Serdica

Mathematical Journal

Сердика

Математическо списание

Serdica Math. J. **43** (2017), 267–292

Serdica
Mathematical Journal

Bulgarian Academy of Sciences
Institute of Mathematics and Informatics

CARACTÉRISATION D'UNE CLASSE DE CONVERGENCES DE FONCTIONS CONVEXES ET APPLICATION À LA t-ÉPI/HYPO-CONVERGENCE DE FONCTIONS CONVEXES-CONCAVES

K. El Hajioui, D. Mentagui

Communicated by R. Lucchetti

Dedicated to the memory of J-J. Moreau the father of convex analysis and to the pioneers of variational convergences: Painlevé-Kuratowski, R. Wijsman, U. Mosco, J. L. Joly, G. Beer, E. de Giorgi and many others ...

Abstract. This paper focuses on a new characterization of a class of variational convergences which play a crucial role in optimization and variational analysis. When the functions under consideration are in $\Gamma(X)$ or $\Gamma(X^*)$ where X is a normed linear space, this characterization is given in terms of infimal-convolution approximates associated to general kernels. When we are concerned by bivariate convex-concave saddle functions, a new convergence called t-epi/hypo-convergence is introduced and characterized first in terms of generalized augmented Lagrangians and then in terms of generalized inf-sup-convolution approximates associated to specified schemes of Legendre-Fenchel partial transforms. The proofs and results considered in this paper are original and displayed within the framework of variational analysis and the duality theory.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 49J45, 49J52, 49J40, 47N10.

Key words: Fonction convexe (convexe-concave), convergences variationnelles, t-convergence, t-épi/hypo-convergence, référentiel, approximation inf (inf–sup)-convolutive, Lagrangien augmenté, convergence simple, convergence uniforme sur les bornés.

1. Introduction. La théorie des convergences variationnelles joue un rôle important dans l'étude et l'approximation des problèmes variationnels [1, 7, 33, 34, 36, 37]. Cette théorie a pris un bel essor depuis l'introduction de la notion d'épi-convergence par R. A. Wijsman en analyse non linéaire [45, 46] suite à ses travaux en théorie de la décision statistique. L'épi-convergence de fonctions permet la convergence des solutions approchées d'une suite de problèmes d'optimisation non nécessairement convexes vers une solution du problème limite sous-réserve de la compacité relative des solutions approchées [1]. Les convergences variationnelles ont connu une large application dans diverses branches de l'optimisation : stochastique, théorique, paramétrique, notamment en mécanique et en homogénéisation [1, 7]. A partir de l'année 1967, ces convergences ont été intensivement étudiées dans un cadre topologique et convexe [1, 4, 6, 15, 28, 33, 36, 37]. L'hypothèse de convexité a permis d'aboutir à des résultats fondamentaux dans le cadre de la dualité notamment la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel [1, 3, 7, 11, 12, 15]. Ensuite, la notion d'épi-convergence dont la topologie associée est moins fine que toutes les topologies associées aux autres convergences variationnelles existantes dans la littérature [1, 6, 15, 22, 35, 43], a été généralisée aux fonctions à deux variables convexes-concaves d'abord sous le nom d'épi/hypo-convergence en dimension finie puis sous le nom de Mosco épi/hypo-convergence dans les espaces réflexifs [1, 3, 7]. L'objectif de cet article est de donner une nouvelle caractérisation d'une large classe de convergences variationnelles dans les espaces vectoriels normés généraux. Nous introduisons notamment une nouvelle convergence appelée t-épi/hypo-convergence où t appartient à une famille de topologies. Dans le cas où les fonctions sont définies sur un espace vectoriel normé X, cette caractérisation est donnée en termes d'approximations inf-convolutives de paramètres assez petits et associées à des référentiels généraux. Un aspect équivalent de ces caractérisations est aussi considéré dans le dual topologique X^* de X. Comme conséquence de cette étude, nous donnons une nouvelle caractérisation de la notion de t-épi/hypo-convergence de suites de fonctions convexes-concaves en termes de Lagrangiens augmentés généralisés d'indices assez petits et associés aux transformées partielles de Legendre-Fenchel des composantes convexes des fonctions convexes-concaves initiales. Finalement, nous caractérisons la t-épi/hypo-convergence en termes d'approximations inf-sup-convolutives généralisées de paramètres assez petits et associées à ces mêmes transformées partielles de Legendre-Fenchel. Les démonstrations et les résultats de cet article sont originaux et s'insèrent dans le cadre de l'analyse convexe et fonctionnelle, l'optmisation non linéaire, la théorie de la dualité et la théorie du point selle et des fonctions selles.

2. Convergences de fonctions convexes. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé d'origine θ et de boule unité fermée U. Son dual topologique $(X^*, \|\cdot\|_*)$ est d'origine θ^* et de boule unité fermée U^*. Les topologies faibles $\sigma(X, X^*)$ et $\sigma(X^*, X)$ sont notées respectivement w et w^*. $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(X^*)$ désignent respectivement l'ensemble des parties non vides convexes $\|\cdot\|$-fermées de X et celui des parties non vides convexes w^*-fermées de X^*. Pour A, B deux sous-ensembles non vides $\|\cdot\|$-fermés de X et $\rho > 0$ on note:
$A^{++} := \{C \in \mathcal{C}(X)\ /\ \exists\, \varepsilon > 0 : C + \varepsilon U \subset A\}$; $A^{-} := \{C \in \mathcal{C}(X)\ /\ C \cap A \neq \emptyset\}$; $e(A, B) := \sup\{d(a, B),\ a \in A\}$ avec $d(a, B) := \inf\{\|a - b\|,\ b \in B\}$, $e(\emptyset, B) = 0$ et $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$; $A_\rho := A \cap \rho U$; $e_\rho(A, B) := e(A_\rho, B)$; $H_\rho(A, B) := \mathrm{Max}\{e_\rho(A, B), e_\rho(B, A)\}$.

Sur $\mathcal{C}(X)$ on considère les topologies suivantes [1, 2, 12, 37, 43]:

τ_V^- ayant pour sous-base tous les ensembles de la forme V^- où V est un $\|\cdot\|$-ouvert de X;

τ_S^+ ayant pour sous-base tous les ensembles de la forme $(B^c)^{++}$ où B est une partie non vide convexe $\|\cdot\|$-fermée bornée de X;

τ_{AW}^- ayant pour base de voisinages d'un $C \in \mathcal{C}(X)$ tous les ensembles de la forme $U_{\rho,\varepsilon}^-(C) := \{D \in \mathcal{C}(X)\ /\ e_\rho(C, D) < \varepsilon\}$, $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$;

τ_{AW}^+ ayant pour base de voisinages d'un $C \in \mathcal{C}(X)$ tous les ensembles de la forme $U_{\rho,\varepsilon}^+(C) := \{D \in \mathcal{C}(X)\ /\ e_\rho(D, C) < \varepsilon\}$, $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$.

Si, dans la définition de τ_S^+, la condition "B non vide convexe $\|\cdot\|$-fermée bornée" est remplacée par "B non vide convexe w-compacte" on retrouve τ_M^+ [12], et si elle est remplacée par "B non vide convexe $\|\cdot\|$-compacte" on retrouve τ_e^+ [1, 12, 14]. En outre, il est facile de voir que $\tau_V^- \subset \tau_{AW}^-$, $\tau_e^+ \subset \tau_M^+ \subset \tau_S^+ \subset \tau_{AW}^+$ et que ces inclusions sont strictes [1, 12, 43]. En suivant les mêmes constructions que dans [2, 32], nous introduisons la définition suivante:

Définition 2.1. *Sur $\mathcal{C}(X)$ on définit les topologies suivantes:*
$\tau_S := \tau_V^- \vee \tau_S^+$; $\quad \tau_{AW} := \tau_{AW}^- \vee \tau_{AW}^+$; $\quad \tau_{i1} := \tau_{AW}^- \vee \tau_S^+$; $\quad \tau_{i2} := \tau_V^- \vee \tau_{AW}^+$.
Le sup $(\vee)$ étant pris dans l'espace des topologies définies sur $\mathcal{C}(X)$.

