Serdica
Mathematical Journal
Сердика
Математическо списание

Serdica Math. J. **42** (2016), 261–276

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

CENTRE DE MASSE ET NOUVELLES INEGALITES POUR LA NORME ET LE RAYON NUMERIQUE D'UN OPERATEUR LINEAIRE BORNE

Abderrahim Baghdad, Mohamed Chraïbi Kaadoud,
Moulay Taieb Loumi

Communicated by I. G. Todorov

Abstract. In this paper, we give a necessary and sufficient condition for having

$$\|B - c_B(A^*B)A + \lambda A\|^2 = \inf_{\mu\in\mathbb{C}} \|B - \mu A\|^2 + \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|^2|\lambda|^2,$$

where λ is a complex number, $A, B \in B(H)$, the algebra of bounded linear operators on a complex Hilbert space H and $c_B(A^*B)$ is the center of mass relatively to B. We generalize and improve some inequalities established by Chraïbi [3], Dragomir [4, 5, 6, 7] and Albadawi-Shebrawi [1] linking the norm and the numerical radius of a bounded linear operator.

1. Introduction. Soient $B(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe H et H_1 la sphère unité de H. Pour $A, B \in$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 47A05, 47A12, 47A30, 30B10.
Key words: Domaine numérique, domaine numérique maximal, rayon numérique, centre de masse, et distance aux scalaires.

$B(H)$, on définit respectivement le domaine numérique $W(B)$ de B, le rayon numérique $w(B)$ de B, le domaine numérique maximal $W_0(B)$ de B, le domaine numérique maximal $W_B(A^*B)$ de A^*B relativement B, et la distance $d(B,\mathbb{C}A)$ de B $vect(A)$ par :

$$W(B) = \Big\{\langle Bx, x\rangle :\ x \in H_1\Big\},$$

$$w(B) = \sup_{z\in W(B)} |z|,$$

$$W_0(B) = \Big\{\lambda = \lim_n \langle Bx_n, x_n\rangle : (x_n)_n \subseteq H_1,\ \lim_n \|Bx_n\| = \|B\|\Big\},$$

$$W_B(A^*B) = \Big\{\lambda = \lim_n \langle A^*Bx_n, x_n\rangle : (x_n)_n \subseteq H_1,\ \lim_n \| Bx_n\| =\| B\|\Big\},$$

et

$$d(B,\mathbb{C}A) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|B - \lambda A\|.$$

Le domaine numérique maximal $W_B(A^*B)$ de A^*B relativement B a été défini en 1993 par Magajna [10]. Lorsque $A = I$, l'élément unité de $B(H)$, on retrouve le domaine numérique maximal $W_0(B)$ de B défini en 1970 par Stampfli [12].
En 2012, Barraa et Boumazgour [2, Theorem 2.1] ont montré l'équivalence des trois assertions suivantes :

- (i) $0 \in W_B(A^*B)$,
- (ii) $\|B\| \le \|B + \lambda A\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- (iii) $\|B\|^2 + |\lambda|^2 m^2(A) \le \|B + \lambda I\|^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $m(A) = \inf_{x\in H_1} \|Ax\|$.

Dans le cas où $m(A) > 0$, ils ont établi [2, Corollary 2.2] l'existence et l'unicité d'un scalaire $c_B(A^*B)$ vérifiant

$$(1.1)\quad \|B - c_B(A^*B)A\|^2 + m^2(A)|\lambda|^2 \le \|B - c_B(A^*B)A + \lambda A\|^2, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Le scalaire $c_B(A^*B)$ est appelé le centre de masse de A^*B relativement B. De l'inégalité (1.1), on déduit que

$$(1.2)\qquad \|B - c_B(A^*B)A\| \le \|B - \lambda A\|, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Le scalaire $c_B(A^*B)$ est donc l'unique scalaire vérifiant

$$\|B - c_B(A^*B)A\| = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|B - \lambda A\| = d(B, \mathbb{C}A). \tag{1.3}$$

Lorsque $A = I$, $c_B(A^*B)$ concide avec c_B le centre de masse de B défini par Stampfli [12].

Ce papier est organisé comme suit. Dans la deuxième section, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (1.1) soit une égalité pour un scalaire λ donné, i.e.,

$$d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|\lambda|^2 = \|B - c_B(A^*B)A + \lambda A\|^2.$$

Dans la troisième section, on donne des généralisations et améliorations de certaines inégalités obtenues par Chraïbi [3] , Dragomir [4, 5, 6, 7] et Albadawi-Shebrawi [1].

