БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Йордан Борисов Табов

ПОДБОР, ПОДГОТОВКА ЗА РЕШАВАНЕ И ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

ДИСЕРТАЦИЯ

ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
"ДОКТОР НА ПЕДАГОГИЧЕСКИТЕ НАУКИ"
ПО НАУЧНАТА СПЕЦИАЛНОСТ 05.07.03
"МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА"

София
2004 г.

УВОД

§ 1. Защо задачи?

На проведените досега ***4 конференции*** на Световната федерация на математическите състезания (WFNMC) и на секционните заседания за математическите таланти на последните ***4 Световни конгреса*** по математическо образование (ICME 1988, 1992, 1996 и 2000 г.) ***централно място заемаше обсъждането на задачите***. На пръв поглед този факт изглежда парадоксално и контрастира с работата на останалите секции на ICME, в които водеща роля имат предимно методически и психолого-педагогически проблеми.

Един по-внимателен анализ обаче показва, че тази ситуация е напълно закономерна. Тя отразява действителността в съвременния етап на работата с изявените ученици. Достатъчно е само да погледнем помагалата, които използват талантливите ученици и техните учители за занимания и подготовка, и веднага ще забележим: ***преобладаващата част от тях са сборници от задачи*** (с една или друга степен на методическа обработка, с повече или по-малко теоретични бележки). Ако разгледаме по-подробно работата на математическите кръжоци, ще констатираме, ***че тя се състои предимно в решаване на задачи***. Основни методи и идеи се илюстрират чрез няколко характерни задачи. Обичайният училищен урочен модел от типа "нови знания и след това задачи за упражнение" е по-скоро изключение. ***При изявените ученици на преден план излиза задачата; в процеса на нейното решаване се въвеждат необходимите нови понятия и се изяснява същността на нова идея или нов метод***.

Тази специфика на работата с изявените ученици е направила впечатление и на университетски преподаватели, които с успех я прилагат и при обучението на изявени студенти: водещи математици в Московския университет (Гелфанд, Кирилов и др.) предлагат стандартни студентски курсове (например по функционален анализ и др.) във вид на серия задачи. При такава организационна форма вместо да посещават лекции, силните студенти решават задача след задача, а при необходимост за определени възлови идеи и моменти ползват консултации от лектора.

С известно приближение би могло да се каже, че при работата с изявените ученици задачите играят роля на своеобразни основни методически единици.

Водени от обичайната учебна практика, мнозина биха си помислили, че и в горния контекст задачата е нещо "дребно", обикновен фрагмент, че би трябвало да бъде само част от някакво по-голямо "цяло". Те обаче биха пропуснали спецификата на трудните математически задачи, които са обект на интереса и мисловната дейност на изявените ученици: не малко от тези задачи имат "потенциал" на не един и два "урока" от обичайното училищно разбиране за това понятие.

Затова може да се каже, че, ***концентрирайки вниманието си върху задачите, ние фактически се занимаваме със сърцевината на работата с изявените ученици***, с огледалото, в което се отразяват ***всички основни проблеми в тази област***.

Мястото, което отреждаме на задачите, не е случайно. То има както своите исторически корени, така и обяснения от гледна точка на ролята, която им се отрежда в обучението на изявените ученици. Ще се спрем накратко на тези два аспекта.

Преди всичко трябва да имаме предвид, че в първоначално математическите знания са възникнали при решаването на практически задачи, свързани с броене, събиране, изваждане, а така също с измерване на прости геометрични фигури и намиране на техните лица и обеми. Предназначението на първите появили се теореми и по-късно теории е било да улеснят решаването на задачите. Те са били своеобразни инструменти, които позволяват дадена конкретна практическа задача да се преобразува към стандартизиран "математически модел" и към него да се приложат теоретичните знания.

Практическите задачи, които решаваме с помощта на математиката, и до днес изпълват ежедневието ни, макар че ние не им обръщаме внимание – вероятно защото са сравнително прости. Интересни задачи се срещат по-рядко. Но тук ще си припомним една интересен случай, ***в който решаването на математическа задача от млад български математик е повлияло съществено на съдбата на България. Ще се спрем накратко на него*** (***Кънчев и Кънчев*** *1993).*

След Освобождението под диктата на Великите сили в Източна Румелия е било въведено местно самоуправление, в което Силите са търсили своеобразен баланс на влияние на трите основни – според неточните сведения, с които са разполагали – народа в тази територия:

българи, турци и гърци. Според Органическия устав (фактическата конституция) Областното събрание (аналог на днешното Народно събрание), състоящо се от 56 депутати, е трябвало да избере Постоянен комитет (Министерски съвет) от 10 члена, които да осъществяват управлението на провинцията. Правилата за избор са били такива: всеки депутат е трябвало да гласува с бюлетина, в която са написани имената на шест депутати-кандидати за Постоянния комитет; за избрани се считат 10-те кандидата, събрали най-много гласове.

С всички правила на Органичния устав дипломатите на Великите сили са се стремили да ограничат максимално българското влияние в управлението на провинцията, и предварителните им сметки (както се е видяло по-късно – без кръчмаря!) са били българските представители в Постоянния комитет да са 6 човека, въпреки че българското население е представлявало подавляващо мнозинство в провинцията.

И така, по време на избора се оказва, че в Събранието присъстват 47 депутати, от които 30 са българи. Колко български министри могат да се изберат с 30-те български гласа? Българските представители са се оказали пред една ясна математическа задача, от чието решение е зависело извънредно много!

За щастие на българите, сред 30-те техни депутати е бил младият и талантлив математик Иван Салабашев. Неговото блестящо решение изненадва и най-големите оптимисти: тридесетте български гласа са достатъчни, за да осигурят 10 български члена на Постоянния комитет; с други думи – изцяло българско правителство на населената предимно с българи Източна Румелия!

Така българската математика обърква сметките на чуждите дипломати и донася българско управление на Източна Румелия - справедливост, от която народът ни е бил лишен през дългите векове на турско-гръцкото робство.

§ 2. Проблеми в дисертацията

За около половин век съществуване математическите състезания и свързаното с тях обучение (разглеждано като "извънкласно", но все пак, разбира се, по същество обучение) на учениците с повишени математически способности се развиха бързо – и териториално, обхващайки все повече страни по света, и качествено. ***Еволюира философията на целите, които се преследват с математическите състезания; разнообразиха се формите им***, насочени към постигане на различни цели; потърсиха се системи за подготовка на учениците; ***осъзната беше ролята на водещите учители***; постепенно се запълва вакуумът от необходима литература, която да поеме функциите на своеобразни "учебници", или по-скоро "учебни пособия". Преди около двадесетина години беше създадена и ***световна организация*** (Световна федерация на математическите състезания, или съкратено WFNMC), ***която координира усилията и обмена на информация*** между специалистите в тази област. Почти петнадесет години тя издава и свое ***печатно издание*** – списанието "Математически състезания" (Mathematics Competitions).

Като всяко друго обучение, и обучението на учениците с математически способности има своите педагогически проблеми. Любопитно е да хвърлим един бегъл поглед към еволюцията на осъзнаването им и работата за тяхното решаване.

Първите математически състезания са организирани от идеалисти, които интуитивно са схващали, че това е полезна идея с добро бъдеще, и са намирали потвърждение на възгледите си в ентусиазма на учениците и в непосредственото повишаване на нивото на техните знания. Трябва да обърнем специално внимание на факта, че състезанията са били – за организатори, учители и ученици – допълнително, "извънредно" натоварване, което те са поемали доброволно, и са търсили и получавали само морално удовлетворение. Основните проблеми, с които са се сблъсквали, първоначално са били почти само организационни.

"Философията на състезанията" постепенно премина към изясняване на преследваните цели, за да може да се потърси адекватно усъвършенстване и специализация на организационните форми. Осъзнато беше, че стремежът към привличане на широки маси от ученици в често провеждани състезания и кръжочна работа не отговаря на естествените възможности на децата, в най-добрия случай постига дублиране на рутинната работа в училище и следователно трябва да се изостави.

Постепенно си пробива път реалистична конструктивна идея за "пирамидална" организация на работа, включваща селекция и съответно ***работа с учениците на различни нива и с различна интензивност, съобразена с индивидуалните им особености и желания***. ***Вниманието към индивида заема все по-централно място***. Демократичните идеи за ***"равен шанс"*** се съчетават с разбирането, че ***възможностите на отделните индивиди са различни, че математическите способности са много важен***

обществен ресурс, и че за неговото правилно и пълноценно използване са необходими специални грижи. С други думи, не бива да се жалят средства и сили за селекция и подготовка на специалисти с математическа подготовка на най-високо ниво.

Ако прегледаме съдържанието на ***първите броеве*** на специализираното списание "Математически състезания" (Mathematics Competitions) на Световната федерация на математическите състезания, ще забележим, че в тях напълно закономерно ***преобладават материали, които описват организацията на математически състезания*** по различните географски ширини, всички подобни по нещо едно на друго, с някои специфични особености, понякога с нови, ***интересни и полезни идеи***.

Постепенно навлиза и ***се разширява темата за публикуване и обсъждане на състезателни задачи; появяват се методически статии за отделни области от математиката***, включвани в състезателната практика.

Пробиват си път и статии, описващи изследвания върху участниците в състезания.

Като цяло се налага ***изводът, че изучаването на педагогическите и методическите проблеми на работата с изявени ученици е в начален стадий на развитие.*** Преобладават ***наблюденията***, които за продължителен период от време позволяват да се направят определени изводи и да се предприемат ***конкретни стъпки за подобряване на едни или други детайли***. Първи стъпки правят ***статистическите анализи*** и изобщо стремежът към използване ***на количествени характеристики*** за изучаване на практиката на състезанията.

Разбира се, ***в психологията и педагогиката*** има и голям брой изследвания, свързани с таланта и надареността, и развити ***теории***, и немалко ***постижения***. Всичко това се използва и трябва да се използва в максимална степен, за да може проблемите да бъдат поставяни и решавани по най-добрия начин. Но работата с младите дарования в областта на ***математиката*** има своите ***специфични особености***, така че праволинейното и формално прилагане на готовите теории и изводи от психологията, педагогиката и методиката често пъти е неправилно. С други думи, необходим е ***творчески подход***, който да осигури ***оптимално съчетание*** от всичко най-добро, създадено от ***педагогическата теория и практика*** до този момент, с идеите и методите, специфични за групата ученици, учители и други специалисти, обхванати в това, което обикновено се мъчим да вместим в стария термин ***"извънкласна работа по математика"***.

Мисля, че като цяло е реалистично да оценим нивото на ***теоретичното осмисляне на педагогическите проблеми*** в тази област ***като начално и до известна степен фрагментарно***, въпреки че има и отделни високи постижения, и, което е едновременно интересно и важно, блестящи практически решения, които тепърва ***трябва да получат своята теоретична обосновка***.

Това състояние на нещата намира отражение и в проблемите, изучавани, решавани и осмисляни в настоящата дисертация.

То обяснява комбинацията от ***интуитивно***, базиращо се на ***практически опит*** третиране на реални и важни за приложенията проблеми със стремежа към ***изработване на съвременен статистически и компютърен инструментариум за измерване и оценяване на количествени характеристики***, които да послужат за ***обективна научна обосновка на изводите***.

Интуитивен е в основата си подходът към проблемите на подбора и решаването на задачите. Опирайки са на интуиция и ***теоретичен анализ***, във втора и трета глава изучавам няколко актуални методически проблема и обосновавам предложения за тяхното решаване.

На създаване на методики за ***количествено измерване и оценяване*** на статистически параметри от оценките на резултатите на участниците в състезания и на приложенията им за получаване на съдържателни ***качествени интерпретации*** са посветени част от втората глава и последната, четвърта глава от дисертационния труд.

§ 3. Обект на изследване и цели на дисертацията

Обект на изследване в дисертационния труд са изявените в областта на математиката ученици.

Предмет на изследване са задачите за математически състезания, включително проблеми на подбора, подготовката за решаването им и на използването им като инструмент за изследване на изявените ученици.

Теоретични цели на дисертацията:

1. Анализ на основни проблеми на подбора на задачи за математически състезания.

2. Изясняване на възможностите за засилване на мотивиращото действие на задачите върху изявените ученици.

3. Анализ на възможните подходи за избор на дистрактори при задачи с избираем отговор.

4. Анализ на особеностите на двата основни вида тестове: диагностични и състезателни.

5. Изграждане на концепция за оценяване на трудността на задачите в тест от задачи с избираем отговор.

6. Изграждане на концепция за изследване на корелацията между резултатите на изявени ученици в отделни области на математиката.

7. Изследване на възможността системният стремеж към обобщения да бъде използван за творчески стимул.

8. Изграждане на концепция за специализирано пособие за изявени ученици, обслужващо финалния етап от подготовката им за състезания от висок ранг.

9. Изграждане на концепция за изследване на рисковото поведение на изявени ученици в зависимост от пола и възрастта им.

Практико-приложни цели:

1. Разработване на темата "Хомотетия" в два варианта с различно предназначение.

2. Разработване на темата "Дискретна оптимизация" за пособие за финална подготовка на изявени ученици.

3. Оценка на трудността на задачите в състезателния тест на Турнира "Черноризец Храбър" през 1994 г.