τ_S est la slice topologie et τ_{AW} est l'Attouch-Wets topologie étudiées intensivement dans [1, 2, 6, 7, 8, 11, 12, 17, 18, 19, 27, 33, 35]; τ_{i1} et τ_{i2} sont deux topologies incomparables et intermédiaires entre τ_S et τ_{AW} et ont été étudiées dans [2, 32, 43]. Si on remplace τ_S^+ par τ_M^+ dans les définitions de τ_S et τ_{i1} respectivement on retrouve la Mosco topologie $\tau_M := \tau_V^- \vee \tau_M^+$ et la topologie

$\tau_{AW}^- \vee \tau_M^+$ [1, 2, 12, 14, 16, 32]; et si on remplace τ_M^+ par τ_e^+ dans la définition de τ_M on retrouve la $\|\cdot\|$-épi-topologie τ_e [1, 2, 43]. Il est aussi facile de vérifier que $\tau_e \subset \tau_M \subset \tau_S \subset \tau_{i1} \subset \tau_{AW}$, $\tau_S \subset \tau_{i2} \subset \tau_{AW}$ et que ces inclusions sont strictes. En outre, $\tau_S = \tau_M$ et $\tau_{i1} = \tau_{AW}^- \vee \tau_M^+$ si et seulement si X est un espace de Banach réflexif [12, 32]. En dimension finie, toutes ces topologies coincident et se réduisent à τ_e [1, 6, 12, 43]. Sur $\mathcal{C}(X^*)$, les topologie précédentes sont définies et notées de la même façon en prenant comme τ_S^+ la topologie qui a pour sous-base tous les ensembles de la forme $(B^c)^{++}$ où B est une partie non vide convexe w^*-fermée et $\|\cdot\|_*$-bornée (non vide convexe w^*-compacte) de X^* [12]. En particulier, la slice topologie duale notée dans la littérature par τ_S^* est notée dans ce papier par τ_S et ceci par souci de commodité et de simplification. Notons aussi que ces topologies ne changent pas lorsqu'on munit l'espace d'une norme équivalente et qu'elles sont définies de manière identique dans le cas non convexe [43]. Maintenant à chaque fonction $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ on associe son domaine effectif $\operatorname{Dom} f := \{x \in X \ / \ f(x) < +\infty\}$, son épigraphe $\operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times]-\infty, +\infty[\ / \ f(x) \leq \alpha\}$ et sa transformée de Legendre-Fenchel f^* définie pour tout $y \in X^*$ par $f^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle - f(x), x \in \operatorname{Dom} f\}$. f est dite propre si $f > -\infty$ et $\operatorname{Dom} f \neq \emptyset$. $\Gamma(X)$ et $\Gamma(X^*)$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement ($\|\cdot\|$-sci) sur X et celui des fonctions propres convexes w^*-sci sur X^*. Pour l'intérêt des ensembles convexes et fonctions convexes on peut consulter [25, 38, 39]. Par identification de chaque fonction avec son épigraphe, les topologies précédentes sont définies sur $\Gamma(X)$ et $\Gamma(X^*)$ identifiés à $\mathcal{C}(X \times]-\infty, +\infty[)$ et $\mathcal{C}(X^* \times]-\infty, +\infty[)$ respectivement. Notons ici que la slice topologie sur $\Gamma(X)$ n'est autre que la Joly topologie τ_J considérée dans [9, 30] et définie comme étant la moins fine topologie sur $\Gamma(X)$ rendant sci les multifonctions $f \mapsto \operatorname{epi} f$ et $f \mapsto \operatorname{epi} f^*$, voir [15, Théorème 8.2.2]. Pour plus de précisions sur les diverses caractérisations de la Joly topologie et les études qui lui sont associées le lecteur pourra consulter [9, 15, 30, 31].

Dans toute la suite, f, f^n, $n \geq 1$ sont des fonctions de $\Gamma(X)$.

Définition 2.2. *On dit que $(f^n)_n$ converge vers f pour une des topologies précédentes définies sur $\Gamma(X)$ si et seulement si la suite asociée des épigraphes $(\operatorname{epi} f^n)_n$ converge vers l'épigraphe $\operatorname{epi} f$ pour la même topologie définie sur $\mathcal{C}(X \times]-\infty, +\infty[)$.*

Plus précisément, nous rappelons les définitions caractéristiques suivantes [1, 2, 6, 12, 24, 32, 36, 37, 43]:

(1) $(f^n)_n$ est $\|\cdot\|$-épi-convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{e} f$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\forall\, x \in X,\ \forall\, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ f(x) \leq \underline{\mathrm{Lim}}\, f^n(x_n)\,;$

(ii) $\forall\, x \in X,\ \exists\, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ f^n(x_n) \longrightarrow f(x)\,.$

$(f^n)_n$ est Mosco convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{M} f$, si et seulement si elle est à la fois $\|\cdot\|$-épi-convergente et w-séquentiellement épi-convergente vers f.

(2) $(f^n)_n$ est slice convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\forall\, x \in X,\ \exists\, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ f^n(x_n) \longrightarrow f(x)\,;$

(ii) $\forall\, x^* \in X^*,\ \exists\, x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x^*,\ f^{n*}(x_n^*) \longrightarrow f^*(x^*).$

(3) $(f^n)_n$ est τ_{i1}-convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\forall\, \rho > 0,\ e_\rho(f, f^n) := e_\rho(\mathrm{epi}\, f, \mathrm{epi}\, f^n) \longrightarrow 0;$

(ii) $\forall\, x^* \in X^*,\ \exists\, x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|_*} x^*,\ f^{n*}(x_n^*) \longrightarrow f^*(x^*).$

(4) $(f^n)_n$ est τ_{i2}-convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f$, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $\forall\, x \in X,\ \exists\, x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x,\ f^n(x_n) \longrightarrow f(x)\,;$

(ii) $\forall\, \rho > 0,\ e_\rho(f^n, f) := e_\rho(\mathrm{epi}\, f^n, \mathrm{epi}\, f) \longrightarrow 0.$

(5) $(f^n)_n$ est Attouch-Wets convergente vers f, noté $f^n \xrightarrow{AW} f$, si et seulement si $H_\rho(f^n, f) := \mathrm{Max}\{e_\rho(f, f^n)\ ,\ e_\rho(f^n, f)\} \longrightarrow 0$, $\forall\, \rho > 0$.

(6) $(f^n)_n$ converge uniformément sur les bornés de X vers f, ce qu'on note $f^n \xrightarrow{UB} f$, si et seulement si $\mathrm{Dom}\, f^n = \mathrm{Dom}\, f$ pour tout n assez grand et pour tout $\rho > 0$ tel que $\mathrm{Dom}\, f \cap \rho U \neq \emptyset$ nous avons $\sup\{|f^n(x) - f(x)|\ /\ x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \rho U\} \longrightarrow 0$.

(7) $(f^n)_n$ converge simplement vers f, noté $f^n \longrightarrow f$, si et seulement si pour tout $x \in X$, $f^n(x) \longrightarrow f(x)$.

Pour plus de détails sur les convergences précédentes et leurs diverses caractérisations et applications, le lecteur pourra consulter [1, 2, 6, 12, 15, 19, 20, 28, 30, 32, 35, 43]. Il est aussi important de rappeler à ce niveau la propriété fondamentale de la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel pour ces convergences. Plus précisément nous avons:

Théorème 2.3 ([2, 11, 12, 32]). *Les équivalences suivantes sont vérifiées:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_S} f \Longleftrightarrow f^{n*} \xrightarrow{\tau_S} f^*$;

(ii) $f^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f \Longleftrightarrow f^{n*} \xrightarrow{\tau_{i2}} f^*$;

(iii) $f^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f \Longleftrightarrow f^{n*} \xrightarrow{\tau_{i1}} f^*$;

(iv) $f^n \xrightarrow{AW} f \Longleftrightarrow f^{n*} \xrightarrow{AW} f^*$.

La convergence simple est en général incomparable avec les convergences variationnelles précédentes, pourtant elle devient comparable avec certaines d'entre elles si certaines conditions sont satisfaites [1, 10, 12, 14, 23, 42]. La convergence uniforme sur les bornés est strictement plus fine que l'Attouch-Wets convergence et donc strictement plus fine que toutes les autres convergences considérées précédement dans ce papier [14, 43].

3. Approximations inf-convolutives généralisées. Dans cette section, nous caractérisons les convergences variationnelles des suites de fonctions de $\Gamma(X)$, relativement aux topologies introduites dans la définition 2.1, en termes de convergences des suites associées des approximations inf-convolutives de paramètres assez petits associées à des référentiels quelconques positifs bornés sur les bornés. Nous complétons ainsi notre étude effectuée dans [35]. Rappelons tous d'abord la définition suivante:

Définition 3.1 ([29]). **(1)** *On appelle référentiel sur X toute fonction $\Phi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ convexe paire continue et nulle en zéro et cœrcive, ie. $\Phi(x) \geq A\|x\| - B$ pour tout $x \in X$, où $A > 0$ est la constante de cœrcivité de Φ et $B \geq 0$. Le référentiel Φ est dit fortement cœrcif si de plus $\dfrac{\Phi(x)}{\|x\|} \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$.*

(2) *On appelle approximation inf-convolutive de f de paramètre $\lambda > 0$ associée au référentiel Φ la fonction convexe f_λ définie pour tout $x \in X$ par*

$$f_\lambda(x) := f\nabla\Phi_\lambda(x) := \inf_{u\in X}\{f(u) + \Phi_\lambda(x-u)\} \text{ avec } \Phi_\lambda := \Phi\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right).$$

En utilisant la cœrcivité de Φ, il est facile de vérifier que $f_\lambda > -\infty$ pour tout λ tel que $\dfrac{A}{\lambda} > d\left(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*\right)$. Si de plus Φ est finie et majorée sur les bornés alors f_λ l'est aussi, et donc f_λ est finie continue en tout point. En outre, les f_λ forment quand $\lambda \downarrow 0$ une famille croissante vers f. Pour plus d'informations sur les études faites sur différents types de référentiels et méthodes de régularisations le lecteur pourra consulter [1, 6, 7, 14, 21, 26, 29, 35, 44].

Dorénavant, $\Phi : X \longrightarrow [0, +\infty[$ et $\Psi : X^* \longrightarrow [0, +\infty[$ désigneront deux référentiels positifs bornés sur les bornés et supposés de même constante de cœrcivité $A > 0$.

Le théorème qui suit regroupe les résultats des théorèmes 3.5 et 3.10 de [35] qui caractérisent la slice convergence.

Théorème 3.2 ([35])**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$;

(ii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*\right)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_S} f_\lambda$;

(iii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > \mathrm{Max}\left\{d\left(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*\right),\ d\left(\theta, \mathrm{Dom}\, f\right)\right\}$, $f^n_\lambda \longrightarrow f_\lambda$ *et* $f^{n*}_\lambda := f^{n*} \nabla \Psi_\lambda \longrightarrow f^*_\lambda := f^* \nabla \Psi_\lambda$.