2. Centre de masse. Dans cette section, A et B sont dans $B(H)$ avec $m(A) > 0$. Les deux lemmes suivants sont utiles pour la proposition qui suit.

Lemme 2.1. *Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de H_1 telle que*

$$d^2(B, \mathbb{C}A) = \lim_n \left\{ \|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2} \right\} \tag{2.1}$$

et

$$c_B(A^*B) = \lim_n \frac{\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle}{\|A\alpha_n\|^2}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Par Barraa-Boumazguour [2, Theorem 3.2]

$$d^2(B, \mathbb{C}A) = \sup_{x \in H_1} \left\{ \|Bx\|^2 - \frac{|\langle Bx, Ax\rangle|^2}{\|Ax\|^2} \right\}.$$

Il existe donc une suite $(\alpha_n)_n$ d'éléments de H_1 telle que

$$d^2(B, \mathbb{C}A) = \lim_n \left\{ \|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2} \right\}.$$

Nous avons

$$d^2(B, \mathbb{C}A) \geq \|(B - c_B(A^*B)A)\alpha_n\|^2$$

$$= \|B\alpha_n\|^2 + |c_B(A^*B|^2\|A\alpha_n\|^2 - 2Re\Big(\overline{c_B(A^*B)}\langle Bx_n, A\alpha_n\rangle\Big)$$
$$= \|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2} + \|A\alpha_n\|^2\Big|c_B(A^*B) - \frac{\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle}{\|A\alpha_n\|^2}\Big|^2.$$

Soit

$$d^2(B,\mathbb{C}A) \geq \|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2} + \|A\alpha_n\|^2\Big|c_B(A^*B) - \frac{\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle}{\|A\alpha_n\|^2}\Big|^2. \tag{2.3}$$

Par passage la limite, nous obtenons

$$d^2(B,\mathbb{C}A) \geq d^2(B,\mathbb{C}A) + \lim_n \|A\alpha_n\|^2\Big|c_B(A^*B) - \frac{\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle}{\|A\alpha_n\|^2}\Big|^2.$$

L'égalité (2.2) est obtenue du fait que $\lim_n \|A\alpha_n\| \neq 0$ puisque $m(A) > 0$. □

Remarques 2.2. (i) Lemme 2.1 fournit une autre preuve de l'unicité du centre $c_B(A^*B)$ que celle de Barraa-Boumazgour [2]. En effet, quitte faire une translation on peut supposer que $c_B(A^*B) = 0$ et soit $\lambda_0 \neq 0$ un autre centre. Donc

$$\|B\| = \|B - \lambda_0 A\|. \tag{2.4}$$

Par Lemme 2.1, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de H_1 vérifiant

$$\lambda_0 = \lim_n \frac{\langle Bx_n, Ax_n\rangle}{\|A_n\|^2} \quad \text{et} \quad \|B - \lambda_0 A\|^2 = \lim_n \Big\{\|Bx_n\|^2 - \frac{|\langle Bx_n, Ax_n\rangle|^2}{\|Ax_n\|^2}\Big\}.$$

On en déduit que

$$\|B - \lambda_0 A\|^2 = \lim_n \Big\{\|Bx_n\|^2 - |\lambda_0|^2\|Ax_n\|^2\Big\}.$$

Comme $|\lambda_0| \lim_n \|Ax_n\| \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\|B - \lambda_0 A\|^2 &< \lim_n \|Bx_n\|^2 \\ &\leq \|B\|^2.\end{aligned}$$

Ce qui contredit l'égalité (2.4).
(ii) Dans [12], Stampfli a signalé qu'il n' y a pas de méthode générale pour déterminer le centre c_B d'un opérateur B. La suite $(\alpha_n)_n$ du lemme 2.1 peut donner d'autres informations sur le centre de masse.