4. Изследване на корелацията между постиженията на участниците в Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. по отделни области на математиката (аритметика, алгебра, геометрия, информатика).

5. Изследване на склонността към риск у състезателите от Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. в зависимост от пол и възраст.

Основната теза в дисертацията е, че задачите са основна методическа единица в обучението на изявените ученици и могат и трябва да се използват по подходящ начин за засилване на стимулите и мотивацията за работа на изявените ученици и за създаване на инструментариум за различни изследвания.

§ 4. Съдържание на дисертацията

Математическите състезания и подготовката за тях не са самоцел – те са преди всичко средство за стимулиране на обучението (и в по-широк аспект – развитието) на учениците с математически способности. Затова логично е третираните в настоящата дисертация проблеми да стъпят на фундамента, изграден в педагогическите и психологически изследвания, свързани с надареността и таланта, с тяхното откриване и стимулиране, с проблемите на творчеството и мотивацията.

Първа глава на дисертацията разглежда проблемите на откриването и обучението на талантливите (по математика) ученици в контекста на съответните ***общи теории в психологията и педагогиката*** и разкрива както важни връзки с тях, така и специфични особености, които излизат извън съществуващите теоретични рамки.

Дефинирането и уточняването на ***основните*** за дисертацията ***категории: изявени ученици, математически състезания и задачи за състезания***, започва още от § 1. Там е изтъкната ролята на състезанията като свързващо звено между другите две споменати по-горе категории.

Понеже провеждането на състезанията се осъществява с образователни цели и обслужва обучението на участниците, то задачите се оказват един от инструментите в това обучение.

В § 1 е поставен акцент върху една важна особеност на предложеното в дисертацията изследване. То има за предмет задачите за състезания; но ние се интересуваме преди всичко от въздействието, което се оказва или би могло да се оказва чрез тях върху обучението на изявените ученици. Самото математическо съдържание на задачите и мястото им в математиката са важни дотолкова, доколкото чрез тях влияем върху процеса на обучение и в крайна сметка върху резултатите от този процес.

Тази гледна точка е важна. Тя обосновава защо изявените ученици са обект на нашето изследване. Задачите за състезания са негов предмет, а олимпиадите (състезанията) като едно от свързващите звена между изявените ученици и задачите за състезания също присъстват в полезрението на това изследване.

В § 2 е дефинирана ключовата за настоящия труд категория “изявени ученици”. В нея централно място заемат две компоненти: едната можем да определим като “естествени заложби”, “дарба”, “талант” на ученика, а другата се разкрива чрез неговото поведение, неговите реакции към процесите, в които има степен и вид избирателна активност, т.е. в зависимост от това дали той посещава кръжок по математика, участва в състезания, ползва допълнителна литература извън учебниците и други подобни.

Тази картина е съвсем обща, затова по-нататък в § 2 е дадено по-пълно и аналитично представяне на категорията “изявен ученик”. То се базира преди всичко на развитите в психологията теории за надареността и таланта, които там отдавна са предмет на изучаване. Обърнато е внимание, че много от теориите и формулировките, приети като задоволителни в общите случаи, имат ограничена приложимост при важни въпроси от областта на математическото творчество, следователно и при конкретното изучаване на математическия талант.

По-нататък в § 2 следва обзор на теориите за надареност и талант в психологията, върху елементи на които стъпва категорията “изявени ученици”. Разгледани са някои от основните понятия в тези теории като “талант”, “надарен човек”, “концепция за надареност” (**Passow** 1981 с. 5, **Рубинщейн** 1976 с. 146, **Крысько** 1999 с. 172 **Десев** 1999 с. 581, **Пирьов** 1975 с. 162, **Saul** 1999 с. 83 и др.).

Срещаните в литературата описания и характеристики на понятията “надарени ученици” и “талантливи ученици” са доста общи и, в голяма степен, относителни; някои от факторите, които обуславят тези характеристики, също са маркирани в § 2.

Очертани са и противоречивите оценки на водещите учени в психологията и психометрията за характера и степента на връзките на надареността и “коефициента на интелигентност” (***Intelligence Quotent – IQ***), отразени в научната полемика (**Terman** 1926; **Terman** 1954; **Terman & Oden** 1959, **Wallace & Pierce** 1992 с. 5, **Toscano** 1956 с. 57, **Patton** 1992, **Torrance** 1975, **Wallach**1976 и др.).

В § 2 е посочен пример, чиято цел е да покаже разминаването на изводите на общата теория (**Wallach**1976) с наблюдаваните факти в практиката на математическите олимпиади. Чрез него и съпътстващите обяснения е обоснована необходимостта от внимателно и критично прилагане на общите теории към обучението на изявените по математика ученици.

Талантът често се разглежда като творческа надареност, т.е. като комбинация от естествени заложби и активно отношение (стремеж) към тяхната реализация. В съответствие с конкретното естество на обсъжданите в дисертацията проблеми въпроси обаче ***е предпочетен терминът "изявени ученици".*** Той предполага и (пасивно) наличие на способности, и (активен) стремеж към реализацията им чрез форми на състезания и допълнително (извън рамките на учебната програма) обучение. С използването му се избягват някои нюанси, с които са натоварени традиционните термини.

Така наред с разгледаните вече теоретични постановки за талант, надареност, способности, за очертаване на категорията "изявени ученици" е необходимо уточняване на "изявите", които трябва да им бъдат присъщи. Затова в § 2 са изброени основните характеристики, които трябва да са налице в живота на един ученик с математически способности (или "***надарен ученик***"), за да бъде този ученик класифициран като ***изявен.*** Казано накратко, ***изявеният ученик*** съчетава ***два типа качества***: едните са свързани с ***математическа надареност*** (талант, способности), а другите – с проявената активност за реализиране и усъвършенстване на тази надареност.

В § 3 една от целите на изложението е да се обоснове тезата, че чрез математическите състезания в страната ни, а и в повечето европейски и други водещи държави в света се ***създава и поддържа среда и ситуация за изява на надарените (талантливите, способните) ученици. В нея и чрез нея те се превръщат в изявени ученици*** – надарени ученици, търсещи изява и реализация.

Друга важна цел на направения в § 3 анализ е да покаже дълбочинните връзки между селекцията и мотивацията при съвременните форми на работа с изявените ученици и да обоснове схващането, че процесът на продължаваща в цялата училищна възраст от III – IV клас селекция на учениците с математически способности е и един от мощните стимули за продължаване и интензификация на интересите и усилията за усъвършенстване на математическите им познания. Оттук логично следва основният за § 3 извод, че системата на състезания по математика през училищната възраст на децата влияе и става стимулиращ и мотивиращ елемент в допълнителното (извънкласно) обучение по математика.

§ 4 на първа глава предлага преглед и анализ на онези ***теоретични постановки, свързани с мотивацията*** и нейното формиране, които имат фундаментална роля за разискваната в дисертацията проблематика. Отбелязани са двете основни групи теории: ***съдържателни***, според които мотивацията е резултат от действието на вътрешни фактори – потребностите, които подбуждат човека към действия за тяхното удовлетворяване, и ***процесни***, в които основната идея е, че мотивирането е процес, който е обусловен от очакване, от интерес, от поставяне на цели, от вложени усилия, способности, умения, от характера, от спецификата на дейността и др. Сред публикациите, оформящи използваната в дисертацията теоретична основа, трябва да бъдат отбелязани (**Выготский** 1984), (**Литълуд** 1986), (**Маслоу** 2001), (**Христов** 1999), (**Klamkin** 1994), (**Андреев** 1996), (**Величков** 1989), (**Купер** 2000) и (**Леонтиев** 1978).

Категоричен е фактът, че мотивацията е един от силните фактори за успехите на изявените ученици (***Крумов*** 1985; ***Петков*** 1988; ***Кликс*** 1985 с. 212). Една от целите на разсъжденията в § 4 е да се обоснове заключението, че степента (нивото) на мотивация е значим елемент, чието регулиране подобрява резултатите от обучението на изявените ученици.

Отчитайки видовете мотивация: низша и висша (**Десев** 1999 с. 291), близка (или кратка) и далечна (**Десев** 1999 с. 291), външна и вътрешна (**Величков** 1989 с. 12-13), § 4 цели да представи от гледна точка на работата с изявените ученици връзката и преплитането на близка и далечна мотивация и преливането на първата във втората, както и аналогични явления при външната и вътрешна мотивация. Обърнато е внимание на един специфичен проблем "с обратен знак", който се появява у някои изявени ученици при засилена вътрешна към нещо интересно, но маловажно. Как да потиснем такава мотивация, за да "отворим простор" за мотивация към по-съществени проблеми? С други думи, как да се пренасочи "дребнотемието" в интересите на ученика към по-значима тематика? В § 4 се предлага отговор на този въпрос да бъде потърсен в практиката, тъй като поредица примери показват, че в подобни случаи ***трансформираща роля могат да играят задачите***.

Някои от конкретните особености фундаменталния проблем за създаване, поддържане, контролиране и регулиране на мотивацията на изявени ученици за занимания и творчество в математиката придобиват по-ярки очертания в светлината на бихевиористичната теория за мотивацията. Това се дължи на ударението, което ***бихевиоризмът*** поставя върху ролята на ***потребностите, целите и възнагражденията.***

В § 4 е изложено схващането, че ролята на такива възнаграждения в системата за обучение, в която състезанията са основен елемент, се поема от ***победите*** в състезанията (респективно челното класиране) ***и наградите*** за победителите. От тази гледна точка е изтъкнато значението на международните състезания по математика и в частност на международните олимпиади по математика, които по авторитет са своеобразни "върхове" сред множеството състезания и структурират в това множество система с определена ***йерархия***. Тази йерархия в доста случаи е конкретно очертана: за да достигне до участие в международна олимпиада, изявеният ученик трябва да е сред победителите на национална олимпиада. От своя страна националните олимпиади имат своя собствена йерархия.

Така тези разсъждения в § 4 обосновават извода, че ***йерархичната система на състезанията създава и съответна йерархична система на наградите***. Следователно от гледна точка на бихевиоризма тя предлага йерархично изградена система за мотивиране на изявените ученици.

В § 4 важна роля е отредена и на анализа на мотивацията на изявените ученици от гледна точка на съдържателните и процесуалните теории за мотивацията. Целта му е обосновка на тезата, че при мотивацията на изявените ученици се наблюдават елементи, които изразяват:

А) конкретни прояви на ***потребност*** или на ***вътрешна подбуда***; чувства, ***стремежи***, влечения, мечти; ***насоченост и готовност за действие***;

Б) процес, който е обусловен от очакване, от ***интерес***, поставяне на ***цели***, от вложени ***усилия***, способности, умения, от характера и спецификата на дейността и др.

Първата група елементи, описани в А), има най-добра теоретична интерпретация в съдържателните теории, а втората, от групата Б) – в процесуалните. Те обаче участват ***едновременно*** в обучението на изявените ученици. На тази констатация се отрежда важна роля, защото, разглеждайки мотивацията на изявените ученици във всеки конкретен случай като сложен комплекс от различни компоненти, можем да изследваме тези компоненти поотделно. След това се изучават и взаимодействието и взаимното влияние в рамките на комплекса, в който те реално съществуват.

Друга важна категория, описана и анализирана в *първа глава*, са ***"задачите за състезания".*** Те са *основен "носител" на математиката в* *обучението на изявените ученици*. Това предопределя тяхната изключителна роля в процеса на обучение, и от тази гледна точка на преден план излиза математическото съдържание на задачите. Затова логично в § 5 вниманието се насочва към още един фактор, който е изключително важен: подборът и качеството на задачите, с които се срещат учениците на състезания и в индивидуалната си подготовка.

Разсъжденията и изводите от § 5 на първа глава дават теоретична обосновка на практическата важност на три от целите, които са поставени в настоящия труд:

- Изграждане на концепция за специализирано пособие за изявени ученици, обслужващо финалния етап от подготовката им за състезания от висок ранг.

- Разработване на темата "Хомотетия" в два варианта с различно предназначение.

- Разработване на темата "Дискретна оптимизация" за пособие за финална подготовка на изявени ученици.

За изясняване и оформане на концепцията за визираното пособие служи развитата в § 5 на първа глава обосновка на тезата, че оптимизацията на съвкупността от задачи, с които се занимава изявеният ученик в хода на обучението си, е един от най-важните елементи на цялостния учебен процеси, че от избора на задачите в голяма степен се определя нивото, на което ще бъде изведен ученикът в края на процеса; че на оптимизация подлежи и математическото съдържание на "комплекта задачи", използван в подготовката; и, макар и това да не е достатъчно очевидно, че на оптимизация подлежи и нематематическото въздействие (емоционално, естетическо и др.), което задачите оказват на учениците.

Така в § 5 се достига до извода, че усъвършенстването на задачите поотделно и в комплект, като единни "обучаващи модули", е много важно. На практика към него са насочени и изключителни много усилия. То е и във фокуса на представеното изследване.

За да може да правим научно издържан теоретичен анализ на проблемите около използването на задачите за състезания в обучението на изявените ученици, трябва преди всичко да разполагаме с достатъчно точна дефиниция на категорията "задача за състезание". В § 5 такава е предложена на базата на описанието на категорията "математическа задача", предложено от Иван Ганчев (**Ганчев** 1976).