Si Φ^* *est de classe* C^1 *alors ces propositions sont équivalentes à*

(iv) $\exists\, \lambda'_0 > 0$ *tel que* $\dfrac{A}{\lambda'_0} > d\left(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*\right)$ *et* $f^n_{\lambda'_0} \xrightarrow{\tau_S} f_{\lambda'_0}$.

Si X est un espace de Banach réflexif nous déduisons un théorème analogue relativement à la Mosco convergence [12].

Moyennant [12, Théorème 3.5 et Théorème 4.1], il est facile de voir qu'avec de légères modifications au niveau de la démonstration du théorème 3.5 de [35], nous obtenons la version duale suivante:

Théorème 3.3. *Si* h, h^n, $n \geq 1$ *sont des fonctions de* $\Gamma\left(X^*\right)$ *et si de plus le référentiel* Ψ *est une fonction de* $\Gamma\left(X^*\right)$ *alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $h^n \xrightarrow{\tau_S} h$;

(ii) $h^n_\lambda := h^n \nabla \Psi_\lambda \xrightarrow{\tau_S} h_\lambda := h \nabla \Psi_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta, \mathrm{Dom}\, h^*\right)$.

En se basant sur la caractérisation de la slice convergence (théorème 3.2), l'aspect quantitatif des pseudo-distances e_ρ, $\rho > 0$ et la bicontinuité de la transformation de Legendre-Fenchel (théorème 2.3), nous caractérisons dans la suite la τ_{i1}-convergence et puis la τ_{i2}-convergence.

Théorème 3.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f$;

(ii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\,(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f_\lambda$;

(iii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > \mathrm{Max}\,\{d\,(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)\,,\ d\,(\theta, \mathrm{Dom}\, f)\}$, $f_\lambda^n \longrightarrow f_\lambda$, $f_\lambda^{n*} := f^{n*} \nabla \Psi_\lambda \longrightarrow f_\lambda^* := f^* \nabla \Psi_\lambda$ *et* $e_\rho\,(f_\lambda, f_\lambda^n) \longrightarrow 0$ *pour tout* $\rho \geq \rho_0 > 0$.

Si Φ^* *est Lipschitzienne sur les bornés alors ces propositions sont équivalentes à*

(iv) $\exists\, \lambda_0' > 0$ *tel que* $\dfrac{A}{\lambda_0'} > d\,(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$ *et* $f_{\lambda_0'}^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f_{\lambda_0'}$.

Preuve. **(i)$\Longrightarrow$(ii):** Soit $\lambda \in]0, \lambda_0]$ fixé. Par τ_{i1}-convergence, $\dfrac{A}{\lambda} > d\,(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^{n*})$ à partir d'un certain rang n_0 et donc $\{f_\lambda, f_\lambda^n, n \geq n_0\} \subset \Gamma\,(X)$; de plus nous avons $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_S} f_\lambda$ d'après le théorème 3.2 car $\tau_S \subset \tau_{i1}$. Maintenant, d'après (i) et le théorème 2.3 on a $f^{n*} \xrightarrow{\tau_{i2}} f^*$. Ainsi $f^{n*} + (\Phi_\lambda)^* \xrightarrow{\tau_{i2}} f^* + (\Phi_\lambda)^*$ en vertu de [32, Corollaire 4.8] puisque $(\Phi_\lambda)^*$ est finie continue en un point de $\mathrm{Dom}\, f^*$. En effet, par cœrcivité de Φ nous avons $(\Phi_\lambda)^* \leq B$ sur $\dfrac{A}{\lambda} U^*$ et donc $\mathrm{Dom}\, f^* \cap int\,(\mathrm{Dom}\,(\Phi_\lambda)^*) \neq \emptyset$. Par suite,

$$(f_\lambda^n)^* := (f^n \nabla \Phi_\lambda)^* = f^{n*} + (\Phi_\lambda)^* \xrightarrow{\tau_{i2}} f^* + (\Phi_\lambda)^* = (f \nabla \Phi_\lambda)^* =: (f_\lambda)^*\,.$$

Le théorème 2.3 et le fait que λ est arbitraire montrent que $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f_\lambda$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Soit $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Si $f_\lambda^n\,(z_n) = -\infty$ pour une sous-suite alors les f_λ^n sont identiquement égales à $-\infty$ car f_λ^n est convexe majorée sur les bornés pour tout n. Par suite $f_\lambda \equiv -\infty$ car $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f_\lambda$, ce qui est absurde. D'où, f_λ, f_λ^n, $n \geq$ à un certain n_0 sont dans $\Gamma\,(X)$. Comme $\tau_S \subset \tau_{i1}$ alors le théorème 3.2 montre que $f_\lambda^n \longrightarrow f_\lambda$ et $f_\lambda^{n*} \longrightarrow f_\lambda^*$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Le reste découle de (ii) et de la définition de τ_{i1}.

(iii)⟹(i): D'après (iii) et le théorème 3.2 nous avons, $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$, les f_λ, f_λ^n, $n \geq$ un certain n_0 sont dans $\Gamma(X)$ et $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_S} f_\lambda$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Pour conclure il suffit de montrer que $e_\rho(f, f^n) \longrightarrow 0$ pour tout $\rho \geq \rho_0 > 0$. Les fonctions f_{λ_0}, $f_{\lambda_0}^n$, $n \geq n_0$ sont uniformément minorées par une même fonction $-\alpha_0(\|\cdot\| + 1)$ pour un certain $\alpha_0 > 0$ d'après [13] car f_{λ_0}, $f_{\lambda_0}^n$, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$ et $f_{\lambda_0}^n \xrightarrow{e} f_{\lambda_0}$ puisque $\tau_e \subset \tau_S$. Il en est alors de même pour les fonctions f, f^n, f_λ, f_λ^n pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Soient $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ et $\rho_0 > 0$ tels que $f(x_0) < \rho_0$ et $\|x_0\| < \rho_0$. Du fait que $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$, il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $f^n(x_n) < \rho_0$ et $\|x_n\| < \rho_0$ pour tout n assez grand. Il en résulte que

$$\inf_{\|x\| \leq \rho_0} f_\lambda(x) \leq \inf_{\|x\| \leq \rho_0} f(x) < \rho_0 \; et \; \inf_{\|x\| \leq \rho_0} f_\lambda^n(x) \leq \inf_{\|x\| \leq \rho_0} f^n(x) < \rho_0$$

pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$ et tout n assez grand. Ainsi pour tout $\rho \geq \rho_0$ nous avons

$$\rho \geq \operatorname{Max}\left\{\inf_{\|x\| \leq \rho} f(x), \inf_{\|x\| \leq \rho} f^n(x), \inf_{\|x\| \leq \rho} f_\lambda(x), \inf_{\|x\| \leq \rho} f_\lambda^n(x)\right\}$$

et donc d'après la démonstration de la proposition 1.2 de [6] on déduit que

$$e_\rho(f, f^n) \leq e_{9\rho}(f, f_\lambda) + e_{9\rho}(f_\lambda, f_\lambda^n) + e_{9\rho}(f_\lambda^n, f^n)$$

pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$ et tout n assez grand. Soient maintenant $\rho \geq \rho_0$, $\varepsilon > 0$ et choisissons $\lambda_1 \in]0, \lambda_0]$ tel que

$$\frac{A}{\lambda_1} > \operatorname{Max}\left\{d(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*), \; d(\theta, \operatorname{Dom} f), \; \frac{18\rho + 18\rho\alpha_0 + 2B + 2\alpha_0}{\varepsilon} + \alpha_0\right\}.$$

D'après (iii) nous avons $e_{9\rho}\left(f_{\lambda_1}, f_{\lambda_1}^n\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout n assez grand. Du fait que $f_{\lambda_1} \leq f$ alors nous avons $\operatorname{epi} f \subset \operatorname{epi} f_{\lambda_1}$ et par suite $e_{9\rho}(f, f_{\lambda_1}) = 0$. En outre nous avons $e_{9\rho}\left(f_{\lambda_1}^n, f^n\right) \leq \lambda_1 \dfrac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{A - \lambda_1\alpha_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout n assez grand. En effet: soit $(x_n, \alpha_n) \in \left(\operatorname{epi} f_{\lambda_1}^n\right)_{9\rho}$; par définition de $f_{\lambda_1}^n$ pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe $u_n \in X$ tel que $f^n(u_n) + \Phi_{\lambda_1}(x_n - u_n) < \alpha_n + \varepsilon'$; ainsi d'une part $\left(u_n, \alpha_n + \varepsilon'\right) \in \operatorname{epi} f^n$ car $\Phi_{\lambda_1} \geqslant 0$ et donc $d((x_n, \alpha_n), \operatorname{epi} f^n) \leqslant \|x_n - u_n\| + \varepsilon'$, et d'autre part puisque $f^n \geq -\alpha_0(\|\cdot\| + 1)$ et $\Phi_{\lambda_1} \geqslant \dfrac{A}{\lambda_1}\|\cdot\| - B$ alors $-\alpha_0\|u_n\| - \alpha_0 + \dfrac{A}{\lambda_1}\|x_n - u_n\| - B < \alpha_n + \varepsilon' \leqslant 9\rho + \varepsilon'$ et par suite $\|x_n - u_n\| < \lambda_1 \dfrac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0 + \varepsilon'}{A - \lambda_1\alpha_0}$ car $\dfrac{A}{\lambda_1} > \alpha_0$; le résultat se déduit alors en faisant tendre ε' vers 0 et moyennant le choix de λ_1. Nous déduisons finalement que $e_\rho(f, f^n) \leq 0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pour tout n assez grand et donc $f^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f$ puisque on a déjà $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$. Finalement, si de plus Φ^* est Lipschitzienne sur les bornés alors (i) est équivalente à (iv) d'après [32, Théorème 6.11]. Ce qui achève la preuve. □

Si X est un espace de Banach réflexif, nous déduisons un théorème analogue relativement à la $\tau_{AW}^- \vee \tau_M^+$-convergence [12, 32].

