathbb{R}).$$

Et puisque a, b, c et d sont des entiers on obtient les huit cas cités dans le théorème. $\square$

Démonstration de Théorème 3.2. D'après le Lemme 4.3 le crochet de Poisson de deux intégrales premières f et g de R_n est donné par :

$$[f, g] = X(g) = -Y(f),$$

où $f = \omega_n(X)$ et $g = \omega_n(Y)$ sont d'après le Lemme 4.2 deux fonctions de θ_3. Les coordonnées de X sont données d'après le Lemme 4.4 par :

$$X = \left(f(\theta_3)\cos n\theta_3 - \frac{f'(\theta_3)\sin n\theta_3}{n}, f(\theta_3)\sin n\theta_3 + \frac{f'(\theta_3)\cos n\theta_3}{n}, 0 \right).$$

Ainsi on a $[f, g] = 0$.

Donc $A(\omega_n)$ est abélienne et de dimension infinie engendrée par les intégrales premières de R_n qui sont des fonctions périodiques ne dépendant que de θ_3. $\square$

Démonstration de Théorème 3.3. *i*) Soit F une application de T^3 dans T^3 telle que $F^*\omega_n = \omega_m$.

Si on pose :

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (f(\theta_1, \theta_2, \theta_3), g(\theta_1, \theta_2, \theta_3), h(\theta_1, \theta_2, \theta_3)),$$

on obtient les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_1}\sin nh = \cos m\theta_3, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_2}\sin nh = \sin m\theta_3, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_3}\cos nh + \frac{\partial g}{\partial \theta_3}\sin nh = 0. \tag{5.9}$$

De la relation $F^*\omega_n = \omega_m$ on déduit que :

$$F^*(\omega_n \wedge d\omega_n) = \omega_m \wedge d\omega_m,$$

$$F_* R_m = R_n,$$

c'est-à-dire

$$det\,(F) = \frac{m}{n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\cos m\theta_3 + \frac{\partial f}{\partial \theta_2}\sin m\theta_3 = \cos nh, \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_1}\cos m\theta_3 + \frac{\partial g}{\partial \theta_2}\sin m\theta_3 = \sin nh, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1}\cos m\theta_3 + \frac{\partial h}{\partial \theta_2}\sin m\theta_3 = 0. \tag{5.12}$$

L'équation (5.12) signifie que $R_m(h) = 0$ et d'après le Lemme 4.2 on déduit que h est une fonction de θ_3 seulement. En dérivant les équations (5.10) et (5.11) par rapport à θ_1 et θ_2 on obtient

$$R_m\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1}\right) = R_m\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_2}\right) = R_m\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_1}\right) = R_m\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f}{\partial \theta_2}, \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial \theta_2}$$

sont des intégrales premières de R_n et par suite elles ne dépendent que de θ_3. On pose

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \theta_1} &= \alpha_1(\theta_3),\\
\frac{\partial f}{\partial \theta_2} &= \alpha_2(\theta_3),\\
\frac{\partial g}{\partial \theta_1} &= \beta_1(\theta_3),\\
\frac{\partial g}{\partial \theta_2} &= \beta_2(\theta_3),
\end{aligned}$$

où α_i et β_i sont des fonctions de θ_3. Par intégration on trouve :

$$f(\theta_1,\ \theta_2\ ,\theta_3) = \theta_1\alpha_1(\theta_3) + \theta_2\alpha_2(\theta_3) + \alpha_3(\theta_3)$$

$$\begin{aligned} g(\theta_1,\ \theta_2\ ,\theta_3) &= \theta_1\beta_1(\theta_3)+\theta_2\beta_2(\theta_3)+\beta_3(\theta_3)\\ h(\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3) &= \gamma(\theta_3), \end{aligned}$$

où α_3, β_3 et γ sont trois nouvelles fonctions ne dépendant que de $\theta_3.F$ est un difféomorphisme de T^3, donc nécessairement $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 doivent être des constantes entières qu'on notera dans toute la suite a, b, c et d. L'équation $det(F)=\frac{m}{n}$ donne dans ces conditions $(ad-bc)\gamma'(\theta_3)=\frac{m}{n}$.