Отбелязано е, че за да се осмисли терминът "задача за състезание", от формална гледна точка би било достатъчно да се каже, че такива са задачите, включвани в темите на състезания, и задачите, включени в утвърдени "олимпиадни сборници". От съдържателна гледна точка обаче за основни признаци, по които се разпознават състезателните задачи, се считат тяхната "трудност" и "нестандартност".

Нестандартност означава, че такъв тип задачи не се среща в училищните учебници и сборници и че решаването им не се свежда единствено до формално прилагане на методите и алгоритмите, изучавани в училище.

В § 5 са формулирани и други изисквания, които обикновено се предявяват към задачите за състезания; чрез тях фактически се дава най-общо описание на този клас от задачи.

В § 5 са изведени на преден план и други важни функции на задачите за състезания, която няма пряко отношение към обучението на изявените ученици: *селекция и ранжиране.* В съвременната система на математическите състезания задачите като съставна част на "оценъчния инструментариум" играят ключова роля. От тях (от техния избор, формулировка, принципи и скала за оценяване) зависи прецизността на оценките. От своя страна тази прецизност е стожерът, на който се опира доверието към обективността на класирането на участниците в математически състезания. Следва *изрично да подчертаем, че погрешните и неадекватни оценки са изключително силен отрицателен, демотивиращ фактор*, който може да сведе до нула интереса на учениците към допълнителни занимания с математика.

Затова изработването (съставянето) както на отделни задачи за състезания, така и на състезателни теми, е трудна и изключително отговорна задача, изискваща познания и опит. От нея зависи в голяма степен функционирането на цялата система за селекция, мотивиране и обучение на изявените ученици.

При изработване и планиране на методика на каквото и да е обучение един от ключовите въпроси е за правилно определяне на трудността на отделните елементи на учебното съдържание. От трудността на дадена методическа единица зависят усилията, които трябва да бъдат положени за нейното овладяване, а те, от своя страна, диктуват времето, което трябва да ѝ се посвети. Определянето на трудността е важна при използването на задачи в обучението по математика на ученици въобще; но тя е особено важна при обучението на изявените ученици. Затова на категорията "трудност на задача" в настоящия труд е отделено особено внимание.

Още в § 5 започва обсъждането на възможните подходи за определяне на "трудността": о*т гледна точка на даден индивид* - чрез усилията, които той трябва да положи за решаването й (или чрез времето, което е необходимо на индивида да намери подробен алгоритъм за решаване). Когато разглеждаме обучението на изявените ученици, понятието "трудна задача" обикновено носи смисъл на "трудна за изявените ученици задача".

Какво означава тази формулировка?

В рамките на настоящото изследване ние приемаме, че средната трудност на задачата се определя от средното количество усилия, необходимо на изявен ученик за решаването й. Тя би могла да се характеризира и със средното време, изразходвано от изявен ученик за получаване на решение, или със средното време, изразходвано от изявен ученик за намиране на подробен алгоритъм за решаване.

При тази постановка *категорията трудност на задача се интерпретира като "средна трудност"*.

Измерването на средната трудност на задача е много трудно, за някои задачи даже неосъществимо. Затова § 5 насочва вниманието към приблизителни методи за определяне на средната трудност. Често пъти за удобство се възприемат и разглеждат различни формални дефиниции на понятието "трудност", които всъщност представляват приближения на формулираната по-горе "средна трудност".

Както вече отбелязахме, в методиката на математиката "трудност на задача" е ключово понятие. Затова е напълно естествено, че проблемите за определянето на трудността на задачите отдавна са обект на вниманието на специалистите. Теоретична основа за настоящото изследване са теориите, изложени в монографиите на Крупич (**Крупич** 1995) и на българския педагог Иван Ганчев (**Ганчев** 1976). Те са по-подходящи за задачи от типа на тези, които се използват в училищния курс по математика. Задачите за състезания имат своя специфика. В съответствие с това в § 5 на дисертацията е разработен съответен подход към категорията "трудност на задача" (**Kenderov & Tabov** 1990) и (**Табов и Велев** 1996) и е предложена дефиниция на понятието "трудност", която би могла да бъде характеризирана като *"евристична"*.

Именно *евристични елементи* лежат в основата на интерпретацията на процеса на творчество не само при решаването на задачи, но и в математиката въобще. *Творчеството в математиката предполага комбинация на разнообразни понятия и техники, разработени в математическите теории, така че в тази комбинация да са включени и различни евристични елементи*, които изискват досещане в мащаби и размери, достъпни на малцина.

Затова е естествено, че идеите на математическата статистика са в основата на възприетия в настоящото изследване подход към категорията "трудност на задача": грубо казано, *от две задачи по-трудна е онази, която се решава по-бавно и от по-малък брой ученици*. За подобна преценка е необходимо дадените задачи да са решавани от голям брой ученици, които представляват представителна извадка за съвкупността на учениците.

Първа глава завършва с анализ на целите на изследването, представено в дисертацията.

В следващите глави преминаваме от чисто теоретични постановки и общи насоки към осъществяване на поставените конкретни теоретични и практически цели.

Втора глава е посветена на проблеми на подбора и подготовката на задачи за състезания.

Първият разгледан кръг от въпроси включва тематиката на задачите за състезания и тенденциите на изменението ѝ във времето. Като най-голям "законодател" на модата в тематиката на работата с изявени ученици са посочени международните олимпиади по математика (МОМ): областите на математиката, от които се избират задачи в състезателните теми на МОМ, стават задължителен обект на внимание на ученици и учители при подготовката за състезания, и овладяването им е съответно важен елемент на "тренировки", работа в кръжоци, школи и др. В § 1 на втора глава са посочени някои такива области и причините, поради които те са привлекли вниманието на специалистите.

Същият § 1 предлага анализ и на някои негативни страни в изменението на тематиката на задачите, давани на МОМ. Те са свързани с привличането на нови ученици в кръга на изявените. Обоснована е тезата, че разширяването на тематиката на състезателните задачи далече извън кръга на учебното съдържание в училищата затруднява "откриването на талант" във възраст 17-18 г., докато практиката показва, че не малко от най-стойностните дарования са се проявили именно в тази възраст. Една добра система за селекция трябва да отчита подобно развитие на способностите на учениците и да дава възможност в нея да намерят реализация и "закъснелите таланти" (**Сорос** 1995 с. 305-306).

По-нататък в § 1 на втора глава вниманието се съсредоточава върху проблемите, които възникват пред журито на едно състезание, което вече има на разположение един списък от задачи, и трябва на базата на този списък да състави състезателна тема. На какво трябва да бъде подчинен изборът на задачите за състезанието? В § 1 са описани най-важните изисквания към избраните задачи. Две от тях са свързани с трудността на задачите и на темата като цяло.

Така отново в изследването се сблъскваме с необходимостта да анализираме определени аспекти на категорията "трудност на задача", този път те са свързани с проблеми на априорното оценяване на трудността.

При композирането на състезателна тема след изясняване на априорната трудност на отделните задачи доста често се оказва, че подбраните задачи оформят "трудна тема". Може ли задачите да се модифицират (изменят, преформулират) така, че трудността да стане по-подходяща? Кръгът от проблеми в духа на този въпрос (**Ганчев** 1976 с. 15) е сред обсъдените в § 1. Посочени са примери, които илюстрират общи идеи за промяна на трудността на отделните задачи и оттам на състезателната тема като цяло.

§ 2 на втора глава е посветен на проблемите на формулирането на задачи за състезания; акцентът е поставен върху *подготовката на задачи с избираем отговор*. Специално внимание е отделено и на връзките между математиката и хуманитарните науки и на хуманизацията на състезателните задачи (общо за хуманизацията вж. (**Марев** и **Иванов** 1995 с. 15)).

Централен момент в проблематиката на § 2 заема анализът на особеностите на задачите с избираем отговор в зависимост от предназначението на теста, в който трябва да бъдат включени. От гледна точка на "изработването" на формулировките на задачи с избираем отговор те засягат избора на дистракторите (неверните отговори). От гледна точка на оценяването принципната разлика е във възприетия начин на "точкуване" на теста, и по-специално на задачите, в които решаващият не е посочил отговор.

Този анализ насочва към класификация на тестовете от задачи с избираем отговор в две групи: ***диагностични*** (в тях непосочен отговор се оценява като грешен) и ***състезателни*** (в тях непосочен отговор се оценява с междинна оценка; ако приемем, че грешните отговори се оценяват с 0 точки, то оценката за непосочен отговор се избира от 20 % до 50 % от оценката за верен отговор).

Този нюанс в схемата за оценка на отговорите прави тестовете ***различни по цели*** (оттам и на поле на приложение) ***и съставяне*** (в частност по избор и на самите задачи, и на дистракторите в тях).

Забележка. Термините ***"диагностични"*** и ***"състезателни"*** в смисъла на приведените дефиниции се използват в практиката, но не са общоприети. Тук се придържаме към тях за удобство.

В § 2 подробно са анализирани основните разлики между тези два типа тестове. Анализът има за цел да покаже, че при диагностичните тестове отчетеният за всеки реален ученик ***резултатът е сбор от две компоненти***: едната отразява ***показаните знания***, другата е ***случайна величина***, резултат от късмет, нещо като хвърляне на своеобразен зар или игра на тотализатор.

Тъй като случайната компонента не е малка, ние ***не можем да получим*** от резултатите на този тест ***обективно подреждане*** на участниците в него по "знания", или по показани истински, реални резултати.

Целта на изложените в § 2 подробни съображения е да докажат, че диагностични тестове не може да бъдат използвани за "честно" и обективно състезание между участниците.

На базата на този извод в § 2 се разграничават случаите, в които е целесъобразно да се прилагат тестове от единия или другия от посочените типове, и се стига до извода, че типичната ситуация, в която ***прилагането на диагностични тестове е целесъобразно, е за преценка на средното ниво*** на определен вид знания за група ученици, и че ***диагностичните тестове не са подходящи за състезателни цели.***

След изясняването на спецификата на състезателните тестове, в § 3 на втора глава се прави задълбочен анализ на най-деликатния елемент на съставянето на задачи за такива тестове: избора на дистрактори. Достига се до извода, че ***в контекста на състезателните тестове обаче основното правило: дистракторите да отразяват типични грешки, допускани от учениците при решаването на задачите, е погрешно.***

В § 4 на втора глава е развита концепция за оценка на трудността на задачите за състезания, която след това е конкретизирана за случаите на тестовете с избираем отговор и е приложена за практическа оценка на трудността на задачите от математическия турнир "Черноризец Храбър" '94.

Въпросната концепция е изградена на базата на подробен анализ на категорията "трудност на задача" и на обогатяването ѝ с нови елементи, които я правят и по-близка до интуитивната "евристична" представа за трудност, и по-удобна за прилагане на съвременни технологии за количествени оценки и сравнения ((**Крупич** 1995), (**Ганчев** 1976), (**Kenderov & Tabov** 1990), (**Табов и Велев** 1996)). В нея е реализирана следната идея: една задача е по-трудна от друга, ако, грубо казано, е решена от по-малко участници.

Практическото изследване на трудността на задачите в Турнира "Черноризец Храбър" '94 дава отговор на няколко въпроса:

- Ако желаем да ***използваме повторно*** темата, целесъобразно ли е ***да се измени наредбата на задачите*** в нея?
- Ако отговорът е да, каква е конкретната препоръка? С други думи, препоръчителна ли е промяна в априорната оценка на трудността на отделните задачи?
- ***Би ли се повлияло класирането на участниците от една преоценка на трудността на задачите*** по резултатите от турнира?
- Този въпрос може да се разгледа в по-общ контекст, така че формулировката му да еволюира до следната форма: Възможно ли е ***да се определя трудността на задачите в едно математическо състезание по статистически характеристики, изчислявани чрез резултатите от него***, като по този начин да се постигне по-коректно класиране?

В § 5 на втора глава нашето изследване се насочва към интересния и важен за практиката проблем за съчетаването на задачи в тест. В него централно място заема дискриминационният фактор като "лакмус" за определяне на "близостта" на дадена задача към "основното русло" на определен състезателен тест.

Както знаем, конструкцията на масово разпространените ***диагностични тестове предполага взаимосвързаност между съставящите теста задачи, така че да осигурява валидност на резултатите***, т.е. резултатите наистина да измерват онези параметри, които са обявени за обект на диагностициране (**Бижков** 1995).

Формален показател за обвързаността на всяка една от задачите с теста като цяло е нейният така наречен "***дискриминационен фактор***" (или "дискриминативна сила"). Това е число, което се пресмята от резултатите на учениците при провеждане на теста. ***Голям дискриминационен фактор означава добра обвързаност на дадената задача с теста***; с други думи, задача с голям дискриминационен фактор измерва нещо близко до това, което измерва и тестът като цяло.

Предложеният в § 5 на втора глава анализ води до заключението, че за разлика от диагностичните тестове, при ***тестове с широк спектър***, в които са включени разнородни въпроси от различни области на знанието – а такива са състезателните тестове - обичайната ***оценка и елиминиране на задачи на базата на дискриминационен фактор води до неправилни изводи и резултати и не следва да се прилага***.