Avec certaines modifications nécessaires au niveau de la démonstration du théorème 3.4, nous obtenons le théorème ci-dessous qui caractérise la τ_{i2}-convergence.

Théorème 3.5. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f$;

(ii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\frac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$, $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f_\lambda$;

(iii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\frac{A}{\lambda_0} > \mathrm{Max}\,\{d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*),\ d(\theta, \mathrm{Dom}\, f)\}$, $f_\lambda^n \longrightarrow f_\lambda$, $f_\lambda^{n*} := f^{n*} \nabla \Psi_\lambda \longrightarrow f_\lambda^* := f^* \nabla \Psi_\lambda$ *et* $e_\rho(f_\lambda^n, f_\lambda) \longrightarrow 0$ *pour tout* $\rho \geq \rho_0 > 0$.

Si Φ^* *est Lipschitzienne sur les bornés alors ces propositions sont équivalentes à*

(iv) $\exists\, \lambda_0' > 0$ *tel que* $\frac{A}{\lambda_0'} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^*)$ *et* $f_{\lambda_0'}^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f_{\lambda_0'}$.

Preuve. **(i)⟹(ii):** Soit $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Par τ_{i2}-convergence, $\frac{A}{\lambda} > d(\theta^*, \mathrm{Dom}\, f^{n*})$ à partir d'un certain rang n_0 et donc $\{f_\lambda, f_\lambda^n, n \geq n_0\} \subset \Gamma(X)$. D'après (i) et le théorème 2.3, $f^{n*} \xrightarrow{\tau_{i1}} f^*$. Ainsi $f^{n*} + (\Phi_\lambda)^* \xrightarrow{\tau_{i1}} f^* + (\Phi_\lambda)^*$ en vertu de [32, Théorème 4.5] puisque $(\Phi_\lambda)^*$ est finie continue en un point de $\mathrm{Dom}\, f^*$. D'où, $(f_\lambda^n)^* \xrightarrow{\tau_{i1}} (f_\lambda)^*$ et donc $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f_\lambda$ d'après une seconde application du théorème 2.3.

(ii)⟹(iii): Soit $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Par un raisonnement déjà utilisé, f_λ, f_λ^n, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$. Le théorème 3.2 implique alors que $f_\lambda^n \longrightarrow f_\lambda$ et $f_\lambda^{n*} \longrightarrow f_\lambda^*$ car $\tau_S \subset \tau_{i2}$. Le reste découle de (ii) et de la définition de τ_{i2}.

(iii)⟹(i): D'après le théorème 3.2 nous avons, $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$, f_λ, f_λ^n, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$ et $f_\lambda^n \xrightarrow{\tau_S} f_\lambda$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Comme dans la démonstration du théorème 3.4 on déduit que les fonctions f, f^n, f_λ, f_λ^n, $n \geq$ à certain rang sont uniformément minorées par une même fonction $-\alpha_0(\|\cdot\|+1)$ pour tout $\lambda \in]0,\lambda_0]$ avec $\alpha_0 > 0$; et que pour tout $\rho \geq$ à un certain $\rho_0 > 0$ on a

$$\rho \geq \text{Max}\left\{\inf_{\|x\|\leq\rho} f(x),\ \inf_{\|x\|\leq\rho} f^n(x),\ \inf_{\|x\|\leq\rho} f_\lambda(x),\ \inf_{\|x\|\leq\rho} f_\lambda^n(x)\right\}.$$

Par suite d'après [6], pour tout $\lambda \in]0,\lambda_0]$ et tout n assez grand on a

$$e_\rho(f^n, f) \leq e_{9\rho}(f^n, f_\lambda^n) + e_{9\rho}(f_\lambda^n, f_\lambda) + e_{9\rho}(f_\lambda, f),\ \forall \rho \geq \rho_0.$$

Soient maintenant $\rho \geq \rho_0$, $\varepsilon > 0$ et choisissons $\lambda_1 \in]0,\lambda_0]$ tel que

$$\frac{A}{\lambda_1} > \text{Max}\left\{d(\theta^*, \text{Dom}\, f^*),\ d(\theta, \text{Dom}\, f),\ \frac{18\rho + 18\rho\alpha_0 + 2B + 2\alpha_0}{\varepsilon} + \alpha_0\right\}.$$

D'après (iii) nous avons $e_{9\rho}\left(f_{\lambda_1}^n, f_{\lambda_1}\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout n assez grand. Du fait que $f_{\lambda_1}^n \leq f^n$ alors nous avons $\text{epi}\, f^n \subset \text{epi}\, f_{\lambda_1}^n$ et par suite $e_{9\rho}\left(f^n, f_{\lambda_1}^n\right) = 0$. En outre nous avons $e_{9\rho}(f_{\lambda_1}, f) \leq \lambda_1 \dfrac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0}{A - \lambda_1\alpha_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout n assez grand. En effet: soit $(x,\alpha) \in (\text{epi}\, f_{\lambda_1})_{9\rho}$; par définition de f_{λ_1} pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe $u \in X$ tel que $f(u) + \Phi_{\lambda_1}(x-u) < \alpha + \varepsilon'$; ainsi d'une part $\left(u, \alpha + \varepsilon'\right) \in \text{epi}\, f$ car $\Phi_{\lambda_1} \geqslant 0$ et donc $d((x,\alpha), \text{epi}\, f) \leqslant \|x-u\| + \varepsilon'$, et d'autre part puisque $f \geq -\alpha_0(\|\cdot\|+1)$ et $\Phi_{\lambda_1} \geqslant \dfrac{A}{\lambda_1}\|\cdot\| - B$ alors $-\alpha_0\|u\| - \alpha_0 + \dfrac{A}{\lambda_1}\|x-u\| - B < \alpha + \varepsilon' \leqslant 9\rho + \varepsilon'$ et par suite $\|x-u\| < \lambda_1 \dfrac{9\rho + 9\rho\alpha_0 + B + \alpha_0 + \varepsilon'}{A - \lambda_1\alpha_0}$ car $\dfrac{A}{\lambda_1} > \alpha_0$; le résultat se déduit alors en faisant tendre ε' vers 0 et moyennant le choix de λ_1. Nous déduisons finalement que $e_\rho(f^n, f) \leq 0 + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pour tout n assez grand et donc $f^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f$ puisque on a déjà $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$. Si de plus Φ^* est Lipschitzienne sur les bornés alors (iv) implique (i) d'après [2]. □

Comme conséquence des théorèmes 3.4 et 3.5, nous retrouvons ci-après le théorème 4.2 de [35] caractérisant l'Attouch-Wets convergence:

Théorème 3.6. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{AW} f$;

(ii) $\forall\, \lambda \in]0,\lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \text{Dom}\, f^*)$, $f_\lambda^n \xrightarrow{AW} f_\lambda$;

(iii) $\forall\, \lambda \in]0,\lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d(\theta^*, \text{Dom}\, f^*)$, $f_\lambda^n \xrightarrow{UB} f_\lambda$.

Si Φ est fortement cœrcif alors ces propositions sont équivalentes à

(iv) $\exists\, \lambda_0' > 0$ *tel que* $\dfrac{A}{\lambda_0'} > d\left(\theta^*, \operatorname{Dom} f^*\right)$ *et* $f^n_{\lambda_0'} \xrightarrow{AW} f_{\lambda_0'}$.

Preuve. **(i)$\Longrightarrow$(ii):** D'abord (i) implique que f_λ, f^n_λ, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Le reste découle immédiatement des théorèmes 3.4 et 3.5 puisque $\tau_{i1} \subset \tau_{AW}$, $\tau_{i2} \subset \tau_{AW}$ et la convergence pour le sup de deux topologies est équivalente à la convergence pour les deux topologies.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): D'après (ii), les fonctions f_λ, f^n_λ, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Comme $f^n_\lambda \xrightarrow{AW} f_\lambda$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$ et $\tau_S \subset \tau_{AW}$ alors d'après le théorème 3.2 on a $f^n \xrightarrow{\tau_S} f$. Il existe alors une suite bornée $(x_n)_n$ et un réel M tels que $f^n(x_n) \leq M$. Soient $\rho > 0$, $\gamma > 0$ et $r > 0$ avec $\|x_n\| \leq \gamma$ et $\sup\left\{\Phi(z) \;/\; z \in \dfrac{\rho+\gamma}{\lambda} U\right\} \leq r$. Pour tout $x \in \rho U$ et tout n on a, $f^n_\lambda(x) \leq f^n(x_n) + \Phi\left(\dfrac{x - x_n}{\lambda}\right) \leq M + r$. Les fonctions f^n_λ sont alors uniformément majorées sur les bornés et donc $f^n_\lambda \xrightarrow{UB} f_\lambda$ d'après [14, Lemme 4.1].