Lemme 2.3. *On suppose que $c_B(A^*B) \neq 0$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 = \|B\|^2$,

(*ii*) $\lim_n \|B\alpha_n\| = \|B\|$ *et* $\lim_n \|A\alpha_n\| = m(A)$, *avec* $(\alpha_n)_n$ *est la suite du Lemme* 2.1.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que *(i)* est vérifiée, alors

$$\begin{aligned}\|B\|^2 &= d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 \\ &= d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A) \lim_n \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^4} \\ &\leq d^2(B, \mathbb{C}A) + \lim_n \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2} \\ &= \lim_n \|B\alpha_n\|^2.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue du fait que $m(A) \leq \lim_n \|A\alpha_n\|$. D'où $\lim_n \|B\alpha_n\| = \|B\|$.
D'autre part

$$\begin{aligned}\|B\|^2 - m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 = d^2(B, \mathbb{C}A) &= \lim_n \left\{\|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2}\right\} \\ &= \|B\|^2 - |c_B(A^*B)|^2 \lim_n \|A\alpha_n\|^2.\end{aligned}$$

Puisque $c_B(A^*B) \neq 0$, alors $\lim_n \|A\alpha_n\| = m(A)$.
Réciproquement, si $\lim_n \|B\alpha_n\| = \|B\|$ et $\lim_n \|A\alpha_n\| = m(A)$, nous avons

$$\begin{aligned}d^2(B, \mathbb{C}A) &= \lim_n \left\{\|B\alpha_n\|^2 - \frac{|\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle|^2}{\|A\alpha_n\|^2}\right\} \\ &= \|B\|^2 - m^2(A)|c_B(A^*B)|^2.\end{aligned}$$ □

Proposition 2.4. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(*i*) $m^2(A)c_B(A^*B) \in W_B(A^*B)$,
(*ii*) $d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 = \|B\|^2$.

D é m o n s t r a t i o n. Notons que la proposition est vraie si $c_B(A^*B) = 0$. Supposons que $c_B(A^*B) \neq 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si $m^2(A)c_B(A^*B) \in W_B(A^*B)$, alors il existe une suite $(y_n)_n$ d'éléments de H_1 telle que

$$m^2(A)c_B(A^*B) = \lim_n \langle A^*By_n, x_n\rangle \quad et \quad \lim_n \|By_n\| = \|B\|.$$

Nous avons par (2.3)

$$\begin{aligned} d^2(B, \mathbb{C}A) + \frac{|\langle By_n, Ay_n\rangle|^2}{\|Ay_n\|^2} &\geq \|By_n\|^2 + \|Ay_n\|^2 \Big| c_B(A^*B) - \frac{\langle B\alpha_n, Ay_n\rangle}{\|Ay_n\|^2}\Big|^2 \\ &\geq \|By_n\|^2. \end{aligned}$$

Par passage la limite, nous obtenons

$$d^2(B, \mathbb{C}A) + \frac{m^4(A)|c_B(A^*B)|^2}{\lim_n \|Ay_n\|^2} \geq \|B\|^2.$$

Comme $\lim_n \|Ay_n\| \geq m(A)$, alors

$$d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 \geq \|B\|^2.$$

Dans l'inégalité (1.1), prenons $\lambda = c_B(A^*B)$, nous obtenons

$$d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 \leq \|B\|^2.$$

Ce qui entraine que

$$d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 = \|B\|^2.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 = \|B\|^2$, alors par Lemme 2.1

$$c_B(A^*B) = \lim_n \frac{\langle B\alpha_n, A\alpha_n\rangle}{\|A\alpha_n\|^2},$$

et par Lemme 2.3

$$\lim_n \|B\alpha_n\| = \|B\| \text{ et } \lim_n \|A\alpha_n\| = m(A).$$

On en déduit que $m^2(A)c_B(A^*B) \in W_B(A^*B)$. □

Lorsque $A = I$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.5. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $c_B \in W_0(B)$,
(ii) $d^2(B, \mathbb{C}I) + |c_B|^2 = \|B\|^2$.

Théorème 2.6. *Soit λ un scalaire, alors Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $m^2(A)\lambda \in W_{B-c_B(A^*B)A+\lambda A}(A^*(B - c_B(A^*B)A + \lambda A))$,

(*ii*) $d^2(B, \mathbb{C}A) + m^2(A)|\lambda|^2 = \|B - c_B(A^*B)A + \lambda A\|^2$.

Démonstration. Posons $L = B - c_B(A^*B)A + \lambda A$, nous avons $c_L(A^*L) = \lambda$ et $d(L, \mathbb{C}A) = d(B, \mathbb{C}A)$. Il suffit d'écrire Proposition 2.4 en remplaçant B par L. $\square$

Dans la proposition suivante, si on remplace l'opérateur B par l'identité, on retrouve l'égalité Min-max trouvée par K. Paul et G. Das [11] et démontrée d'une façon plus longue que la notre.