С известно приближение може да се каже, че дискриминационният фактор на дадена задача изразява някакъв вид корелация на резултатите за тази задача и резултатите за теста като цяло. Затова изследването за ***корелации между групи задачи,*** описано в § 6 на втора глава, продължава и обобщава проблематиката, свързана с дискриминационния фактор и приложенията му.

От полза ли са знанията по аритметика при решаване на задачи по геометрия? На този въпрос би могло да се отговори: да, донякъде; поне е ясно, че познаването на аритметиката не пречи за решаване на задачи по геометрия.

Обектът на изследването на проблеми от този тип, представено в § 6, обхваща:

1) Резултатите на участниците от XI-XII клас в Турнира "Черноризец Храбър", проведен на 1.11.2002 г., по задачи;

2) Четири групи задачи, които участват в състезателния тест, а именно: 1. алгебра, 2. Геометрия, 3. аритметика (теория на числата) и 4. информатика;

3) Стандартните инструменти на продукта Excel за изследване на корелации.

Изследването беше осъществено от автора на тази дисертация съвместно с Емил Келеведжиев; доколкото ми е известно, то е ***новост в световната практика***.

Първоначалната цел на изследването *беше да установи съществуването или отсъствието на корелации между резултатите на участниците*, **пресметнати** *върху отделните четири изброени по-горе групи задачи*. **Например, има ли корелация** между резултатите на участниците, пресметнати за групата задачи по ***аритметика***, с резултатите на участниците, пресметнати за групата задачи по ***информатика?*** Търсихме отговор на същия въпрос и за другите двойки области на математиката: по алгебра и геометрия, по геометрия и информатика и т.н.

Изследването показа съществуване на ***средно изразена корелация между резултатите по аритметика*** (1. група) ***и алгебра*** (3. група).

Интересен резултат се получи при търсенето на корелация между резултатите по ***аритметика*** (1. група) ***и информатика*** (4. група).

Стойността на параметъра на корелация в този случай е 0,42306. Тя не е достатъчно голяма, за да може да говорим за наличие на корелация – стандартният извод при тази ситуация би трябвало да бъде, че резултатите на участниците по аритметика не зависят от резултатите им по информатика и обратно. Но внимателният анализ на графичното представяне на резултатите обаче показва: от графиката следва, че ***"добрите" по аритметика ученици непременно са "добри" и по информатика***! Обратното вече в общия случай не е вярно. Тази зависимост между резултатите по аритметика и информатика би могла да бъде характеризирана като "еднопосочна корелация".

От направеното изследване произтичат два важни ***практически извода***.

1. Изводи, направени на базата само на коефициента на корелация, може да пропуснат някои интересни и значими нюанси; затова е ***желателно при анализ на корелация на огледаме и съответната графична диаграма***.
2. ***Добрата подготовка на учениците по аритметика вероятно е полезна компонента за овладяването и на информатиката***.

За изясняване на хипотезата, формулирана в последната точка, са необходими допълнителни изследвания върху по-широк кръг от ученици.

Когато става дума за задачи за математически състезания, има един въпрос, който трудно може да бъде заобиколен; макар и понякога неявно, той присъства в почти всички широкомащабни изследвания. Могат ли учениците да се справят с трудните задачи, с които ги атакуват организаторите, и как да ги подготвим, за да успеят? Казано другояче, ***как да готвим учениците за решаване на задачи за състезания?***

Това е обширна проблематика. На нея е посветена **трета глава,** където са изложени теоретичните концепции и практическите реализации на ***два проекта***, показали добри резултати при подготовката на изявени ученици и получили положителна оценка от специалистите.

§ 1 на трета глава е посветен на интересна задочна форма на работа с най-добрите български ученици от VIII до XI клас, провеждана в течение на повече от едно десетилетие под името ***"Кореспондентен кръжок".*** С някои от специфичните си особености тя е уникална в световната практика и може да се окаже прототип на бъдеща разпространена форма на обучение.

Еволюцията на Кореспондентния кръжок (КК) постепенно наложи стил, ***който наподобява днешен "чат"*** в Интернет. Ръководителите на КК поддържаха диалог както между себе си и участниците, така и между самите участници. Една от важните цели беше да бъде показан индивидуалния принос на всеки участник.

Кратко описание на някои аспекти на работата и постиженията на КК беше публикувано в едно от най-старите и авторитетни списания по дидактика на математиката – американското "School Science and Mathematics" (**Lazarov & Tabov** 1995) – и получи добри отзиви от рецензентите.

В § 1 на трета глава са отбелязани два от най-важните елементи на работата на КК: първият от тях е ***"диалоговият режим на работа"***, а вторият е свързан с ***идеята за обощения***, която се оказа силен творчески стимулатор за участниците.

§ 2 на трета глава е посветен на реализацията на втория споменат проект, който визира създаването на специфично помагало за подготовка за математически състезания. В тази област сред пособията с подобно предназначение, които се ползват с най-голям авторитет в световен мащаб, са (**Леман** 1965), (**Шклярский и др.** 1978), (**Monthly** 1977), (**Кьюршак и др.** 1976), (**Шклярский и др.** 1974), (**Сергеев** 1987) и др.

§ 2 започва с анализ на някои принципни разлики на помагалата (обикновено сборници със задачи), използвани за подготовка на изявени ученици, и традиционните училищни сборници със задачи, които в крайна сметка трябва да оформят тезата, че съществена характеристика на "олимпиадните" сборници, която ги различава от "училищните", е ***"натоварването" на решенията с много важна, практически водеща роля***.

Една от целите на § 2 е да представи кратък анализ ***на принципите на подбор и на структурата*** на традиционните олимпиадни (състезателни) пособия (сборници), и на този фон да се откроят по-релефно особеностите и новите елементи в концепцията и реализацията на пособието "Методи за решаване на задачи" (Methods of Problem Solving, съкратено МОПС или MOPS; вж. **Tabov & Taylor** 1996, **Tabov & Taylor** 2002):

1. Класификация на материала по методи.
2. Ориентация на ***пособието към особено изявените ученици*** и към онези, които биха желали да опитат да работят като тях. Пособието трябваше да обслужва подготовката за състезания от висок ранг на ученици с опит, с достатъчно много "олимпиадни" знания.
3. Стремеж към осъществяване на ***оптимизационна идея: подборът на задачите да се осъществи така, че те да "покрият" в максимална степен идеите, детайлите, конфигурациите и т.н.***, характерни за съответния метод.

Важна роля в § 2 на трета глава е определена на сравнението на разработката на темата (метода) "Хомотетия" в MOPS с разработката на същата тема в друго пособие – "Хомотетията в задачи" (**Табов** 1989). То трябва да открои принципните различия в подбора и третирането на материала в двете издания, и по-специално реализацията на споменатата по-горе характерна за MOPS ***оптимизационна идея.***

Новост в методиката на темата хомотетия е разработеният и включен и в двете цитирани пособия ***систематизиран списък*** от основни свойства на хомотетията. Той създава сигурна база, на която да стъпват приложенията на хомотетията, защото ***при решаването на конкретна задача ние се позоваваме на някое определено свойство*** (или на няколко свойства) на хомотетията.

§ 2 завършва с кратък анализ на методическите проблеми, възникнали при разработката на включената в МОПС тема "***Дискретна оптимизация***". Идеите, върху които са построени задачите от тази тема, са типични за съвременната математика, а и изобщо за съвременния научен интерес към "оптимални" стратегии, "най-правилно" поведение, "най-добри" решения и др.п., и затова обособяването и третирането им като отделна група от задачи (за пръв път в световната практика!) поставя ред методически проблеми. Те именно са очертани в анализа в края на § 2 и там са набелязани пътища за тяхното практическо решаване в пособието MOPS.

Трета глава завършва с представяне на разработката на темата "Дискретна оптимизация" в MOPS, целящо да илюстрира реализацията на намерените конкретни решения на тези проблеми .

Четвърта глава е посветена на специфичната роля, която задачите за състезания могат да играят в съвременни педагогически и психологически изследвания (Curran 1995), (Rowley and Leder 1989), (Harman & al 1993) и др. В нея е описано изследване на "поемането **на риск**" от учениците с математически способности, проведено от Д. Павлов, Е. Келеведжиев и Й. Табов.

Според Комитета по изследвания в образованието към Националната академия по образование в САЩ ***най-значимата характеристика на едно изследване е неговото качество*** **(*Gronbach, Suppes*, 69)**. Именно осигуряването на качеството на измерването е основното постижение на споменатото изследване.

В § 1 на четвърта глава представя някои принципи и конвенции за изследванията в областта на обучението по математика, разработени от международни екипи от специалисти и от специална комисия в САЩ.

Потърсено е мястото на изследването на поемането на риск от изявените ученици според разработената класификация (на Балачев, Хаусън, Сфард, Стейнбринг, Килпатрик и Серпинска в ***Balacheff, Howson, Sfard, Steinbring & Sierpinska*** 1993) на изследванията в математическото образование в зависимост от възможните **цели** в две основни направления: ***практически*** цели и ***фундаментални научни*** цели.

В § 2 на четвърта глава са представени постановката и резултатите на изследването на "**поемането на риск**" от учениците с математически способности.

Статистически погледнато, белег за **"поемането на риск"** се приема преди всичко **посочването на грешни отговори** и до известна степен по-малкия брой оставени без отговор задачи при участие в тест (или състезание) със задачи или въпроси с избираем отговор. Тази хипотеза се използва във всички провеждани до сега подобни изследвания, сред които ще посочим (**Keinan 1984**), (**Forgasz and Leder** 1991), (**Hardings** 1981), (**Anderson** 1989). На нея стъпва и нашето изследване.

Условията, при които се проведе Турнирът "Черноризец Храбър" през 2002 г., бяха много добри за подобно изследване. Участниците бяха добре мотивирани, а регламентът на Турнира предвижда "наказание" (отнемане на точки) при посочване на грешен отговор, което прави допускането на грешки "рисково" за тях. Това вече създава добра база за получаване на точни резултати.

Основните резултатите от изследването сочат, че "поемането на риск" е най-разпространено сред най-малките по възраст участници, от 3-4 клас. В следващата група – на учениците от 5–6 клас, данните сочат **скокообразно спадане на поемането на риск**. Тенденцията на **спад в рисковото поведение** продължава и в следващите възрастови групи, но тя вече е по-плавна. При прехода от 9–10 клас към 11–12 клас се наблюдава почти **пълна стабилизация**.

Една от целите, които преследва представянето в § 4 на изследването на поемането на риск от изявените ученици е да покаже, че на базата на задачите в състезателните тестове може да се създаде добър инструментариум за разнообразни изследвания, главно с педагогическа и психологическа насоченост. Те бележат първи стъпки в това направление у нас и са едни от първите и в световната практика.

Дисертационният труд завършва със заключение, което подчертава специфичните особености на математическото обучение на изявените (по математика) ученици и насочва вниманието към необходимостта от специални изследвания и теоретични разработки в тази област.

Първа глава

Изявени ученици и задачи за състезания

§ 1. Триадата изявени ученици – математически състезания – задачи за състезания

От формална гледна точка задачите за математически състезания са елементи от изяви за ученици, известни като олимпиади и математически състезания. Като такива елементи те са подчинени на ролята, която са призвани да играят самите олимпиади и състезания.

Би било наивно да се подведем по названията "състезание" и олимпиада", за да мислим, че зад тези думи се крият чисто или почти чисто спортни инициативи. Практиката им надвусмислено показва, че те са тясно свързани с обучението на участниците в тях. Така математическите състезания обслужват обучението по математика на определена група от ученици, които участват в тези състезания.

За да се разбере ролята, която играят задачите, трябва да се подчертае още нещо извънредно важно: по време на състезания реалният "допир" на учениците с математиката се осъществява чрез задачи; те са практически единствената еманация на математиката и става ясно, че от тях в най-голяма степен зависи осъществяването на целите на самите състезания.

Така се очертава педагогическа "триада" с елементи:

- група ученици – участници в математически състезания, които наричаме "изявени";
- математически състезания;
- задачи за математически състезания.

Вече стана дума, че математическите състезания са тясно свързани с обучението по математика на участниците в тях – на изявените ученици. Следователно самото им провеждане се осъществява с образователни цели; то обслужва обучението на участниците.

Така се очертава граница в предложеното изследване. То има за предмет задачите за състезания; интересуваме се преди всичко от въздействието, което се оказва или би могло да се оказва чрез тях върху обучението на изявените ученици. Самото математическо съдържание на задачите и мястото им в математиката са важни дотолкова, доколкото чрез тях влияем върху процеса на обучение и в крайна сметка върху резултатите от този процес.

Тази гледна точка превръща изявените ученици в пряк обект на изследването. Задачите за състезания стават негов предмет, а олимпиадите (състезанията) като едно от свързващите звена между изявените ученици и задачите за състезания също попадат в полезрението на това изследване.

Изясняването на същността на отделните елементи в триадата и на връзките между тях е основополагащо за конкретните въпроси, разгледани в дисертацията. "Що е изявен ученик?", "какво се преследва със състезанията по математика?", "що е задача за състезание (олимпиада)?" и т.н. трябва да бъдат разгледани по-задълбочено. Това улеснява разглеждането на специфичните въпроси за мястото на задачите в триадата и за начините, по които те влияят върху целите на математическите състезания – по тази логика и върху самото обучение на изявените ученици.