(iii)$\Longrightarrow$(i): La convergence uniforme sur les bornés étant plus fine que la τ_{i1}-convergence et la τ_{i2}-convergence alors (iii) implique que f_λ, f^n_λ, $n \geq n_0$ sont dans $\Gamma(X)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_{i1}} f_\lambda$ et $f^n_\lambda \xrightarrow{\tau_{i2}} f_\lambda$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$. Par suite $f^n \xrightarrow{\tau_{i1}} f$ et $f^n \xrightarrow{\tau_{i2}} f$ en vertu des théorèmes 3.4 et 3.5. D'où $f^n \xrightarrow{AW} f$. Si de plus Φ est fortement cœrcif, alors Φ^* est bornée sur les bornés. Par suite $f^n \xrightarrow{AW} f$ dès que (iv) est vérifiée d'après [2, Théorème 3.4]. $\square$

Remarquons ici que les résulats du théorème 3.2, théorème 3.4, théorème 3.5 et du théorème 3.6 ont lieu en particulier pour $\Phi = \|\cdot\|^p$ et $\Psi = \|\cdot\|_*^q$ avec p, $q \geq 1$ qui sont évidemment des référentiels positifs bornés sur les bornés. Plus particulièrement, pour $p = q = 1$ nous retrouvons les théorèmes 3.3, 3.7 et 4.3 qui sont établis dans [14].

Maintenant, du fait que sur $\mathcal{C}(X^*)$ on a $\tau_S \subset \tau_{i1}$ et $\tau_S \subset \tau_{i2}$ alors par application du théorème 3.3 et par de légères modifications au niveau des démonstrations des théorèmes précédents, nous obtenons les versions duales regroupées dans le théorème suivant:

Théorème 3.7. *Si h, h^n, $n \geq 1$ sont dans $\Gamma(X^*)$, le référentiel Ψ est dans $\Gamma(X^*)$ et t désigne τ_{i1} ou τ_{i2} ou τ_{AW}, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $h^n \xrightarrow{t} h$;

(ii) $h^n_\lambda := h^n \nabla \Psi_\lambda \xrightarrow{t} h_\lambda := h \nabla \Psi_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta, \operatorname{Dom} h^*\right)$.

Finalement, du fait que $\tau_{AW} = \tau_e$ en dimension finie [1, 6], alors d'après le théorème 3.6 et moyennant le lemme 3.1 de [35] nous obtenons facilement le corollaire ci-dessous:

Corollaire 3.8. *Si X est de dimension finie et Φ est un référentiel positif alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $f^n \xrightarrow{e} f$;

(ii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta, \operatorname{Dom} f^*\right)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{e} f_\lambda$;

(iii) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta, \operatorname{Dom} f^*\right)$, $f^n_\lambda \xrightarrow{UB} f_\lambda$;

(iv) $\forall\, \lambda \in]0, \lambda_0]$ *avec* $\dfrac{A}{\lambda_0} > d\left(\theta, \operatorname{Dom} f^*\right)$, $f^n_\lambda \longrightarrow f_\lambda$.

4. Lagrangiens augmentés généralisés. Nous introduisons ici les notions de t-épi/hypo-convergences des suites de fonctions convexes-concaves fermées et propres, où t représente l'une quelconque des topologies introduites dans la définition 2.1. Puis par application des résultats de la section précédente, nous les caractérisons en termes des t-convergences des suites associées des Lagrangiens augmentés généralisés d'indices assez petits associés aux transformées partielles de Legendre-Fenchel des composantes convexes des fonctions convexes-concaves initiales.

Soient Y un espace de Banach réflexif et Y^* son dual topologique. Pour chaque fonction $L : X \times Y^* \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ convexe par rapport à x et concave par rapport à y^*, on associe sa composante convexe F définie sur $X \times Y$ par

$$F(x, y) := \sup_{y^* \in Y^*} \left[L(x, y^*) + \langle y^*, y \rangle \right]$$

et sa composante concave G définie sur $X^* \times Y^*$ par

$$G(x^*, y^*) := \inf_{x \in X} \left[L(x, y^*) - \langle x^*, x \rangle \right].$$

La fonction L est dite propre si $F \not\equiv +\infty$ et $F \not\equiv -\infty$ et elle est dite fermée si F et G sont conjuguées, ie $F^* = -G$ et $(-G)^* = F$. Il est connu (voir [3, 40, 41]) que L

est fermée et propre si et seulement si $F \in \Gamma(X \times Y)$ et que cette correspondance est une relation "un à un" (à une relation d'équivalence près). Deux fonctions convexes-concaves sur $X \times Y^*$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont les mêmes composantes.
La transformée partielle de Legendre-Fenchel d'une fonction $F \in \Gamma(X \times Y)$ [3] est la fonction l définie sur $X \times Y^*$ par

$$l(x, y^*) := \inf_{y \in Y} \left[F(x, y) - \langle y^*, y \rangle \right].$$

Il est clair que l est une fonction convexe-concave fermée et propre dont la composante convexe associée n'est rien d'autre que F.

Dans toute la suite, L^n, $n \geq 1$, $L : X \times Y^* \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ sont des fonctions convexes-concaves fermées et propres, F^n, $n \geq 1$, $F : X \times Y \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ leurs composantes convexes respectives et l^n, $n \geq 1$, $l : X \times Y^* \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ les transformées partielles de Legendre-Fenchel associées à F^n, $n \geq 1$, F respectivement, $\Phi : X \longrightarrow [0, +\infty[$ est un référentiel borné sur les bornés de X et $\Psi : Y^* \longrightarrow [0, +\infty[$ est un référentiel fortement cœrcif borné sur les bornés de Y^* tel que $\Psi \in \Gamma(Y^*)$.

Une caractérisation fondamentale de l'épi/hypo-convergence en dimension finie (respectivement Mosco épi/hypo-convergence dans le cas réflexif) d'une suite de fonctions convexes-concaves est donnée par l'épi-convergence (respectivement la Mosco convergence) de la suite des composantes convexes associées [1, 3, 7]. Par analogie, nous introduisons la définition suivante:

Définition 4.1. *On dit que la suite $\{L^n, n \geq 1\}$ est t-épi/hypo-convergente vers L, noté $L^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} L$, si et seulement si la suite $\{F^n, n \geq 1\}$ est t-convergente vers F dans $\Gamma(X \times Y)$, ie*

$$L^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} L \Longleftrightarrow F^n \overset{t}{\longrightarrow} F$$

où t représente l'une des topologies τ_S, τ_{i1}, τ_{i2} ou τ_{AW}.

Si X est de plus un espace de Banach réflexif, alors la slice épi/hypo-convergence coincide avec la Mosco épi/hypo-convergence notée $L^n \overset{M-e/h}{\longrightarrow} L$ et étudiée dans [3, 7]; et la τ_{i1}-épi/hypo-convergence coincide avec la $\tau_{AW}^- \vee \tau_M^+$-épi/hypo-convergence [2, 32]. En dimension finie, ces convergences se réduisent à l'épi/hypo-convergence notée $L^n \overset{e/h}{\longrightarrow} L$ et étudiée dans [1, 3]. En outre, il est clair que si L'^n est équivalente à L^n, $n \geq 1$ et L' est équivalente à L, alors $L^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} L$ si et seulement si $L'^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} L'$. Ainsi nous avons donc

$$L^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} L \Longleftrightarrow l^n \overset{t-e/h}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow F^n \overset{t}{\longrightarrow} F.$$

Définition 4.2 ([29]). *On appelle Lagrangien augmenté de la fonction convexe-concave L d'indice $\lambda > 0$ et associé au référentiel Ψ, la fonction L_λ : $X \times Y^* \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ définie par:*

$$L_\lambda(x, y^*) := \sup_{\eta^* \in Y^*} \left[L(x, \eta^*) - \Psi_\lambda(y^* - \eta^*)\right].$$

Lemme 4.3. *Pour tout $\lambda > 0$, pour tout $y^* \in Y^*$, $l_\lambda(\cdot, y^*)$ est dans $\Gamma(X)$ et $[l_\lambda(\cdot, y^*)]^* = F^* \nabla \Psi_\lambda(\cdot, y^*)$; où l_λ est le Lagrangien augmenté de la transformée partielle de Legendre-Fenchel l de F, composante convexe de L.*

Preuve. D'après les notations précédentes on peut écrire

$$\begin{aligned} l_\lambda(x, y^*) &= -\inf_{\eta^* \in Y^*} \left[-l(x, \eta^*) + \Psi_\lambda(y^* - \eta^*)\right] \\ &= -\left[(-l(x, \cdot)) \nabla \Psi_\lambda\right](y^*) = -\left[F(x, \cdot)^* \nabla \Psi_\lambda\right](y^*). \end{aligned}$$

Comme Ψ est fortement cœrcif, alors $\operatorname{Dom}\Psi^* = Y$ et Ψ^* est une fonction convexe bornée sur les bornés et par suite Ψ^* est continue sur Y, Ψ^* étant la transformée de Legendre-Fenchel de Ψ dans la dualité $\langle Y^*, Y\rangle$. Or $\Psi \in \Gamma(Y^*)$, alors

$$\begin{aligned} l_\lambda(x, y^*) &= -\left[F(x, \cdot) + \lambda \left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*\right]^*(y^*) \\ &= \inf_{y \in Y} \left[F(x, y) + \lambda \left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*(y) - \langle y^*, y\rangle\right]. \end{aligned}$$