Proposition 2.7. *Nous avons*

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sup_{x \in H_1} \|(B - \lambda A)x\|^2 = \sup_{x \in H_1} \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|(B - \lambda A)x\|^2. \tag{2.5}$$

Démonstration. Nous allons montré que les deux membres de l'égalité (2.5) sont égaux $d^2(B, \mathbb{C}A)$.

$$d^2(B, \mathbb{C}A) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|B - \lambda A\|^2 = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sup_{x \in H_1} \|(B - \lambda A)x\|^2.$$

Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$,

$$\|(B - \lambda A)x\|^2 = \|Bx\|^2 - \frac{|\langle Bx, Ax\rangle|^2}{\|Ax\|^2} + \|Ax\|^2 \left|\lambda - \frac{\langle Bx, Ax\rangle}{\|Ax\|^2}\right|^2.$$

Donc

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|(B - \lambda A)x\|^2 = \|Bx\|^2 - \frac{|\langle Bx, Ax\rangle|^2}{\|Ax\|^2}.$$

D'où

$$\sup_{x \in H_1} \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|(B - \lambda A)x\|^2 = \sup_{x \in H_1} \left\{\|Bx\|^2 - \frac{|\langle Bx, Ax\rangle|^2}{\|Ax\|^2}\right\} = d^2(B, \mathbb{C}A). \qquad \square$$

3. Nouvelles inégalités sur la norme et le rayon numérique.

Soient A et B dans $B(H)$, posons

$$w_0'(B) = \inf\left\{|z| :\ z \in W_0(B)\right\} \quad \text{et} \quad w_B'(A^*B) = \inf\left\{|z| :\ z \in W_B(A^*B)\right\}.$$

Comme

$$W_0(B) \subseteq \overline{W(B)} \text{ et } W_B(A^*B) \subseteq \overline{W(A^*B)},$$

nous avons

$$w'_0(B) \leq w(B) \text{ et } w'_B(A^*B) \leq w(A^*B).$$

Ces inégalités peuvent tre strictes. En effet, soit $B \in B(H)$ tel que $B \neq \lambda I$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit c_B le centre de B et posons $C = B - c_B I$. L'opérateur C a donc pour centre 0. On en déduit que $0 \in W_0(C)$ et par suite $w'_0(C) = 0$. Comme $C \neq 0$, alors $w(C) > 0$. Soit A un opérateur autoadjoint d'image numérique le segment $[1, 2]$ et prenons $B = I$. On a $w'_B(A^*B) = 1$ et $w(A^*B) = 2$.

Dans la suite de ce papier, nous supposons que $m(A) > 0$. Nous donnons une généralisation et amélioration de chacun des quatre théorèmes suivants .

Théorème 3.1 ([3, 5])**.** *Soit $B \in B(H)$, alors*

$$\|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}I) + w^2(B). \tag{3.1}$$

Théorème 3.2 ([4])**.** *Si $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, $r > 0$ et $B \in B(H)$ sont tels que $\|B - \lambda I\| \leq r$, alors*

$$\|B\| \leq w(B) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{|\lambda|^2}.$$

Théorème 3.3 ([6])**.** *Si A est inversible, $r > 0$ et $B \in B(H)$ sont tels que $\|B - A| \leq r$, alors*

$$\|A\|\|B\| \leq w(A^*B) + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}(\|A\|^2 - \frac{1}{\|A^{-1}\|^2}).$$

Théorème 3.4. *[5] Soit B un élément de $B(H)$, alors*

$$w^2(B) \leq \frac{1}{2}(w(B^2) + \|B\|^2). \tag{3.2}$$

Théorème 3.5. *Soit $B \in B(H)$, alors*

$$\|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}A) + 2w'_B(A^*B)|c_B(A^*B)| - m^2(A)|c_B(A^*B)|^2. \tag{3.3}$$

En particulier,

$$\|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}I) + 2w'_0|c_B| - |c_B|^2. \tag{3.4}$$