§ 2. Категорията изявени ученици

Най-общо оценено, изявеният е ученик, който е активен, изявява се често и прави впечатление. Тук има два различни компонента: единия бихме могли да определим като "естествени заложби", "дарба", "талант" на ученика, а другия – чрез неговото поведение, неговите реакции към процесите, в които има степен и вид избирателна активност, т.е. в зависимост от това дали той посещава кръжок по математика, участва в състезания, ползва допълнителна литература извън учебниците и други подобни.

Очертаната картина налага по-пълно и аналитично представяне на категорията "изявен ученик" и това е направено в следващите редове.

2-1. Способност и талант (първо приближение)

В психологията надареността и талантът отдавна са предмет на изучаване. Разработени са теории и са изяснени същността и връзките на различни явления, качества и процеси, свързани с талант, творчество, изява и др. п. Трябва обаче да се подчертае, че много от теориите и формулировките, приети като задоволителни в общите случаи, имат ограничена приложимост при важни въпроси от областта на математическото творчество, следователно и при конкретното изучаване на математическия талант.

Причините за ограничената им приложимост може да се анализират в различни аспекти. Маркираме само едно достатъчно ярко и нагледно съображение, с оглед на конкретната изследователска задача.

Да си представим талантлив спортист и талантлив математик. Понятието "талантлив" обединява тези две личности, и от гледна точка на психологията те имат много общи качества. Очевидно е, че в описанието на "математически талант" и "спортен талант" влизат и качества, които са важни, но и специфични за единия от тях и без особено значение за другия. Своя специфика имат и "поетичният талант", "музикалният талант", и т.н.

Затова, когато характеризираме "математически талант", имаме предвид както общи постановки и теории, така и случаи, когато трябва да излезем извън техните рамки, да ги конкретизираме, да ги уточним и модифицираме.

Обикновено термините "талантливи" (за ученици), "надарени", "изявени" се употребяват като синоними, независимо, че в някои случаи се посочват и разлики между тях.

2-2. Способност и талант – теоретичен обзор

Още през 1868 г. У. Харис въвежда основните понятия, с които се характеризира творческата личност на ученици с "висока интелигентност, които могат да постигнат успехи в училище". Тези понятия създават научна основа и тяхното описание се определя като "дефиниция на таланта", "определение за надарен човек", "концепция за надареност" (**Passow** 1981 с. 5). В съвременната психология понятието "надареност" означава:

- "единство, съвкупност от всички данни на човека, от които зависи продуктивността на неговата дейност; тук се включват не само интелектът, но и всички други свойства и особености на личността, в частност на емоционалната сфера, темперамента, тонуса, емоционалната впечатлителност, темпа на дейността" **(Рубинщейн** 1976 с. 146).

- съвкупност от общи и специални способности, свойствени на конкретния човек (**Крысько** 1999 с. 172).

Понятието талант изразява:

- "най-благоприятно съчетание на способности, което дава възможност на субекта за новаторско, оригинално, уникално решаване на поставен проблем, за производство на ценности, продукти, отличаващи се с оригиналност, високо съвършенство и безспорна обществена значимост" (**Десев** 1999 с. 581).

- "по-висока степен в развитието на способностите" и "по-сложната им структура" (**Пирьов** 1975 с. 162); "талантливият математик е по-ефективен от надарения" (**Saul** 1999 с. 83);

- "достигане на връх най-често в границите на достижимото (нормалното) (**Десев** 1999 с. 581).

Приведените описания и характеристики на понятията "надарени ученици" и "талантливи ученици" са по-общи и, в голяма степен, относителни. Това се дължи на различни фактори, сред които отбелязвам следните три:

1. Тези ученици не са хомогенна група, защото всеки от тях е ***уникален***, "автентичен", различен, неповторим (**Clark** 1988 с. 122-123); надарените ученици се различават един от друг толкова, колкото те самите се различават от обикновения ученик (**Lovecky** 1992 с. 20; **Reis & Small** 1995 с. 24).

2. Те се различават от останалите ученици, например "по силното ядро от личностни характеристики", които им помагат "да се преборят, за да докажат своите възможности и своето майсторство в дадена област" (**Csikszentmihalyi & others** 1993 с.82; **Renzulli** 1986; **Renzulli** 1988).

3. Някои личностни качества са характерни за определен пол. Например девойките са емоционално по-стабилни, предвидими в действията си, обичат да обосновават твърденията си със силни аргументи, предпочитат да поемат физически риск и изпитват силна нужда от обществено признание **Csikszentmihalyi & others** 1993 с. 102).

Много изследователи се опитват да изброят всички характеристики на надарените ученици. Затова броят на тези качества непрекъснато расте. Например в 19-то издание на годишника на Националното Общество за изследване на образованието в САЩ са отбелязани 163 качества, а в 23-то издание те са вече 453 (**Passow** 1981 с. 5).

От 1916 г. основното течение от учени в психологията и психометрията следват стъпките на Л. Терман (**Terman** 1926; **Terman** 1954; **Terman & Oden** 1959) и измерват надареността с висок коефициент на интелигентност (***Intelligence Quotent – IQ***). Но наред с това авторитетни изследователи – Дж. Рензули, С. Рийс, Л. Смит, К. Силверман и др. – отхвърлят това измерване на надареността като едностранчиво (**Wallace & Pierce** 1992 с. 5). Независими изследвания твърдят, че:

1) творческите постижения не са само функция на интелигентността (**Toscano** 1956 с. 57); **Patton** 1992; **Torrance** 1975; **Wallach**1976):

- съществуват значителни различия в изявата на креативните в сравнение с високо интелигентните ученици (**Perleth & others** 1993 с. 153);

- възможно е някои личности с висока интелигентност да нямат творчески способности, потенциал (**Delisle & Renzulli** 1982 с. 82);

- има слаба зависимост между високите учебни резултати, от една страна, и реалните професионални и творчески постижения, от друга (**Wallach**1976; **Renzulli**1986; **Renzulli** 1992; **Renzulli & Reis** 1985; **Helson &Crutchfield** 1970; **MacKinnon** 1962; **MacKinnon** 1965; **Stein** 1968; **Sternberg & Davidson**; **Де Боно** 2001);

- "не тези ученици, за които обучението днес е една игра, са същите, които утре могат да работят творчески" (**Sternberg & Lubart** с. 12);

- "истински надарените" личности, които историята помни и признава, са творческите и продуктивните хора по целия свят, "създаващите, а не консуматорите на познание", променящи мисленето във всички области на човешките стремежи, а не учещи уроците си (**Renzulli** 1986 с. 59).

2) Креативността (с този термин се означава и дейността, и способността за творчество) е базовата характеристика на творческата личност (**С. Рийс, Л. Силверман** и др.).

Така задачата за изследване на творческите и надарените личности (не само сред учениците) става една от най-сложните в психологията.

Внимателен и интересен поглед към теориите за способности, надареност, талант, интелигентност и креативност от гледна точка на обучението на изявените ученици е изложен и в дисертационния труд на Е. Великова (**Великова** 2002 с. 9-35).

2-3. Способност и талант от позициите на обучението по математика

Тук следва да подчертаем, че в разгледаните изследвания се визира общ контекст. Изводите, които са валидни за преобладаващата част от случаите обаче не винаги са универсални. В частност за изявените ученици в областта на математиката съвременната практика понякога води до специфични изводи. Така например Уалак (**Wallach**1976) в заглавие на своя статия твърди, че "Tests Tell Us Little About Talent", - изпитите (тестовете) ни дават малко информация за таланта. В същото време излъчените чрез системата на математическите олимпиади първенци образуват група от ученици, в която процентът на математическите таланти е значително по-висок, отколкото средният за учениците. Очевидно е, че какво точно ни "казват" изпитите и тестовете за таланта, зависи от самите изпити и тестове. Спецификата на подходящите математически тестове позволява по-определени изводи и за талантите.

Този пример показва, че изводите, които са приблизително верни в общи ситуации, може да не са верни в контекста на изследванията и развитието на математическите способности и креативност. Затова общите постановки и резултати трябва да се подлагат на критична оценка, а ако се наложи, и на преоценка.

Например талантът често се разглежда като творческа надареност, т.е. като комбинация от естествени заложби и активно отношение (стремеж) към тяхната реализация. За естеството на обсъжданите тук въпроси обаче ***предпочитаме термина "изявени ученици".*** Той предполага и (пасивно) наличие на способности, и (активен) стремеж към реализацията им чрез форми на състезания и допълнително (извън рамките на учебната програма) обучение. По такъв начин се избягват някои нюанси, с които са натоварени традиционните термини.

Конвенция (уговорка) за изпускане на думата "математика".

Предложената дисертация е свързана с обучение по математика, математически състезания, ученици с математически способности и др. Затова, за краткост, ***ще изпускаме*** думата "***математика***" и определението ***"математически"***. Пишем само обучение вместо обучение по математика, само състезание или олимпиада вместо математическо състезание или олимпиада по математика, изявени ученици вместо изявени ученици по математика и т.н.

Други важни термини и съкращения, използвани в разработката:

- ***изявени ученици*** (или съкратено **ИУ**) са учениците, които имат отлични бележки по математика в училище и проявяват допълнителен интерес към нея, чрез участие в кръжоци и състезания, решаване на по-сложни задачи и др.п. По груба оценка ИУ са няколко процента (2-5 %) от всички ученици, като броят им е по-голям сред по-малките и постепенно намалява поради пренасочване на интересите на учениците към други (предимно "точни") науки и области на знанието и живота;

- ***особено изявени ученици*** (или съкратено **ОИУ**) – малка група от около 20-30 ИУ във всеки випуск, състояща се от победителите и класирани на водещи места в състезания от национален и международен мащаб.

Изявените ученици и тяхното обучение, най-често визирано с термина "извънкласна работа", отдавна е обект на интерес и изследвания както в някои източно-европейски страни, така и в България. В нашата страна са публикувани много статии, сборници със задачи, пособия и други материали по тази тематика. Подавляващото болшинство от тях са посветени на отделни частни проблеми и очертават една разпокъсана и фрагментарна картина. Въпреки това трябва да подчертая изрично, че много от тези публикации представляват ярки и ценни приноси към теорията и практиката на работата с изявените ученици.

През последните години се появиха и няколко по-цялостни и завършени изследвания в тази област. Ще спомена накратко три от тях, взети в хронологичен ред.

Б. Лазаров в (**Лазаров** 1997) изучава проблеми, свързани с познавателната активност на изявените ученици и предлага оригинален качествен модел и дидактически технологии за ефективно използване на извънкласни и извънучилищни дейности по математика. Силна страна на модела на Лазаров са възможностите за обективни количествени оценки на отделни критерии за оценка на познавателната активност.

Е. Великова във (**Великова** 2002) изследва съвместната творческа дейност на изявен ученик и неговият непосредствен учител (ръководител) и предлага съответен концептуали модел.

Особено място в тази проблематика заема обширното изследване на С. Гроздев (**Гроздев** 2002). В него са изучени възможностите на изявените ученици като функция на способностите, предложен е модел на процеса "решаване на задачи" и са разгледани и други теоретични и практически проблеми. С голяма стойност е създаденият от С. Гроздев модел на процеса на обучение и процеса на възприемане при подготовката на ученици за състезания с отчитане на праговия характер на възприемането. Висока оценка заслужава стремежът на С. Гроздев да излезе извън рамките на чисто словесните описания и да "облече" модела в конкретна математическа форма, доведена даже до визуална представа, с което улеснява разбирането на същността и използването на самия модел. Подобни постижения са все още рядкост в световната практика.

2-4. Среда и ситуации за изява на учениците с математически способности

Не рядко във всекидневието хората прибързват с оценките си, че определено дете има математически талант.

По-нататък нещата могат да се развият в различни посоки.

Едната, че детето остава встрани от математиката: например насочва се към музика. Тя запълва времето и поглъща голяма част от енергията му. Постепенно то се превръща в добър музикант. На практика е много трудно той да се върне към математиката, да се образова и да постигне успехи в нея или в приложенията ѝ.

Друго русло, което води встрани от математиката, е пасивността: детето се лута между различни увлечения: четене на книги, слушане на музика, игри. Става все по-трудно привличането му към занимания с математика; въпреки че усилията в тази насока понякога дават резултат.

Трета възможна насока е свързана с оформянето на траен интерес на детето към дейности, свързани с математиката и приложенията ѝ.

Логично е, че третият път е за предпочитане, защото дава най-добри възможности детето да реализира естествените си заложби. Този път е добър преди всичко за неговото изграждане като индивид, за самочувствието му, което да се обособи върху основата на чувство за пълноценност, за способност да се развива успешно, да постига целите си и да завоюва уважение и признание от околните. Той естествено е добър и за обществото, защото води към изграждането на специалисти във важни за обществото професии, от които зависи технологичният прогрес на човечеството, а чрез него дава възможност за усъвършенстване на духовния и материалния живот на членовете му.