Maintenant pour $y^* \in Y^*$ et $\lambda > 0$ fixés, la fonction convexe

$$l_\lambda(\cdot, y^*) = \inf_{y \in Y} \left[F(\cdot, y) + \lambda \left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*(y) - \langle y^*, y\rangle\right]$$

n'est pas identiquement $+\infty$ car F est propre et $\operatorname{Dom}\Psi^* = Y$, elle ne prend jamais la valeur $-\infty$ puisque la fonction

$$y \longmapsto F(x, y) + \lambda \left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*(y) - \langle y^*, y\rangle$$

est uniformément cœrcive quand x reste "borné" (car la fonction Ψ^* est fortement cœrcive), de plus elle possède une minorante affine continue. Ainsi, sa transformée de Legendre-Fenchel est évidemment dans $\Gamma(X^*)$ et donnée par

$$\begin{aligned} \left[l_\lambda(\cdot,y^*)\right]^*(x^*) &= \left[F+\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*\right]^*(x^*,y^*) = (F^*\nabla\Psi_\lambda)(x^*,y^*) \\ &= \inf_{\eta^*\in Y^*}\left[F^*(x^*,\eta^*)+\Psi_\lambda(y^*-\eta^*)\right]. \end{aligned}$$

En fait, pour obtenir la deuxième égalité, il suffit de remarquer que $\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*$ peut être considérée comme une fonction de $\Gamma(X\times Y)$ finie continue et vérifiant $\left[\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*\right]^* = \Psi_\lambda$ avec $\Psi_\lambda(x^*,y^*) := \Psi_\lambda(y^*)$. Par suite, $[l_\lambda(\cdot,y^*)]^{**} = cl\,(l_\lambda(\cdot,y^*))$ est dans $\Gamma(X)$, où $cl\,(l_\lambda(\cdot,y^*))$ est la régularisée sci de $l_\lambda(\cdot,y^*)$. En outre on a $l_\lambda(\cdot,y^*) = [l_\lambda(\cdot,y^*)]^{**}$ et donc $l_\lambda(\cdot,y^*)\in\Gamma(X)$. En effet, par le même argument précédent appliqué à $\Psi_\lambda(y^*-\cdot)$ on obtient pour chaque $x\in X$

$$\begin{aligned} \left[l_\lambda(\cdot,y^*)\right]^{**}(x) &= \sup_{x^*\in X^*}\left[\langle x^*,x\rangle - \inf_{\eta^*\in Y^*}\left[F^*(x^*,\eta^*)+\Psi_\lambda(y^*-\eta^*)\right]\right] \\ &= \sup_{x^*\in X^*}\sup_{\eta^*\in Y^*}\left[\langle x^*,x\rangle - F^*(x^*,\eta^*)-\Psi_\lambda(y^*-\eta^*)\right] \\ &= \left[F^*+\Psi_\lambda(y^*-\cdot)\right]^*(x,\theta) = \left[F\nabla\left[\Psi_\lambda(y^*-\cdot)\right]^*\right](x,\theta) \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\left[\Psi_\lambda(y^*-\cdot)\right]^*(-y)\right] \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\sup_{z^*\in Y^*}\left[\langle z^*,-y\rangle - \Psi_\lambda(y^*-z^*)\right]\right] \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\sup_{u^*\in Y^*}\left[\langle y^*-u^*,-y\rangle - \Psi_\lambda(u^*)\right]\right] \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\sup_{u^*\in Y^*}\left[\langle u^*,y\rangle - \Psi_\lambda(u^*)\right] - \langle y^*,y\rangle\right] \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\left[\Psi_\lambda\right]^*(y) - \langle y^*,y\rangle\right] \\ &= \inf_{y\in Y}\left[F(x,y)+\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\Psi\right)^*(y) - \langle y^*,y\rangle\right] = \left[l_\lambda(\cdot,y^*)(x)\right]. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 4.4. *$\forall\lambda>0$, $\forall y^*\in Y^*$, $[l_\lambda(\cdot,y^*)]^*_\gamma = \left[F^*\nabla\varphi^\gamma_\lambda\right](\cdot,y^*)$, où φ^γ est* *le référentiel défini sur $X^* \times Y^*$ par*

$$\varphi^{\gamma}(x^*, y^*) := \frac{1}{2\gamma^2}\|x^*\|_{X^*}^2 + \Psi(y^*), \ \forall\, \gamma > 0.$$

P r e u v e. Pour $\lambda > 0$ fixé et pour tout $\gamma > 0$, l'approximation inf-convolutive de paramètre $\gamma\lambda$ de la fonction $[l_\lambda(\cdot, y^*)]^*$ relative au référentiel $\frac{1}{2}\|\cdot\|_{X^*}^2$ coincide avec son approximation inf-convolutive de paramètre γ relative au référentiel $\frac{1}{2\lambda^2}\|\cdot\|_{X^*}^2$. On la notera donc $[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\gamma^*$. De plus on a

$$\begin{aligned}
[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\gamma^*(x^*) &= \inf_{\zeta^* \in X^*}\left[[l_\lambda(\cdot, y^*)]^*(\zeta^*) + \frac{1}{2\gamma^2\lambda^2}\|x^* - \zeta^*\|_{X^*}^2\right] \\
&= \inf_{(\zeta^*, \eta^*) \in X^* \times Y^*}\left[F^*(\zeta^*, \eta^*) + \Psi_\lambda(y^* - \eta^*) + \frac{1}{2\gamma^2\lambda^2}\|x^* - \zeta^*\|_{X^*}^2\right].
\end{aligned}$$

En considérant le référentiel $\varphi^\gamma : X^* \times Y^* \longrightarrow [0, +\infty[$, qui est encore fortement cœrcif et borné sur les bornés , défini par $\varphi^{\gamma}(x^*, y^*) := \frac{1}{2\gamma^2}\|x^*\|_{X^*}^2 + \Psi(y^*)$, on obtient l'égalité:

$$[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\gamma^*(x^*) = \left[F^* \nabla \varphi_\lambda^\gamma\right](x^*, y^*).$$

Ainsi, $[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\gamma^*$ n'est rien d'autre que l'approximation inf-convolutive de paramètre λ de la fonction F^* relativement au référentiel φ^γ. Notons que $\varphi^\gamma \in \Gamma(X^* \times Y^*)$ puisque la norme duale et Ψ sont w^*-sci. □

Théorème 4.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \overset{\tau_S - e/h}{\longrightarrow} L$;

(ii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_\lambda^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_S} l_\lambda(\cdot, y^*)$.

P r e u v e. D'après le lemme 4.3, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$ et tout $y^* \in Y^*$, les fonctions $l_\lambda^n(\cdot, y^*)$, $n \geq 1$ et $l_\lambda(\cdot, y^*)$ sont dans $\Gamma(X)$ et leurs transformées de Legendre-Fenchel sont données par

$$[l_\lambda(\cdot, y^*)]^*(x^*) = F^* \nabla \Psi_\lambda(x^*, y^*) = \inf_{\eta^* \in Y^*}\left[F^*(x^*, \eta^*) + \Psi_\lambda(y^* - \eta^*)\right],$$

$$[l_\lambda^n(\cdot, y^*)]^*(x^*) = F^{n*} \nabla \Psi_\lambda(x^*, y^*) = \inf_{\eta^* \in Y^*}\left[F^{n*}(x^*, \eta^*) + \Psi_\lambda(y^* - \eta^*)\right].$$

D'après le théorème 2.3, la propriété (ii) est équivalente à la propriété

$$\forall\lambda \in]0,\lambda_0], \forall y^* \in Y^*, [l_\lambda^n(\cdot, y^*)]^* \xrightarrow{\tau_S} [l_\lambda(\cdot, y^*)]^*.$$

D'après le théorème 3.3 appliqué dans X^* à la suite

$$\{[l_\lambda(\cdot, y^*)]^*,\ [l_\lambda^n(\cdot, y^*)]^*,\ n \geq 1\}$$

et au référentiel $\frac{1}{2\lambda^2}\|\cdot\|_{X^*}^2$, cette dernière propriété est équivalente à

$$\forall\lambda \in]0,\lambda_0], \forall y^* \in Y^*, \forall\gamma \in]0,\gamma_0),\ [l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\gamma^* \xrightarrow{\tau_S} [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\gamma^*.$$

Ce qui est encore équivalent, d'après le lemme 4.4 et le fait que les référentiels φ^γ sont uniformément fortement cœrcifs pour $\gamma \leq C^{\underline{te}}$, à la propriété

$$\forall\lambda \in]0,\lambda_0],\ F^{n*}\nabla\varphi_\lambda^\gamma \xrightarrow{\tau_S} F^*\nabla\varphi_\lambda^\gamma.$$

Par une seconde application du théorème 3.3 dans $X^* \times Y^*$ à la suite $\{F^*,\ F^{n*},\ n \geq 1\}$ et au référentiel φ^γ ($\gamma \leq C^{\underline{te}}$), cette dernière propriété est équivalente au fait que $F^{n*} \xrightarrow{\tau_S} F^*$. Ceci est équivalent à $L^n \xrightarrow{\tau_S - e/h} L$ en vertu du théorème 2.3 et de la définition 4.1. □

Théorème 4.6. *Pour $t = \tau_{i1}$, τ_{i2} ou τ_{AW}, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \xrightarrow{t-e/h} L$;

(ii) $\forall\lambda \in]0,\lambda_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_\lambda^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{t} l_\lambda(\cdot, y^*)$;

(iii) $\exists\lambda_0 > 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_{\lambda_0}^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{t} l_{\lambda_0}(\cdot, y^*)$.