D é m o n s t r a t i o n. Par compacité, il existe $\alpha \in W_B(A^*B)$ tel que $|\alpha| = w'_B(A^*B)$. Il existe donc une suite $(x_n)_n$ d'éléments de H_1 telle que

$$\alpha = \lim_n \langle A^*Bx_n, x_n\rangle \quad \text{et} \quad \lim_n \|Bx_n\| = \|B\|.$$

$$\begin{aligned} d^2(B, \mathbb{C}A) &= \|B - c_B(A^*B)A\|^2 \geq \|(B - c_B(A^*B)A)x_n\|^2 \\ &= \|Bx_n\|^2 + |c_B(A^*B)|^2\|Ax_n\|^2 - 2Re\Big(\overline{c_B(A^*B)}\langle A^*Bx_n, x_n\rangle\Big) \\ &\geq \|Bx_n\|^2 + m^2(A)|c_B(A^*B)|^2 - 2|c_B(A^*B)||\langle A^*Bx_n, x_n\rangle)|. \end{aligned}$$

Par passage la limite, nous avons

$$\|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}A) + 2w'_B(A^*B)|c_B(A^*B)| - m^2(A)|c_B(A^*B)|^2.$$

Pour obtenir l'inégalité (3.4), il suffit de prendre $A = I$ dans l'inégalité (3.3). □

Remarque 3.6. Les inégalités (3.3) et (3.4) s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}A) + (w'_B(A^*B))^2 - (w'_B(A^*B) \\ - |c_B(A^*B)|)^2 + |c_B(A^*B)|^2(1 - m^2(A)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\|B\|^2 \leq d^2(B, \mathbb{C}I) + (w'_0(B))^2 - (w'_0(B) - |c_B|)^2. \tag{3.6}$$

Nous avons par l'inégalité (3.5) une généralisation et par l'inégalité (3.6) une amélioration de l'inégalité (3.1) trouvée par Chraïbi [3] en 2004 et d'une façon différente par Dragomir [5] en 2007.

Exemple 3.7. Exemple où $w'_0(B) \neq |c_B|$: Considérons l'opérateur normal

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

son spectre est $\sigma(B) = \{0, 1\}$. Le centre de B est le centre du plus petit disque contenant $\sigma(B)$, donc $c_B = \dfrac{1}{2}$. On vérifie que $w'_0(B) = 1$. Nous avons donc l'inégalité stricte

$$\|B\|^2 < d^2(B, \mathbb{C}I) + (w'_0(B))^2.$$

Remarque 3.8. Dans l'inégalité (1.1), prenons $\lambda = c_B(A^*B)$, et combinons l'inégalité ainsi trouvée avec l'inégalité (3.3), nous obtenons

$$m^2(A)|c_B(A^*B)| \leq w'_B(A^*B).$$

En particulier,

$$|c_B| \leq w'_0(B). \tag{3.7}$$

L'inégalité (3.7) est une amélioration de l'inégalité $|c_B| \leq w(B)$ obtenue du fait que $c_B \in \overline{W(B)}$.
En terme géométrique, $W_B(A^*B)$ est en dehors du disque ouvert centré l'origine et de rayon $|c_B(A^*B)A|m^2(A)$ et $W_0(B)$ est en dehors du disque ouvert centré l'origine et de rayon $|c_B|$.

Théorème 3.9. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $B \in B(H)$ sont tels que $\|B-\lambda A\| \leq r$, alors*

$$\|A\|\|B\| \leq |\lambda|w'_B(A^*B) + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}(\|A\|^2 - |\lambda|^2 m^2(A)).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\alpha \in W_B(A^*B)$ tel que $|\alpha| = w'_B(A^*B)$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de H_1 telle que

$$\alpha = \lim_n \langle A^*Bx_n, x_n\rangle \quad \text{et} \quad \lim_n \|Bx_n\| = \|B\|.$$

Comme $\|B - \lambda A\| \leq r$, alors $\|(B - \lambda A)x_n\|^2 \leq r^2$. Nous avons

$$\|Bx_n\|^2 + |\lambda|^2\|Ax_n\|^2 \leq r^2 + 2Re(\overline{\lambda}\langle A^*Bx_n, x_n\rangle).$$

Et par suite

$$\|Bx_n\|^2 + |\lambda|^2 m^2(A) \leq r^2 + 2|\lambda||\langle A^*Bx_n, x_n\rangle|.$$