Как може да се характеризира детето с естествени (природни) математически способности, проявили се и забелязани в определен момент от неговия живот? Ако то проявява любопитство към различни "интересни" и "нестандартни" математически задачи, ако желае да посещава математически кръжоци, да участва в математически състезания, да ползва допълнителни сборници със задачи и друга математическа литература – книги и списания, ако "посещава" сайтове със задачи в Интернет и т.н., ако е започнало да постига и първите си успехи – решени трудни задачи, призови места на състезания, включване в отбора на класа или училището за такива състезания – то постепенно се превръща в ***изявен ученик***.

Така ***изявеният ученик*** съчетава ***два типа качества***: едните са свързани с ***математическа надареност*** (талант, способности), а другите – с проявената активност за реализиране и усъвършенстване на тази надареност.

§ 3. Математическите състезания – действена ситуация за математическа изява на учениците

Имаме основания да твърдим, че сега в страната ни, а и в повечето европейски и други водещи държави в света се ***създава и поддържа среда и ситуация за изява на надарените (талантливите, способните) ученици. В нея и чрез нея те се превръщат в изявени ученици*** – надарени ученици, търсещи изява и реализация.

Ключов елемент за създаването и функционирането на тези среда и ситуация са ***математическите състезания. Те играят фундаментална роля в две направления: селекция и мотивация*** на "надарените" в областта на математическите науки ученици. Следователно стават един от основните елементи в образователната работа с учениците.

Математическите състезания от съвременен тип съществуват малко повече от половин век. За това време те се разпространяват в целия културен свят, преодоляват пасивното съзерцание и скептицизма и се превръщат в своеобразен фокус на обучението по математика на учениците с математически интереси. Поначало състезателният елемент налага диференциация и йерархия, и, може би, затова още в началните периоди на съществуване математическите олимпиади имат своеобразна "пирамидална" структура, в основата на която се поставят по-масови и същевременно по-леки "кръгове", над които последователно се надграждат по-елитарни ("финални") състезателни прояви. През 1959 г. закономерно се появява световен "връх" на математическите състезания – Международната олимпиада по математика (съкратено МОМ).

"Териториалното разширение" на математическите състезания по света е съпроводено с увеличаване броят на състезателите, както и с разнообразяване на организационните форми. Независимо от формите обаче навсякъде се наблюдават отчетливи прояви на двете им основни функции: селекция и мотивация.

Този факт показва значими същности на явлението: дълбочинни връзки на селекцията и мотивацията при съвременните форми на работа с изявените ученици. Поддържам схващането, че процесът на продължаваща в цялата училищна възраст от III – IV клас селекция на учениците с математически способности е и един от мощните стимули за продължаване и интензификация на интересите и усилията за усъвършенстване на математическите им познания. Защото всеки успех или неуспех на даден ученик в определено състезание (обикновено определен етап от селекцията) предизвиква реакция на ученика. Ако представянето му в състезанието е добро, то го стимулира да продължи по същия начин. Нещо повече, изявеният ученик често увеличава усилията си, за "не се изложи" и да не допусне отстъпление от постигнатото. Ако класирането на ученика е средно или по-слабо, в повечето случаи го амбицира за повече работа, за да се представи по-добре следващия път. По-рядко то води до разочарования и временен отказ от занимания с математика. Обикновено обаче колебанията се преодоляват благодарение на оптимистичната детско-юношеска нагласа да виждат в несполуките си по-скоро резултат на "лош късмет" или несъществено изоставане, което може да бъде преодоляно.

Логично следва изводът, че системата на състезания по математика през училищната възраст на децата влияе и става стимулиращ и мотивиращ елемент в допълнителното (извънкласно) обучение по математика.

§ 4. Стимулиране и мотивация на изявените ученици

Както беше очертано, изявеният ученик съчетава два типа качества: едните са свързани с математически способности, а другите – с лична активност за усъвършенстване и реализиране на тези способности. Могат ли да се разкрият някакви закономерности във втория тип качества – действената активност на децата?

Стига се до проблеми за взаимовръзките на фактори от различно естество, преплетени в сложно явление, наричано проява, формиране и развитие на математически способности (или талант).

Тези проблеми – в общ контекст, извън рамките на обучението по математика – също са изследвани в психологията. Този факт улеснява третирането и конкретното им прилагане при работа с изявени ученици. Затова анализираме основни положения и теории с пряко отношение към разглежданите въпроси; и, преди всичко, към проблемите на стимулиране и мотивация за постижения.

Думата "стимул" има латински произход и означава "остен". Стимулът е външна подбудителна причина за действие или подготовка към действие (**Dorsch** 1994 с. 767; **Десев** 1999 с. 555; **Wortman & others** 1985).

Теорията за стимулите е развита по-пълно от Л. Виготски **(Выготский** 1984):

- човекът е способен да овладее природата, като в този процес той овладява собствената си психика;
- човекът овладява природата чрез използване на оръдия, а овладява собственото си поведение (запомняне, избор на дейност, взимане на решение и др.) чрез психологически оръдия – "стимули".

Например, за да се запомни съдържанието А и неговото възпроизвеждане В, се използва кодиране, или стимул – Х, който е средство за А и за В, и може да се разглежда като психологическо средство за овладяване на процесите на собствената памет (**Гиппенрейтер** 1988 с. 201). В различни ситуации човек може да съпоставя определени езикови средства, а на тях – нови езикови средства и т.н. (**Ганчев** 1999).

Подбуждащата роля на едни и същи стимули в общия случай е различна, тъй като ефектът на стимула за човека не е пряк, а опосредстван от психични състояния, свойства и особености на личността (**Десев** 1999 с. 555).

Стимулите са свързани с качествата на дейността, с характера на изпълняваните задачи, с полученото признание, с реализацията на способностите, с получената информация за компетентността.

Л. Десев (**Десев** 1999 с. 366) подчертава, че в учебно-възпитателния процес се разглежда проблемът за поведението на ученика като обусловен от средата и от особеностите на човека, при което конкретен субект търси в определено време ситуации или обект, за да преодолее известно напрежение и да удовлетвори потребностите си. Тогава творческата дейност на ученика може да се разглежда като ответна на система от стимули, включващи няколко вида определящи фактори. По оценките на Маслоу (**Маслоу** 2001 с. 74) и Христов (**Христов** 1999 с. 67) това са:

- творческа среда (семейство, училище, общество);
- личност на ученика (мотивация и др.)
- непротиворечивост – хармония между всички стимули.

Стимулите, които пораждат положително отношение към дейността, са: оценка, условия за разнообразна дейност, сигурност, организация, проблеми за решаване, област на дейност, личност на учителя и др. Друга голяма група стимули включва: постижения, признание, предизвикателства, перспективи и др.

Трябва да подчертаем, че математическите състезания предлагат именно стимули от подобен характер. Трудността на задачите е сериозно предизвикателство към учениците. Победата или класиране на призово място са несъмнено постижение, което се ползва с широко обществено признание и разкрива широки перспективи за бъдеще (дипломите на първенците са "ключ" към вратите на престижни университети).

В областта на обучението на изявени ученици се приема влиянието още и на следните стимули (*Андреев* 1996; *Де Боно* 2001; *Мерджанова* 1999; *Томас* 1999 и др.):

- **общуване с учителя, с изявени математици;**
- **участие в дейност, съответна на интересите в математиката;**
- **усвояване на знания, факти и методи от областта на интересите, и др**

Ролята на отрицателни стимули могат да играят: прекалено настойчив контрол, ограничения във времето на

работа, ограничения в правото на избор, прекомерно високи изисквания, очаквания за бързи успехи и др.

От изброените групи стимули пряко отношение към разглежданите в дисертацията въпроси има преди всичко втората група: участието в дейност, съответна на интересите към математиката. Традициите в България предлагат разнообразие от форми на извънкласна дейност: кръжоци, състезания, работа върху реферати и др.

4-1. Изявени ученици и мотивация

Категоричен е фактът, че мотивацията е един от силните фактори за успехите на ИУ (***Крумов*** 1985; ***Петков*** 1988; ***Кликс*** 1985 с. 212). Тъй като успешните прояви са основен класификационен фактор, определящ самото понятие "изявени ученици", става ясно, че мотивацията е присъща (в различна степен) практически на всички тях. Затова бихме могли да твърдим, че степента (нивото) на мотивация е значим елемент, чието регулиране подобрява резултатите от обучението на изявените ученици.

Думата "мотивация" има латински произход и нейни значения са "движа", "раздвижвам". **Мотивирането** е процес на формиране (поява) на мотив (подбуда), а наличието на мотив означава **мотивация** или **мотивираност** (**Христов** 1999 с. 13-14). Мотивацията от своя страна се разглежда като "субективна вътрешна детерминация на човешкото поведение, чието разкриване дава отговор на въпросите защо и в името на какво се проявява активността (вътрешна или външна) на личността (**Десев** 1999 с. 290-291). Понятието мотивация има две основни значения (**Десев** 1999 с. 291):

- съвкупност от вътрешни динамични фактори, обуславящи поведението на определен индивид, йерархизирана система от мотиви или отношения на човека към действителността (мотивационна или потребностно-мотивационна сфера);
- процес и специфичен начин на организиране на психичната подготовка за действие (респективно бездействие).

Основните свойства на мотивацията са (**Купер** 2000 с. 229; **Маслоу** 2001 с. 68 и 73-75):

- променя се във времето;
- променя се като резултат от промяна на ситуацията.

Осъзнаването и правилното разбиране на ролята и значението на мотивацията в обучението на изявените ученици в съчетание с познаването на механизмите, които регулират промяната (и особено усилването) й, създават убеждение, че нивото на мотивация може да бъде повишавано чрез промени в ситуацията.

Категорията "ситуация" в случая става комплексен фактор с много собствени страни и елементи. Освен това самите те – страни и елементи, са динамични и променят вътрешните си взаимоотношетия и зависимости. Силата им на мотивиращ фактор стои именно в последните характеристики – във възможностите да се предизвикват и да се регулират зависимостите, техният характер и сила.

Как се променя и усилва мотивацията? Отговор на този въпрос търсят почти всички специалисти, ангажирани с проблемите на обучението на изявени ученици. Практиката посочва голям брой частични решения, отделни препоръки, които влияят положително върху мотивацията. Далеч по-трудно е обаче да се разработи цялостна стратегия за по-голям период от време, която да осигурява оптимално ниво и трайност на мотивация на учениците без риск да бъдат претоварени или, в определен момент, демотивирани.

4-2. Мотивация и изграждане на перспектива

Мотивацията според преките й изследователи може да бъде няколко вида:

- низша и висша (**Десев** 1999 с. 291);
- близка (или кратка) и далечна (**Десев** 1999 с. 291);
- външна и вътрешна, в зависимост от това дали индивидът действа, за да постигне определен резултат, награда и прекратява действието при постигането на целта; или извършва определена дейност без да очаква награда, заради самата дейност (**Величков** 1989 с. 12-13).

От гледна точка на работата с изявените ученици интерес представлява връзката и преплитането на близка и далечна мотивация и в голяма степен преливането на първата във втората. Подтиквайки ученика да реши последователно една интересна задача, след това втора, трета, да се запознае с полезен и кратък метод за решаване на кръг задачи, постепенно се подготвят условията за създаване и укрепване на по-далечна мотивация: да се подготви за поредното състезание, в което да воюва за добро представяне. Успешното участие в него, последвано от второ, трето и т.н. състезание създават и укрепват още по-далечна мотивация: подготовка за кандидатстване във ВУЗ, успешно следване и евентуално добра кариера в областта на математиката или приложенията ѝ и т.н.

Аналогична е ситуацията и при външната и вътрешната мотивация. Често ученикът започва участието си в състезания с амбиция да се представи добре в конкретно състезание. Мотивът му е да покаже качествата си на учителя и съучениците си и евентуално да завоюва награда. Повторно и след това многократни участия създават мотивация за целенасочена подготовка за подобряване на резултатите. Работата над конкретните математически задачи, идеи и теории създава и утвърждава у него вкус и разбиране на "красотата" на математиката, изработва предпочитания, "любими теми", които са му носили успех и "късмет" на състезанията. Така често се стига до своеобразно "хоби" на ученика. Не непременно във всички области на математиката, даже по-скоро в една – две области. Той търси информация за тях, мисли и буквално "твори", без да очаква пряка награда, заради естетическото удоволствие от самото търсене. Всичко очертано е добре известен факт, констатиран и потвърден от учители, от методици по математика, както и от самите ученици.

Във връзка с възникването на вътрешна мотивация към по-тесен кръг математически въпроси, особено ако те се отдалечават от училищната и "олимпиадната" (състезателната) тематика, се изправяме пред специфичен проблем "с обратен знак". Интересът и дейността на ученика, насочени към такъв тесен и "без перспектива" кръг въпроси отнемат много време и сили. Коефициентът на полезна дейност в този случай става обезпокоително малък. В същото време юношеската възраст е период, който може и трябва да се използва максимално за натрупване на полезни знания и умения, за разгръщане и развитие на цялостната личност в по-широки рамки и с по-широк кръгозор и перспектива. Как може да се ограничи мотивацията към нещо интересно, но маловажно, за да "отворим простор" за мотивация към по-съществени проблеми?

Може би по-правилната постановка на този проблем е: как да се трансформира мотивацията от "дребнотемие" в по-значима тематика? Обикновено се приема, че носител на такава тематика са сериозните, солидни, добре развити теории и техните приложения. Този възглед е до голяма степен правилен. Често пъти обаче тези теории са изградени абстрактно, формално, скучно и трудно предизвикват интереса на учениците.