Preuve. D'après le lemme 4.3, $l_\lambda^n(\cdot, y^*)$, $n \geq 1$ et $l_\lambda(\cdot, y^*)$ sont dans $\Gamma(X)$. Par application du théorème 3.7 et du théorème 2.3 et moyennant la définition 4.1, l'équivalence entre (i) et (ii) se démontre exactement comme dans la preuve du théorème 4.5. Le reste découle du fait que tous les référentiels considérés dans la preuve précitée sont bornés sur les bornés et fortement cœrcifs et donc leurs transformées de Legendre-Fenchel sont Lipschitziennes sur les bornés. □

5. Approximations inf-sup-convolutives généralisées. Dans cette dernière section et par application des résultats précédents, nous caractérisons les t-épi/hypo-convergences des suites de fonctions convexes-concaves fermées et propres en termes de convergences des suites associées des approximations inf-sup-convolutives généralisées de paramètres assez petits associées aux transformées partielles de Legendre-Fenchel des composantes convexes des fonctions convexes-concaves initiales. Rappelons d'abord cette définition:

Définition 5.1 ([5, 29]). *On appelle approximation inf-sup-convolutive de L de paramètres $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et associée aux référentiels Φ et Ψ, la fonction convexe-concave $L_{\lambda,\mu} : X \times Y^* \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ définie par:*

$$L_{\lambda,\mu}(x, y^*) := \inf_{\zeta \in X} \sup_{\eta^* \in Y^*} \left[L(\zeta, \eta^*) + \Phi_\lambda(x - \zeta) - \Psi_\mu(y^* - \eta^*) \right].$$

Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [3, 5, 7, 29, 40, 41].

Dorénavant, L^n, $n \geq 1$, L seront supposées de plus à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.

Théorème 5.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \overset{\tau_S - e/h}{\longrightarrow} L$;

(ii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_S} l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)$;

(iii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $l^n_{\lambda,\mu} \longrightarrow l_{\lambda,\mu}$ *et* $F^{n*}\nabla\varphi^\mu_\lambda \longrightarrow F^*\nabla\varphi^\mu_\lambda$.

P r e u v e. Notons d'abord que l^n, $n \geq 1$, l sont aussi à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ puisque $L \leq l$ et $L^n \leq l^n$ pour tout n [3]. Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$ assez petits, $y^* \in Y^*$ et $[l^n_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu$, $[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu$ les approximations inf-convolutives de paramètre μ des fonctions $l^n_\lambda(\cdot, y^*)$, $l_\lambda(\cdot, y^*)$ relatives au référentiel Φ. D'après le théorème 4.5 appliqué à la suite $\{L, L^n, n \geq 1\}$ et au référentiel Ψ, (i) est équivalente à

$$\forall \lambda \in]0, \lambda_0], \forall y^* \in Y^*, l^n_\lambda(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_S} l_\lambda(\cdot, y^*).$$

Propriété équivalente d'après la première partie du théorème 3.2 appliquée à la suite $\{l_\lambda(\cdot, y^*), \ l^n_\lambda(\cdot, y^*), \ n \geq 1\}$ et au référentiel Φ à

$$\forall \lambda \in]0, \lambda_0], \forall \mu \in]0, \mu_0], \forall y^* \in Y^*, [l^n_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu \xrightarrow{\tau_S} [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu.$$

Ce qui est alors équivalent à (ii) puisque un calcul simple montre que

$$l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) = [l^n_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu \quad et \quad l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) = [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu.$$

D'après le théorème 4.5 appliqué à la suite $\{L,\ L^n,\ n \geq 1\}$ et au référentiel Ψ et la seconde partie du théorème 3.2 appliquée à la suite $\{l_\lambda(\cdot, y^*),\ l_\lambda^n(\cdot, y^*),\ n \geq 1\}$ et aux référentiels Φ et $\frac{1}{2\lambda^2}\|\cdot\|_{X^*}^2$, on déduit que (i) est équivalente au fait que $\forall\lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall\mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$ on ait

$$[l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\mu \longrightarrow [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu \ \ et\ \ [l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\mu^* \longrightarrow [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu^*,$$

$[l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\mu^*$, $[l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu^*$ étant les approximations inf-convolutives de paramètre μ des fonctions $[l_\lambda^n(\cdot, y^*)]^*$, $[l_\lambda(\cdot, y^*)]^*$ relatives au référentiel $\frac{1}{2\lambda^2}\|\cdot\|_{X^*}^2$. Or $l_{\lambda,\mu}^n(\cdot, y^*) = [l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\mu$ et $l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) = [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu$ et en vertu du lemme 4.4 nous avons aussi

$$[l_\lambda^n(\cdot, y^*)]_\mu^*(x^*) = \left[F^{n*}\nabla\varphi_\lambda^\mu\right](x^*, y^*) \ \ et\ \ [l_\lambda(\cdot, y^*)]_\mu^*(x^*) = \left[F^*\nabla\varphi_\lambda^\mu\right](x^*, y^*).$$

On déduit alors que (i) est aussi équivalente au fait que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$, tout $\mu \in]0, \mu_0]$ et tout $y^* \in Y^*$ on ait

$$l_{\lambda,\mu}^n(\cdot, y^*) \longrightarrow l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) \ \ et\ \ \left[F^{n*}\nabla\varphi_\lambda^\mu\right](\cdot, y^*) \longrightarrow \left[F^*\nabla\varphi_\lambda^\mu\right](\cdot, y^*).$$

Ainsi, (i) est équivalente à (iii). □

Théorème 5.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \overset{\tau_{i1}-e/h}{\longrightarrow} L$;

(ii) $\forall\lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall\mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_{\lambda,\mu}^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i1}} l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)$;

(iii) $\forall\lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall\mu \in]0, \mu_0]$, $l_{\lambda,\mu}^n \longrightarrow l_{\lambda,\mu}$, $F^{n*}\nabla\varphi_\lambda^\mu \longrightarrow F^*\nabla\varphi_\lambda^\mu$ *et* $e_\rho\left(l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*), l_{\lambda,\mu}^n(\cdot, y^*)\right) \longrightarrow 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $\forall\rho \geq \rho_0 > 0$;

(iv) $\exists\lambda_0 > 0$, $\forall\mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_{\lambda_0,\mu}^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i1}} l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*)$;

(v) $\exists\lambda_0 > 0$, $\forall\mu \in]0, \mu_0]$, $l_{\lambda_0,\mu}^n \longrightarrow l_{\lambda_0,\mu}$, $F^{n*}\nabla\varphi_{\lambda_0}^\mu \longrightarrow F^*\nabla\varphi_{\lambda_0}^\mu$ *et* $e_\rho\left(l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*), l_{\lambda_0,\mu}^n(\cdot, y^*)\right) \longrightarrow 0$, $\forall y^* \in Y$, $\forall\rho \geq \rho_0 > 0$;

Si Φ^* *est Lipschitzienne sur les bornés, ces propriétés sont équivalentes à*

(vi) $\exists\lambda_0 > 0$, $\exists\mu_0 > 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $l_{\lambda_0,\mu_0}^n(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i1}} l_{\lambda_0,\mu_0}(\cdot, y^*)$.

Preuve. Considérons les mêmes notations utilisées au début de la démonstration du théorème 5.2. Le résultat se déduit alors par application du théorème 4.6 à la suite $\{L,\ L^n,\ n \geq 1\}$ et au référentiel Ψ et par application du théorème 3.4 à la suite $\{l_\lambda(\cdot, y^*),\ l_\lambda^n(\cdot, y^*),\ n \geq 1\}$ et aux référentiels Φ et $\frac{1}{2\lambda^2}\|\cdot\|_{X^*}^2$, moyennant le lemme 4.4. □

Théorème 5.4. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \overset{\tau_{i2}-e/h}{\longrightarrow} L$;

(ii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i2}} l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)$;

(iii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $l^n_{\lambda,\mu} \longrightarrow l_{\lambda,\mu}$, $F^{n*}\nabla\varphi^\mu_\lambda \longrightarrow F^*\nabla\varphi^\mu_\lambda$ *et* $e_\rho\left(l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*), l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)\right) \longrightarrow 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $\forall \rho \geq \rho_0 > 0$;

(iv) $\exists \lambda_0 > 0$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i2}} l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*)$;

(v) $\exists \lambda_0 > 0$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $l^n_{\lambda_0,\mu} \longrightarrow l_{\lambda_0,\mu}$, $F^{n*}\nabla\varphi^\mu_{\lambda_0} \longrightarrow F^*\nabla\varphi^\mu_{\lambda_0}$ *et* $e_\rho\left(l^n_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*), l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*)\right) \longrightarrow 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $\forall \rho \geq \rho_0 > 0$;

Si Φ^* *est Lipschitzienne sur les bornés, ces propriétés sont équivalentes à*

(vi) $\exists \lambda_0 > 0$, $\exists \mu_0 > 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda_0,\mu_0}(\cdot, y^*) \xrightarrow{\tau_{i2}} l_{\lambda_0,\mu_0}(\cdot, y^*)$.