Par passage la limite

$$\|B\|^2 + |\lambda|^2 m^2(A) \leq r^2 + 2|\lambda||w'_B(A^*B)|.$$

$$\|A\|^2 + \|B\|^2 \leq r^2 + 2|\lambda||w'_B(A^*B) + (\|A\|^2 - |\lambda|^2 m^2(A)).$$

Soit

$$\|A\|\|B\| \leq \frac{1}{2}r^2 + |\lambda|w'_B(A^*B) + \frac{1}{2}(\|A\|^2 - |\lambda|^2 m^2(A)). \qquad \square$$

Remarques 3.10. (i) Si $A = I$, $\lambda \neq 0$ et $\|B - \lambda I\| \leq r$ avec $r > 0$. Alors

$$\|B\| \leq w_0'(B) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{|\lambda|}.$$

Théorème 3.9 est donc une généralisation et amélioration du Théorème 3.2.

(ii) Théorème 3.9 généralise et améliore Théorème 3.3. En effet, Si $\lambda = 1$ et $r > 0$ tel que $\|B - A\| \leq r$, alors

$$\|A\|\|B\| \leq \frac{1}{2}r^2 + w_B'(A^*B) + \frac{1}{2}(\|A\|^2 - m^2(A)).$$

Si A *est inversible, soit* $x \in H_1$, alors

$$1 = \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax\|.$$

Et par suite

$$\frac{1}{\|Ax\|} \leq \|A^{-1}\| \ \textit{pour tout}\ x \in H_1.$$

Ce qui entraine que

$$m^2(A) \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|^2} > 0.$$

Donc

$$0 \leq \|A\|^2 - m^2(A) \leq \|A\|^2 - \frac{1}{\|A^{-1}\|^2},$$

et il est cité au début de cette section que $w_B'(A^*B) \leq w(A^*B)$.

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème 3.4.

Théorème 3.11. *Soit B un élément de $B(H)$, alors pour tout naturel $n \geq 2$*

$$w^n(B) \leq \frac{1}{2^{n-1}}w(B^n) + \sum_{p=1}^{p=n-1} \frac{1}{2^p} w^{n-p-1}(B)\|B^p\|\|B\|. \tag{3.8}$$

Démonstration. Soit $x \in H_1$, montrons par récurrence que pour tout naturel $n \geq 2$

$$|\langle Bx, x\rangle|^n \leq \frac{1}{2^{n-1}}|\langle B^n x, x\rangle| + \sum_{p=1}^{p=n-1} \frac{1}{2^p}|\langle Bx, x\rangle|^{n-1-p}\|B^p x\|\|B^* x\|. \tag{3.9}$$

Supposons qu'elle est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$. Posons $a = B^n x$ et $b = B^* x$. Nous utilisons l'inégalité suivante établie par Dragomir [8]

$$\|a\|\|b\| + |\langle a, b\rangle| \geq 2|\langle a, x\rangle\langle x, b\rangle|. \tag{3.10}$$

Nous avons

$$\|B^n x\|\|B^* x\| + |\langle B^{n+1}x, x\rangle| \geq 2|\langle B^n x, x\rangle\langle Bx, x\rangle|.$$

Par l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\|B^n x\|\|B^* x\| + |\langle B^{n+1}x, x\rangle| \\ \geq 2^n|\langle B^n x, x\rangle|^{n+1} - \sum_{p=1}^{p=n-1} 2^{n-p}|\langle Bx, x\rangle|^{n-p}\|B^p x\|\|B^* x\|.$$

$$|\langle B^{n+1}x, x\rangle| \geq 2^n|\langle B^n x, x\rangle|^{n+1} - \sum_{p=1}^{p=n} 2^{n-p}|\langle Bx, x\rangle|^{n-p}\|B^p x\|\|B^* x\|.$$

$$|\langle B^n x, x\rangle|^{n+1} \leq \frac{1}{2^n}|\langle B^{n+1}x, x\rangle| + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{2^p}|\langle Bx, x\rangle|^{n-p}\|B^p x\|\|B^* x\|.$$

Dans l'inégalité (3.10), prenons cette fois $a = Bx$ et $b = B^* x$, on vérifie que l'inégalité (3.9) est vraie pour $n = 2$ (c'est l'inégalité (3.2)), donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$. Dans (3.9) prenons le supermum sur tous les $x \in H_1$, nous avons

$$w^n(B) \leq \frac{1}{2^{n-1}}w(B^n) + \sum_{p=1}^{p=n-1} \frac{1}{2^p}w^{n-p-1}(B)\|B^p\|\|B\|. \qquad \square$$

Nous terminons ce papier par un théorème qui généralise et améliore le théorème suivant démontré par Albadawi et Shebrawi [1] en 2009.