F est inversible si et seulement si $ad-bc=\pm1$ et par suite $\gamma'(\theta_3)=\pm\frac{m}{n}$. Ainsi $\gamma(\theta_3)$ est inversible si $\frac{m}{n}$ et $\frac{n}{m}$ sont deux entiers naturels, ce qui donne $m=n$. Donc pour m et n deux entiers naturels non nuls et différents les deux formes de contact ω_n et ω_m sont non difféomorphes.

ii) D'après le Théorème 3.2 les algèbres de Lie $A(\omega_n)$ et $A(\omega_m)$ sont abéliennes , de dimensions infinies et engendrées par toutes les fonctions de la variable θ_3, donc elles sont isomorphes. □

Démonstration de Théorème 3.4. Si X est un automorphisme infinitésimal de ω_n et si $\omega_n(X)=f$ alors d'après le lemme (4.4), X est donné par :

$$X=\left(f(\theta_3)\cos n\theta_3-\frac{f'(\theta_3)\sin n\theta_3}{n}, f(\theta_3)\sin n\theta_3+\frac{f'(\theta_3)\cos n\theta_3}{n},0\right),$$

où f est une fonction périodique de θ_3 d'après le lemme (4.2). Les équations du flôt ϕ_t de X sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= f(\theta_3)\cos n\theta_3-\frac{f'(\theta_3)\sin n\theta_3}{n}=\alpha(\theta_3),\\ \frac{d\theta_2}{dt} &= f(\theta_3)\sin n\theta_3+\frac{f'(\theta_3)\cos n\theta_3}{n}=\beta(\theta_3),\\ \frac{d\theta_3}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= t\alpha(k)+\ constante,\\ \theta_2(t) &= t\beta(k)+constante,\\ \theta_3(t) &= constante\,(k). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\phi_t(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(\theta_1+t\alpha(\theta_3),\theta_2+t\beta(\theta_3),\theta_3)$$

ce qui donne

$$\phi_t^* \omega_n = \omega_n \text{ et } \phi_0 = id.$$

On a donc un sous-groupe à un paramètre de $G\left(F, T^3, \omega_n\right)$ de dimension infinie et abélien.

De plus si $\dfrac{\alpha(k)}{\beta(k)}$ est irrationnel, les courbes intégrales de X sont denses dans un tore T^2 pour θ_3 fixé. Dans le cas contraire les courbes sont fermées, donc périodiques et correspondent aux automorphismes infinitésimaux associés aux fonctions de la forme

$$f(\theta_3) = \lambda (A \cos n\theta_3 + B \sin n\theta_3),$$

où A et B sont deux entiers relatifs et λ un réel quelconque. $\square$

Démonstration de Théorème 3.5. L'équation $\alpha'(\theta_3) \cos nh(\theta_3) + \beta'(\theta_3) \sin nh(\theta_3) = 0$ est complètement résolue. En effet on déduit suivant l'éxpréssion de $h(\theta_3)$ les quatres équations suivantes :

$$\alpha'(\theta_3) \cos n\theta_3 + \beta'(\theta_3) \sin n\theta_3 = 0, \tag{5.13}$$

$$\alpha'(\theta_3) \cos n\theta_3 - \beta'(\theta_3) \sin n\theta_3 = 0, \tag{5.14}$$

$$\alpha'(\theta_3) \sin n\theta_3 + \beta'(\theta_3) \cos n\theta_3 = 0, \tag{5.15}$$

$$\alpha'(\theta_3) \sin n\theta_3 - \beta'(\theta_3) \cos n\theta_3 = 0. \tag{5.16}$$

L'équation (5.13) est traitée dans le lemme (4.5). Pour l'équation (5.14) il suffit de remplacer n par $(-n)$. Pour l'équation (5.15) il suffit de permuter α avec β. Pour l'équation (5.16) il suffit de remplacer n par $(-n)$ puis permuter α avec β. $\square$

6. Conclusion. Dans cet article on a montré combien le groupe de difféomorphismes d'une forme de contact est énorme. En effet il est de dimension infinie et contient un sous-groupe de dimension infinie. En ce qui concerne l'espérance de A. Lichnerowicz, on a donné une infinité de formes de contact non difféomorphes ayant des algèbres de Lie de dimension infinies, abéliennes et isomorphes.

REFERENCES

[1] W. M. Boothby. Transitivity of the automorphisms of certain geometric structure. *Trans. Amer. Math. Soc.* **137** (1969), 93–100.

[2] P. Libermann. Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact. Colloque Géom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958) Centre Belge Rech. Math., 1959, 37–59 (in French).

[3] A. Lichnerowicz. Algèbres de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact. *J. Math. Pures Appl.* (9) **52** (1973) 473–508.

[4] R. Lutz. Quelques remarques historiques et prospectives sur la géométrie de contact. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **58** (1988), 361–393.

Laboratoire de mathématiques fondamentales et numériques
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas Sétif
Algérie
e-mail: saad.aggoun@yahoo.fr

Received May 28, 2015