P r e u v e. Elle se fait exactement comme pour le théorème 5.3 en remplaçant, dans la preuve, le théorème 3.4 par le théorème 3.5. □

Théorème 5.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $L^n \overset{AW-e/h}{\longrightarrow} L$;

(ii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{AW} l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)$;

(iii) $\forall \lambda \in]0, \lambda_0]$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{UB} l_{\lambda,\mu}(\cdot, y^*)$;

(iv) $\exists \lambda_0 > 0$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{AW} l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*)$;

(v) $\exists \lambda_0 > 0$, $\forall \mu \in]0, \mu_0]$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*) \xrightarrow{UB} l_{\lambda_0,\mu}(\cdot, y^*)$;

Si Φ *est de plus fortement cœrcif, ces propriétés sont équivalentes à*

(vi) $\exists \lambda_0 > 0$, $\exists \mu_0 > 0$, $\forall y^* \in Y^*$, $l^n_{\lambda_0,\mu_0}(\cdot, y^*) \xrightarrow{AW} l_{\lambda_0,\mu_0}(\cdot, y^*)$.

P r e u v e. Avec les mêmes notations précédentes, le résultat se déduit par application du théorème 4.6 à la suite $\{L,\ L^n,\ n \geq 1\}$ et au référentiel Ψ et par application du théorème 3.6 à la suite $\{l_\lambda(\cdot, y^*),\ l^n_\lambda(\cdot, y^*),\ n \geq 1\}$ et au référentiel Φ. □

Remarques 5.6. a) Si X est un espace de Banach réflexif alors, d'une part nous déduisons des résultats analogues aux théorèmes 4.5 et 5.2 relativement à la Mosco épi/hypo-convergence et qui complètent en particulier certains résultats de [3, 7], et d'autre part nous obtenons des résultats analogues aux théorèmes 4.6 et 5.3 relativement à la $\tau_{AW}^{-} \vee \tau_{M}^{+}$-épi/hypo-convergence [12].

b) Si X et Y sont de dimensions finies, nous déduisons des caractérisations semblables pour l'épi/hypo-convergence avec des référentiels généraux. En outre, dans ce cas, les propriétés du théorème 5.5 seront équivalentes au fait que $l_{\lambda,\mu}^{n}$ converge simplement vers $l_{\lambda,\mu}$ pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$ et tout $\mu \in]0, \mu_0]$ en vertu du corollaire 3.8 appliqué à la suite $\{l_\lambda(\cdot, y^*), \ l_\lambda^n(\cdot, y^*), \ n \geq 1\}$ et au référentiel Φ.

Acknowledgements. The authors would like to express their thanks to the referee of this paper for the invaluable help and advice. They are grateful to him for his helpful comments and suggestions which played a crucial role in this revised form.

REFERENCES

[1] H. Attouch. Variational convergence for functions and operators. London, Pitman, 1984.

[2] H. Attouch, D. Azé, G. Beer. On some inverse stability problems for the epigraphical sum. *Nonlinear Anal.* **16**, *3* (1991), 241–254.

[3] H. Attouch, D. Azé, R. Wets. On continuity properties of the partial Legendre-Fenchel transform: Convergence of sequences of augmented Lagrangian functions, Moreau-Yosida approximates and subdifferential operators. International Institute for Applied Systems Analysis, A-2361 Laxenburg, Austria, April 1986, CP-86-16.

[4] H. Attouch, G. Beer. On the convergence of subdifferentials of convex functions. *Arch. Math. (Basel)* **60**, *4* (1993), 389–400.

[5] H. Attouch, R. J.-B. Wets. A convergence theory for saddle functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **280**, *1* (1983), 1–41.

[6] H. Attouch, R. J.-B. Wets. Quantitative stability of variational systems: I. The epigraphical distance. *Trans. Amer. Math. Soc.* **328** , *2* (1991), 695–729.

[7] D. AZÉ. Convergences variationnelles et dualité. Application en calcul des variations et en programmation mathématique, Thèse de Doctorat, Univ. de Perpignan, 1986.

[8] D. AZÉ, J. P. PENOT. Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization* **21**, *4* (1990), 521–534.

[9] D. AZÉ, J. P. PENOT. The Joly topology and the Mosco-Beer topology revisited. Bull. *Austral. Math. Soc.* **48**, *3* (1993), 353–363.

[10] G. BEER. Infima of convex functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **315**, *2* (1989), 849–859.

[11] G. BEER. Conjugate convex functions and the epi-distance topology. *Proc. Amer. Math. Soc.* **108**, *1* (1990), 117–126.

[12] G. BEER. The slice topology: a viable alternative to Mosco convergence in nonreflexive spaces. *Nonlinear Anal.* **19**, *3* (1992), 271–290.

[13] G. BEER. Efficiency and the uniform linear minorization of convex functions. *Monatsh. Math.* **115**, *4* (1993), 281–290.

[14] G. BEER. Lipschitz regularization and the convergence of convex functions. *Numer. funct. Anal. Optim.* **15**, *1–2* (1994), 31–46.

[15] G. BEER. Topologies on closed and closed convex sets and the Effros measurability of set valued functions. *Sém. Anal. Convexe* **21** (1991), Exp. No 2, 44 pp.

[16] G. BEER, J. BORWEIN. Mosco convergence and reflexivity. *Proc. Amer. Math. Soc.* **109**, *2* (1990), 427–436.

[17] G. BEER, R. LUCCHETTI. Convex optimization and the epi-distance topology. *Trans. Amer. Math. Soc.* **327**, *2* (1991), 795–813.

[18] G. BEER, R. LUCCHETTI. The epi-distance topology: continuity and stability results with applications to convex optimization problems. *Math. Oper. Res.* **17**, *3* (1992), 715–726.

[19] G. BEER, R. LUCCHETTI. Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **335**, *2* (1993), 805–822.

[20] G. Beer, M. Théra. Attouch-Wets convergence and a differential operator for convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **122**, *3* (1994), 851–858.

[21] M. Bougeard, J.-P. Penot, A.Pommellet. Towards minimal assumptions for the infimal convolution regularization. *J. Approx. Theory* **64**, *3* (1991), 245–270.

[22] E. de Giorgi. Convergence problems for functions and operators. Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978), Pitagora, Bologna, 1979, 131–188.

[23] S. Dolecki, G. Salinetti, R. J.-B. Wets. Convergence of functions: equi-semicontinuity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **276**, *1* (1983), 409–429.

[24] A. L. Dontchev, T. Zolezzi. Well-posed optimization problems. Lecture Notes in Mathematics, vol. **1543**. Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[25] I. Ekeland, R. Temam. Analyse convexe et problèmes variationnels. Paris, Dunod, 1974.

[26] B. El Ghali. Mosco convergence et approximations inf-convolutives associées à des référentiels généraux. Thèse de troisième cycle, Faculté des Sciences de Rabat, 1988.

[27] K. El Hajioui. Convergences variationnelles: Aproximations inf-convolutives généralisées, stabilité et optimisation dans les espaces non réflexifs. Thèse de Doctorat, Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences de Kenitra, 2002.

[28] K. El Hajioui, D. Mentagui. Slice convergence: stabilité et optimisation dans les espaces non réflexifs. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **10**, *4* (2004), 505–525.

[29] A. Fougeres et A. Truffert. Régularisations s.c.i et Γ-convergence: approximations inf-convolutives associées à un référentiel. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **152** (1988), 21–51.

[30] J. L. Joly. Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes. Thèse d'Etat, Université de Grenoble, 1970.

[31] J. L. Joly. Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue. *J. Math. Pures Appl. (9)* **52** (1973), 421–441.

[32] J. Lahrache. Stabilité et convergence dans les espaces non réflexifs. *Sém. Anal. Convexe* **21** (1991), Exp. No 10, 50 pp.

[33] D. Mentagui. Problèmes d'optimisation bien posés et convergences variationnelles, Théorie et applications dans le cadre de l'optimisation non différentiable. Thèse d'Etat, F. U. N. D. P., Namur, 1996.

[34] D. Mentagui. Analyse de récession et résultats de stabilité d'une convergence variationnelle, application à la théorie de la dualité en programmation mathématique. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **9** (2003), 297–315.

[35] D. Mentagui, K. El Hajioui. Convergences des fonctions convexes et approximations inf-convolutives généralisées. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* **72(86)** (2002), 123–136.

[36] U. Mosco. Approximation of the solutions of some variational inequalities. *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa (3)* **21** (1967), 373–394.

[37] U. Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.* **3** (1969), 510–585.

[38] R. R. Phelps. Convex functions, monotone operators and differentiability. Lecture Notes in Mathematics, vol. **1364**, Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[39] H. Radström. An imbeding theorem for spaces of convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 165–169.

[40] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming. *SIAM. J. Control* **12**, (1974), 268–285.

[41] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Math. Oper. Res.* **1**, *2* (1976), 97–116.

[42] G. Salinetti, R. J.-B. Wets. On the relations between two types of convergence for convex functions. *J. Math. Anal. Appl.* **60**, *1* (1977), 211–226.

[43] Y. Sonntag, C. Zalinescu. Set convergences. An attempt of classification. In: Differential Equations and Control Theory (ed. V. Barbu), Pitman Research Notes in Math., no. **250**, 1991, 312–323.

[44] A. N. Tikhonov. On the stability of inverse problems. *Dokl. Akad. Nauk. USSR (N.S.)* **39** (1943), 176–179.

[45] R. A. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 186–188.

[46] R. A. Wijsman. Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **123** (1966), 32–45.

K. El Hajioui
Département des Sciences Economiques et Gestion
Université Ibn Tofail
Kenitra, Morocco

D. Mentagui
Département de Mathématiques
Université Ibn Tofail
Kenitra, Morocco
e-mail: `dri_mentagui@yahoo.fr`

Received October 14, 2017