Théorème 3.12. *Soient f et g deux fonctions non négatives, continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant*

$$f(t)g(t) = t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+.$$

Alors pour tous $A_i, B_i, X_i \in B(H)$, $(i = 1, \dots, n)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{i=n} A_i^* X_i B_i \right\|^r \leq \frac{n^{r-1}}{2} \left(\left\| \sum_{i=1}^{i=n} (A_i^* g^2(|X_i^*|) A_i)^r \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{i=n} (B_i^* f^2(|X_i|) B_i)^r \right\| \right), \tag{3.11}$$

pour tout $r \geq 1$. *Où* $|A|$ *est l'opérateur valeur absolue de* A *défini par* $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

Les deux inégalités et les deux lemmes suivants sont utiles pour le théorème qui suit.

Pour tous $a_i, b_i \geq 0$, $(i = 1, \dots, n)$ et $r \geq 1$

$$\Big(\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i \Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{i=n} b_i^2 \Big). \tag{3.12}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \Big)^r \leq n^{r-1} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^r, \tag{3.13}$$

Lemme 3.13 ([9])**.** *Soient* P *un opérateur positif dans* $B(H)$ *(i.e.,* $\langle Px, x \rangle \geq 0$ *pour tout* $x \in H$ *) et* $x \in H_1$ *, alors*

$$\langle Px, x \rangle^r \leq \langle P^r x, x \rangle, \text{ pour tout } r \geq 1. \tag{3.14}$$

Lemme 3.14 ([9])**.** *Soit* A *un opérateur dans* $B(H)$. *Soient* f *et* g *deux fonctions vérifiant les conditions du Théorème* 3.12. *Alors*

$$\Big| \langle Ax, y \rangle \Big| \leq \Big\| f(|A|) x \Big\| \Big\| g(|A^*|) y \Big\|, \text{ pour tous } x, y \in H. \tag{3.15}$$

Dans ce qui suit, f et g sont deux fonctions vérifiant les hypothèses du Théorème 3.12, n est un entier naturel tel que $n \geq 1$ et r, s sont deux réels tels que $r, s \geq 1$.

Théorème 3.15. *Soient* $A_i, B_i, X_i \in B(H)$, $(i = 1, \dots, n)$. *Alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^{i=n} A_i^* X_i B_i \right\|^2 \tag{3.16}$$

$$\leq n^{2-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} (A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i)^r \right\|^{1/r} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} (B_i^* f^2(|X_i|)B_i)^s \right\|^{1/s}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $x, y \in H_1$.

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \Big(\sum_{i=1}^{i=n} A_i^* X_i B_i\Big) x, y \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \sum_{i=1}^{i=n} X_i B_i x, A_i y \right\rangle\right|^2 \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \Big|\langle X_i B_i x, A_i y\rangle\Big|\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \Big\|f(|X_i|)B_i x\Big\|\Big\|g(|X_i^*|)A_i y\Big\|\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle f(|X_i|)B_i x, f(|X_i|)B_i x\rangle^{1/2} \langle g(|X_i^*|)A_i y, g(|X_i^*|)A_i y\rangle^{1/2}\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i y, y\rangle^{1/2} \langle B_i^* f^2(|X_i|)B_i x, x\rangle^{1/2}\Big)^2 \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i y, y\rangle\Big)\Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle B_i^* f^2(|X_i|)B_i x, x\rangle\Big) \\
&= \left(\Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i y, y\rangle\Big)^r\right)^{1/r} \left(\Big(\sum_{i=1}^{i=n} \langle B_i^* f^2(|X_i|)B_i x, x\rangle\Big)^s\right)^{1/s} \\
&\leq \Big(n^{r-1} \sum_{i=1}^{i=n} \langle A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i y, y\rangle^r\Big)^{1/r} \Big(n^{s-1} \sum_{i=1}^{i=n} \langle B_i^* f^2(|X_i|)B_i x, x\rangle^s\Big)^{1/s} \\
&\leq \left(n^{r-1} \Big\langle \sum_{i=1}^{i=n} \Big(A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i\Big)^r y, y \Big\rangle\right)^{1/r} \left(n^{s-1} \Big\langle \sum_{i=1}^{i=n} \Big(B_i^* f^2(|X_i|)B_i\Big)^s x, x \Big\rangle\right)^{1/s}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (3.16) s'obtient en prenant le supermum sur tous les $x, y \in H_1$. □