Отговор на поставения по-горе въпрос за еволюция на тематиката може да бъде потърсен в практиката. Поредица примери показват, че силна ***мотивираща роля изиграват задачите***. Тъй като във връзките на обучението на изявените ученици със задачите за състезания мотивиращата роля на последните е много важна, отделям специално внимание на въпроса.

4-3. Йерархична система за мотивиране на изявените ученици

Очертаното до тук се отнася предимно до фундаменталния проблем за създаване, поддържане, контролиране и регулиране на мотивацията на изявени ученици за занимания и творчество в математиката. Някои от неговите конкретни особености придобиват по-ярки очертания в светлината на бихевиористичната теория за мотивацията.

Поначало подходите за описване на понятието мотивация са психологически, социално-психологически и философски, както подчертава Христов (**Христов** и др. 1994 с. 5):

- Например при ***фройдизма*** мотивацията е "игра" на съзнателното и несъзнателното, на интстинкти, които имат водеща роля;
- При ***бихевиоризма*** мотивацията и съответното на нея човешко поведение се регулират от потребностите, възнагражденията и целите;
- При ***хедонизма*** хората по своята същност са склонни да търсят удобство, удоволствия и др. и да отбягват наказание, страдание и др.

Става ясно, че при разглеждането и изследването на мотивацията ***бихевиоризмът*** поставя ударение върху ролята на ***потребностите, целите и възнагражденията.*** Този факт е доказан категорично в педагогическата практика.

Вече стана дума за градацията и преливането на ***целите*** пред изявените ученици в рамките на съществуващата в България система за обучение на изявените ученици: от близки (да се реши успешно дадена задача) към по-далечни (да се постигне успех в дадено състезание) и перспективни (да се постигне ниво на подготовка за успешно кандидатстване във ВУЗ).

От гледната точка на бихевиоризма, един от регулаторите на мотивацията на изявените ученици са "***възнагражденията***". Ролята на такива възнаграждения в системата за обучение, в която състезанията са основен елемент, се поема от ***победите*** в състезанията (респективно челното класиране) ***и наградите*** за победителите.

Да разгледаме поредицата от математически състезания, в които участва изявен ученик. Всяко от тях е не просто поредно препятствие, което трябва да се преодолее, а своеобразно "събитие" в неговия живот. Образно казано, то е "стъпало" в усъвършенстването му. ***Формално*** погледнато, то нарушава обичайния ход на допълнителните занимания на ученика с математика (кръжоци, самостоятелна работа) – техният обем и интензивност се увеличават. Поглъща време и сили и ***като че ли*** става за сметка на почивката, развлеченията и удоволствията на ученика.

Какво мотивира ученика да излезе извън ежедневието, да положи допълнителни усилия, да се подложи (в очите на някои от роднините и приятелите му) на ограничения, да се лиши от почивка? Защо състезание след състезание ученикът не престава да участва в състезания, а напротив – очаква ги, търси нови?

Какво предлага на ученика състезанието?

Едва ли сама по себе си математиката (или любовта към нея) може да мотивира подобно поведение. Изявеният ученик има достатъчно възможности за "допир" с нея: това са обичайните кръжоци, самостоятелна работа и др. Значи има нещо друго, което не е математика.

Състезанието предлага особен (конкретен) стимул: ***победата***. А заедно с нея и всички ***последствия: повишаване на авторитета на ученика*** пред съученици, учители и родители, ***грамота***, с която в бъдеще може да кандидатства за ВУЗ, и др. С други думи, ***победата е съпроводена с награди, различни по форма, но значими. При това не само за "момента на триумфа", но и за бъдещето на ученика.***

От тази гледна точка изпъква значението на международните състезания по математика и в частност на международните олимпиади по математика. Техният безспорен авторитет прави самото участие в тях високо престижно, а дипломите и медалите за победителите "отварят вратите" на всички университети по света и влияят на цялостната кариера на притежателя им. Така те са своеобразни "върхове" сред множеството състезания и структурират в това множество система с определена йерархия. Тази йерархия в доста случаи е конкретно очертана: за да достигне до участие в международна олимпиада, изявеният ученик трябва да е сред победителите на национална олимпиада. От своя страна националните олимпиади имат своя собствена йерархия. В България тя е изградена от три състезания, наричани "кръгове на олимпиадата". Достъпът до всеки следващ кръг минава през победа в предшестващия. И, разбира се, победата във всеки следващ кръг става все по-престижна и с по-значими "награди".

Йерархичната система на състезанията създава и съответна йерархична система на наградите. Следователно от гледна точка на бихевиоризма тя предлага йерархично изградена система за мотивиране на изявените ученици.

4-4. Мотивацията на изявените ученици в съдържателните и процесуалните теории

Описаният по-горе бихевиористичен модел за третиране на мотивацията на изявените ученици чрез йерархична система от състезания кореспондира непосредствено с процесуалните теории за мотивацията и нейното формиране. В тази област обаче има аспекти, чиято теоретична база са съдържателните теории. За изграждане на концепции за цялостна мотивация на изявените ученици е необходим точен анализ при категоризирането на различните елементи, правилното им включване в най-подходящи теоретични схеми и на базата на това внимателно изследване характера на връзките между откроените групи мотиви, които желаем да използваме.

Както е известно, има две групи теории за мотивацията: съдържателни и процесуални.

Основната идея в **съдържателните теории** е, че ***мотивацията е резултат от действието на вътрешни фактори*** – потребности, които подбуждат човека към действия за тяхното удовлетворяване.

Едно от основните предположения на тези теории е, че човек може да промени ситуацията, след като установи, че това ще задоволи потребностите му. А това е основа за постигане целите на обучението чрез функцията "мотивиране".

От своя страна ***мотивът,*** в рамките на тази конструкция, според Л. Десев е (**Десев** 1999 с. 289):

- конкретно проявление на потребността;
- вътрешна подбуда, подбудителна причина за действие, дейност.

В мотива субективно са отразени:

- чувства, ***стремежи***, влечения, мечти и др. (**Десев** 1999 с. 289);
- ***насочеността и готовността за действие***, изборът на средства, начини, време и място на действието, ***увереност в успеха*** (**Величков** 1994 с. 40);
- отношението на личността към света; ***желание***, измерено и осмислено с мерките на личността и на действителността (**Десев** 1999 с. 289).

В рамките на идеите в съдържателните теории за мотивацията Е. Великова (**Великова** 2002) стига до извода, ***че мотивирането на учениците за математическо творчество изисква формиране на потребност от творчески изяви***.

Особен интерес за нас представляват ***познавателните мотиви***. Тяхното възникване е свързано с търсенето и осмислянето на нови цели, които не са дадени предварително. Затова общата насоченост на ученика, свързана с този род мотиви, е далеч по-широка от отделно действие. Този широк кръг на насоченост е кръгът на ***дадения интерес*** (**Леонтиев** 1978 с. 255).

А ***интересът е активна, избирателна насоченост на мисловния процес на човека към даден обект, предизвикана от неговото жизнено значение и/или от емоционалната му привлекателност*** (**Рубинщейн** 1999 с. 525). Именно ***интересът*** става мотив, който ***подбужда ученика към активна дейност***, а познавателният интерес е процес на превръщането му във вътрешен мотив (**Рубинщейн** 1999 с. 525-526).

В дисертационния си труд (**Великова** 2002 с. 59) Е. Великова стига до извода, че:

1. В процеса на обучение на надарените ученици е необходимо да се създадат условия за формиране на по-високи равнища на вътрешна мотивация върху основата на потребностите от постижения и от разширяване сферите на приложение на отделните способности, като същевременно се избягват всички фактори, които намаляват вътрешната мотивация;
2. Стимулирането на творчеството се осъществява в съвместна дейност между учител и ученик, в съответствие с психическите състояния на ученика;
3. Стимулирането на математическото творчество у изявените ученици трябва да се разглежда като прилагане на система от

благоприятни психолого-педагогически условия и дейности, които са подобни на начина на действие на възрастния творец в конкретна математическа област.

За мотивация от този тип е важно да помним, че

1. Всеки ученик е уникален. Учителите трябва да осъществяват подходящо взаимодействие между интелектуалната, емоционалната и волевата сфери на личността на ученика, нейните интереси, стремежи и благоприятни условия за развитие.

2. Стимулирането и мотивирането за творческа дейност е по-ефективно, когато ученикът изпитва удоволствие и удовлетворение от своята дейност. Това още повече го насочва към открояване на собствен дискурс в идеите. Тези принципи трябва да са водещи в учебно възпитателния процес с изявени ученици.

Приемам и споделям този извод.

За разлика от съдържателните теории основната идея в **процесуалните теории** е, че мотивирането е процес, който е обусловен от очакване, от интерес, от поставяне на цели, от вложени усилия, способности, умения, от характера и спецификата на дейността и др.

По-горе разгледахме системата от математически състезания като своеобразни възлови елементи от един цялостен процес на подготовка и развитие, в който се включват изявените ученици. Този процес те започват на различна възраст, но той трае не по-малко от няколко години. Ако първите математически изяви на учениците са във II-III клас, каквито условия им предлага днешната действителност в България, тяхното допълнително (“извънкласно”) обучение заема 7-8 години. За този период те “минават” през десетки състезания. Системата, образувана от тези състезания, има своеобразен мотивационен ефект, който е много силен. При това колкото по-висока е естествената математическа дарба на ученика и колкото по-добри са постиженията му в състезанията, толкова по-силна и целенасочена става и неговата мотивация. Логично в системата от състезания всяко от тях има свое място, определено от йерархията на системата. Състезание, което заема “по-високо” място в нея, създава и по-силна мотивация.

Следователно, при мотивацията на изявените ученици се наблюдават елементи, които изразяват:

А) конкретни прояви на ***потребност*** или на ***вътрешна подбуда***; чувства, ***стремежи***, влечения, мечти; ***насоченост и готовност за действие***;

Б) процес, който е обусловен от очакване, от ***интерес***, поставяне на ***цели***, от вложени ***усилия***, способности, умения, от характера и спецификата на дейността и др.

Първата група елементи, описани в А), има най-добра теоретична интерпретация в съдържателните теории, а втората, от групата Б) – в процесуалните. Те обаче участват ***едновременно*** в обучението на изявените ученици.

Констатацията, че на практика мотивацията на изявените ученици във всеки конкретен случай може да се разглежда като сложен комплекс от различни компоненти, е важна от гледна точка на изследванията за анализ и контрол на мотивационните фактори при обучението. Разкривайки съставните части, можем да ги изследваме поотделно. След това се изучават и взаимодействието и взаимното влияние в рамките на комплекса, в който те реално съществуват.

Типичен пример в мотивацията на изявените ученици са два компонента от мотивационни фактори:

А) процес, който е обусловен от очакване, от интерес, поставяне на цели и спецификата на дейността. (Тук подходящ теоретичен инструмент са процесуалните теории.)

Б) потребности, или вътрешна подбуда; чувства, влечения към математиката и изучаването й, към решаване на математически задачи въобще или на задачи от определен тип (например диофантови уравнения, приложения на принципа на Дирихле и др.) Факторите от тази група имат адекватна интерпретация в съдържателните теории.

"Извънкласното" обучение на изявените ученици може да се интерпретира от две гледни точки, поставящи във фокус всяка една от тези две групи фактори:

А) процес, който протича като резултат от поставени цели, по-близки и конкретни – състезания, и по-далечни и абстрактни – кандидатстване за ВУЗ, подготовка за добра кариера;

Б) проява на влечение към математика, към решаването на задачи, на любознателност, на желание за разкриване на "математически истини"; резултат на вътрешна потребност.

Дългогодишните наблюдения и обсъждането на тези проблеми оформят становището, че и двете горни групи мотивационни фактори са срещани често; нещо повече, те присъстват и в голяма степен определят активността практически на всеки изявен ученик.

Наблюдава се и следната (глобална) тенденция на развитие:

В по-ранна възраст преобладават мотивационни фактори, резултат от конкретни цели: да се участва и победи в състезание, да се усвои решаването на даден тип задачи. Постепенно се развива и засилва любознателността, естетичното възприятие на математическите задачи и теории, на "хитрите идеи", на "елегантните решения". Много от изявените ученици при завършване на училище остават за цял живот "любители на математиката" даже при отпадане на конкретните цели като състезания, кандидатстване за ВУЗ, кариера.

Следователно, мотивацията на всеки изявен ученик може да се разглежда като сумарна, обединяваща отделни мотивационни компоненти. В различни моменти интензивността на всяка компонента е различна. Тя зависи от голям брой вътрешни и външни фактори. Във всеки момент взаимното влияние (или интеракцията) на компонентите е различно.

Например в навечерието на дадено състезание (няколко дни преди него) целта за постигане на добро представяне може да надделее над вътрешното желание на ученика да се занимае с някоя математическа задача извън тематиката на състезанието. В резултат ученикът подтиска това желание и насочва усилията си изключително към тренировка със задачи, свързани непосредствено със състезанието.

Този факт показва, че един тип мотивация за "извънкласно изучаване на математика" при взаимодействие с подобна мотивация от друг тип я потиска и временно неутрализира действието й.