Remarques 3.16. (i) En prenant $X_i = I$ $(i = 1, \dots, n)$ dans (3.16), nous obtenons

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i^* B_i}{n} \right\|^2 \leq \left\| \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (A_i^* A_i)^r}{n} \right\|^{1/r} \left\| \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (B_i^* B_i)^s}{n} \right\|^{1/s}. \tag{3.17}$$

L'inégalité (3.17) généralise l'inégalité suivante trouvée par Dragomir [7]

$$\left\|\frac{A_1^*B_1 + A_2^*B_2}{2}\right\|^2 \leq \left\|\frac{(A_1^*A_1)^r + (A_2^*A_2)^r}{2}\right\|^{1/r} \left\|\frac{(B_1^*B_1)^s + (B_2^*B_2)^s}{2}\right\|^{1/s}.$$

(ii) Dans l'inégalité (3.16), prenons $s = r$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{i=n} A_i^* X_i B_i\right\|^r &\leq n^{r-1} \left\|\sum_{i=1}^{i=n} (A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i)^r\right\|^{1/2} \left\|\sum_{i=1}^{i=n} (B_i^* f^2(|X_i|)B_i)^r\right\|^{1/2} \\ &\leq \frac{n^{r-1}}{2}\left(\left\|\sum_{i=1}^{i=n} (A_i^* g^2(|X_i^*|)A_i)^r\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{i=n} (B_i^* f^2(|X_i|)B_i)^r\right\|\right).\end{aligned}$$

L'inégalité (3.16) est donc une généralisation et amélioration de l'inégalité (3.11).

REFERENCES

[1] H. Albadawi, K. Shebrawi. Numerical Radius and Operator Norm Inequalities. *J. Inequal. Appl.* (2009), Article ID 492154, 11 pp.

[2] M. Barraa, M. Boumazgour. A note on the orthogonality of bounded linear operators. *Funct. Anal. Approx. Comput.* **4**, *1* (2012), 65–70.

[3] M. Chraïbi Kaadoud. Géométrie du spectre dans une algèbre de Banach et domaine numérique. *Stud. Math.* **162**, *1* (2004), 1–14 (in French).

[4] S. S. Dragomir. Norm and numerical radius inequalities for a product of two linear operators in Hilbert spaces. *J. Math. Inequal.* **2**, *4* (2008), 499–510.

[5] S. S. Dragomir. Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces. *Demonstratio Math.* **40**, *2* (2007), 411–417.

[6] S. S. Dragomir. Inequalities for the norm and the numerical radius of composite operators in Hilbert spaces. Inequalities and Applications (Eds C. Bandle, L. Losonczi, A. Gilányi et al.) International Series of Numerical Mathematics, vol. **157** 2008, 135–146.

[7] S. S. Dragomir. Power inequalities for the numerical radius of a product of two operators in Hilbert spaces. *Sarajevo J. Math.* **5(18)**, *2* (2009), 269–278.

[8] S. S. Dragomir. Some refinements of Schwarz inequality. Simposional de Matematică şi Aplicaţii, Polytechnical Institute Timişoara, Romania, 1–2 Nov 1985, 13–16.

[9] F. Kittaneh. Notes on some inequalities for Hilbert space operators. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **24**, 2 (1988), 283–293.

[10] B. Magajna. On the distance to finite dimentional subspaces in operator algebras. *J. London. Math. Soc., II Ser.* **47**, *3* (1993), 516–532.

[11] K. Paul, G. Das. Cosine of angle and center of mass of an operator. *Math. Slovaca* **62**, *1* (2012), 109–122.

[12] J. G. Stampfli. The norm of derivation. *Pac. J. Math.* **33** (1970), 737–747.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Université Cadi Ayyad
B.P.2390, Marrakech, Maroc
e-mail: `bagabd66@gmail.com` *(Abderrahim Baghdad)*
e-mail: `chraibik@uca.ac.ma` *(Mohamed Chraïbi Kaadoud)*
e-mail: `loumi@uca.ac.ma` *(Moulay Taieb Loumi)*

Received October 10, 2015