Примерът демонстрира и сложността на взаимодействията между компонентите на цялостната мотивация на изявените ученици. Различни аспекти на тази проблематика са изучени от Б. Лазаров (***Лазаров*** 1997). Той достига до качествени оценки на активността на изявените ученици в различни периоди от подготовката им. Анализирайки въздействието на състезанията, авторът предлага модел, който отчита това въздействие, демонстрира ефекта му и дава възможност за управленски решения за процеса на подготовка, които да водят до подобряването му.

Тези принципни положения са важни, тъй като, както ще стане дума по-нататък, задачите за състезания - предмет на настоящото изследване - могат да бъдат използвани като мотивационен инструмент. Той действа успоредно с други фактори, и взаимодействието на всички тях трябва да се има предвид при цялостната оценка на комплексната мотивация, изграждана от различни елементи за обслужване и усъвършенстване на обучението на изявените ученици.

§ 5. Задачи за състезания

Оценката на постигнатото от изявените ученици се определя от това, какво знаят и могат в областта на математиката, т.е. от нивото на овладяване на математическите понятия, идеи и методи и способността да прилагат знанията си.

Както обаче споменахме, ***основен "носител" на математиката в обучението на изявените ученици са задачите***. Това предопределя тяхната изключителна роля в процеса на обучение. В този смисъл на преден план излиза математическото съдържание на задачите. Те трябва (преди всичко) да удовлетворяват математическите изисквания за точност и коректност, и наред с това, адекватно да обхващат именно онези знания и умения, които желаем да бъдат усвоени от учениците.

На практика обаче обучението протича в определен срок. До какво ниво може да бъдат изведени учениците в неговия края?

До този момент обсъждахме приноса на самите ученици за интензивността на учебния процес, обусловен преди всичко от тяхната мотивация. Влияние върху него оказват и организацията му, качеството на преподавателите, средата, в която живеят и се развиват учениците. Към тези фактори следва обаче да добавим и още един, който е изключително съществен: подборът и качеството на задачите, с които се срещат учениците на състезания и в индивидуалната си подготовка.

Следователно, оптимизацията на съвкупността от задачи, с които се занимава изявеният ученик в хода на обучението си, е един от най-важните елементи на цялостния учебен процес. От избора на задачите в голяма степен се определя нивото, на което ще бъде изведен ученикът в края на процеса.

Очевидно на оптимизация подлежи и математическото съдържание на "комплекта задачи", използван в подготовката.

Макар и това да не е достатъчно очевидно, на оптимизация подлежи и нематематическото въздействие (емоционално, естетическо и др.), което задачите оказват на учениците.

Следователно, усъвършенстването на задачите поотделно и в комплект, като единни "обучаващи модули", е много важно. На практика към него са насочени и изключителни много усилия. То е и във фокуса на представеното изследване.

5-1. Какво е математическа задача?

Иван Ганчев дава (***Ганчев*** 1976) следното описание:

В математиката чрез различни системи от аксиоми се въвеждат първични понятия-обекти и понятия-релации. След това, чрез дефиниции, с използването на някои от първичните понятия последователно се определят първични подмножества, които се означават (наименоват) с различни термини. Така се въвеждат дефинируемите понятия.

Освен това в математиката много често се поставя изискването от дадено множество M от математически обекти да се отдели подмножество P, чиито обекти удовлетворяват дадени условия (имат съответни свойства). В такива случаи се счита, че е поставена една математическа задача.

Например математическа задача е следният обект:

"Да се реши уравнението 5x+6=0."

Тук фактически се задава едно множество P (множеството корени на уравнението 5x+6=0). Изисква се това множество да се зададе конструктивно. При това обикновено се има предвид, че P е подмножество на дадено множество от числа, наречено множество от допустими стойности на неизвестното.

За самото понятие математическа задача може да се даде следното (описателно) определение:

Всяка математическа задача е последователност от мисли, чрез които се задава по някакъв начин подмножество P на дадено множество M от математически обекти и се изисква: а) да се зададе P конструктивно, ако е крайно; или б) да се установи, че P е подмножество на вече зададено по определение подмножество на M; или в) да се покаже, че обектите на P може да се получат по определени правила, характеризиращи някакви чертожни инструменти;

или г) да се покаже, че P съвпада с някое множество T, което се приема за известно.

5-2. Задачи за състезания

За да се осмисли терминът "задача за състезание", от формална гледна точка би било достатъчно да се каже, че такива са задачите, включвани в темите на състезания, и задачите, включени в утвърдени "олимпиадни сборници". От съдържателна гледна точка обаче за основни признаци, по които се разпознават състезателните задачи, се считат тяхната "трудност" и "нестандартност".

По-подробно проблемите около смисъла и определянето на трудността на задачите се разглеждат в следващата глава. Нестандартност означава, че такъв тип задачи не се среща в училищните учебници и сборници и че решаването им не се свежда единствено до формално прилагане на методите и алгоритмите, изучавани в училище.

Обикновено явно или мълчаливо към задачите за състезания се поставят и други предварителни изисквания, сред които по-важни са следните:

- не са познати на участниците
- не съдържат непознати термини
- решаването им не изисква познаване на специални теории
- прилагането на специални теории не ги прави тривиални или прекалено прости
- допускат кратка и ясна формулировка
- допускат кратко решение, без голям брой случаи и обемни изчисления, и са съобразени с времето, дадено за решаване.

Извадени от обстановката на състезания, задачите от състезателните теми остават обект на вниманието на изявените ученици. Те са ядрото, около което се групират и други подобни на тях по тематика, идеи, методи, трудност, дължина и сложност на решението и др., за да образуват интересуващата ни съвкупност от задачи - предмет на настоящото изследване.

Вече подчертахме, че в триадата изявени ученици – състезания – задачи за състезания именно последните са носители на математическото съдържание, и по-специално на математическите идеи, методи и умения, предназначени за овладяване от учениците.

Чрез механизма на състезанията обаче ***задачите стават инструмент, чрез който се осъществяват и други важни функции: на селекция и ранжиране.*** Общо казано, по броя на решените задачи съдим дали един ученик може да бъде причислен към групата на "изявените", и какво място заема в нея. В съвременната система на математическите състезания задачите като съставна част на "оценъчния инструментариум" играят ключова роля. От тях (от техния избор, формулировка, принципи и скала за оценяване) зависи прецизността на оценките. От своя страна тази прецизност е стожерът, на който се опира доверието към обективността на класирането на участниците в математически състезания. Следва ***изрично да подчертаем, че погрешните и неадекватни оценки са изключително силен отрицателен, демотивиращ фактор***, който може да сведе до нула интереса на учениците към допълнителни занимания с математика.

Затова изработването (съставянето) както на отделни задачи за състезания, така и на състезателни теми, е трудна и изключително отговорна задача, изискваща познания и опит. От нея зависи в голяма степен функционирането на цялата система за селекция, мотивиране и обучение на изявените ученици.

5-3. Трудност на задачите

При изработване и планиране на методика на каквото и да е обучение един от ключовите въпроси е за правилно определяне на трудността на отделните елементи на учебното съдържание. От трудността на дадена методическа единица зависят усилията, които трябва да бъдат положени за нейното овладяване, а те, от своя страна, диктуват времето, което трябва да й се посвети. Определянето на трудността е важна и за използването на задачи в обучението по математика на ученици въобще, и на изявените ученици като частен случай.

Какво разбираме под трудност на дадена задача?

От гледна точка на даден индивид трудността на задачата се определя от усилията, които той трябва да положи за решаването ѝ. Колкото повече са необходимите усилия, толкова по-трудна е задачата. Мярка за трудността в случая може да бъде времето, което е необходимо на индивида да намери решението. Понякога е целесъобразно в дефиницията да бъдат елиминирани чисто техническите съставки на трудността, които се свеждат до големи по обем стандартни операции (пресмятане, тъждествени преобразования на алгебрични изрази и др.п. Тогава мярка за трудността може да бъде времето, което е необходимо на индивида да намери подробен алгоритъм за решаване.

Както става ясно, ***в тази постановка трудността е субективна***, а не обективна ***характеристика*** на задачата: тя зависи за кой субект (индивид) се отнася въпросът за трудност.

На практика в повечето случаи въпросът за трудност на задача се поставя не спрямо отделен индивид, а спрямо съвкупност от индивиди: например, трудна задача за ученици, или трудна задача за студенти. Когато разглеждаме обучението на изявените ученици, понятието "трудна задача" обикновено носи смисъл на "трудна за изявените ученици задача".

Какво означава тази формулировка?

В рамките на настоящото изследване ние приемаме, че средната трудност на задачата се определя от средното количество усилия, необходимо на изявен ученик за решаването ѝ. Тя би могла да се характеризира и със средното време, изразходвано от изявен ученик за получаване на решение, или със средното време, изразходвано от изявен ученик за намиране на подробен алгоритъм за решаване.

При тази постановка ***категорията трудност на задача се интерпретира като "средна трудност"***.

Измерването на средната трудност на задача е много трудно, за някои задачи даже неосъществимо. Не бихме могли да накараме всички изявени ученици да решават дадена задача, за да "засечем" времето, в което се справят с нея, и след това да намерим средното аритметично на изразходваните индивидуални времена. Такова измерване е и лишено от смисъл. Освен това познаването на точната трудност на една или няколко задачи не би донесло особена полза за решаването на комплексните въпроси на обучението на изявените ученици, в което се използват стотици задачи.

Поради всичко посочено се налага да търсим приблизителни методи за определяне на средната трудност. Често пъти за удобство се възприемат и разглеждат различни формални дефиниции на понятието "трудност", които всъщност представляват приближения на формулираната по-горе "средна трудност".

Трябва изрично да подчертаем, че нито индивидуалната, нито средната трудност са математически понятия. От гледна

точка на математиката те не играят никаква роля. С трудността на задачите са свързани принципни въпроси, които засягат взаимоотношенията между математическото знание и субективното (човешко) отношение към него.

Както вече отбелязахме, в методиката на математиката това са ключови понятия. Затова е напълно естествено, че проблемите за определянето на трудността на задачите отдавна са обект на вниманието на специалистите по методика на математиката. Тук споменавам монографиите на Крупич (**Крупич** 1995) и на българския педагог Иван Ганчев (**Ганчев** 1976). Според Крупич в изследванията на различните проблеми, свързани със задачите в училищния курс по математика, важна роля играе общото понятие ***"структура на задачата".*** В него се търси основата на определянето на "сложността" на задачата и съответно на нейното решение, а тя, от своя страна, е свързана с нейната "трудност". В същото русло, с някои усъвършенствания, са и идеите на Ганчев. Трябва да отбележим едно предимство на този подход - той дава възможност за априорна преценка на трудността на задачата, т.е. преди и независимо от експерименти за решаването ѝ. Освен това дефинициите, които използват, са по-точни. Те се основават на логическите структури на решенията, независимо от субекта, който решава. В същото време те ни отвеждат доста встрани от интуитивното схващане за "трудност" и водят до прекалена формализация. При тях новото понятие "сложност" е близко до формална оценка на алгоритмите на решенията на дадена задача.

Друг подход е предложен в статията (**Kenderov & Tabov** 1990) и в доклада (**Табов и Велев** 1996) на XXIX Пролетна конференция на СМБ; той позволява по-точна апостериорна (т.е. след провеждане на състезание, което играе ролята на експеримент) преценка на трудността.

Така, ако ***проблемите за определяне на трудността на задачите*** са важни от гледна точка на методиката на обучението по математика, то ***за обучението на изявените ученици това несъмнено са едни от ключовите***.

За определяне на трудността на задачите за състезания подходът чрез "сложността" на решението не дава добри резултати. Причината е в една интересна специфика на тези задачи: изискването за краткост на решението ограничава неговата структурна сложност, т.е. за състезания се подбират предимно кратки, "едноходови" или "двуходови" задачи, с проста структура, но с неочаквани, "изненадващи" идеи за решение. Това налага необходимостта за задачите за състезания да се търсят и нови теоретични постановки, и нови практически решения, които да заменят неадекватните за конкретните цели разработени от класическата методика на обучението по математика теории препоръки.

Подходът, предложен в статията (**Kenderov & Tabov** 1990) и в доклада (**Табов и Велев** 1996), предлага дефиниция на понятието "трудност", която заслужава характеристиката ***"евристична"***. Смисълът на тази оценка може да бъде обяснен по следния начин.

При решаване на дадена математическа задача можем да разграничим два елемента***: рутинен***, който се състои в прилагането на определени "стандартни" математически техники, като аритметични действия, тъждествени преобразования и др., и ***евристичен***, който обикновено назоваваме с термини като "досещане". Има задачи, чиито решения представляват комбинации на голям брой "стандартни" (рутинни) операции, които са формално приложение на изучаваната в училище теория. За обикновените ученици те представляват трудност при лошо владеене на теорията, при липса на концентрация и др. За изявените ученици обаче те не представляват трудност. На тези задачи противопоставяме други, чието формално решение е сравнително кратко и "просто", но за които "трудно се досещаме". ***"Тази задача била много проста – как не можах да се сетя!"*** – възкликва ученикът, след като не е успял да реши такава задача. Това възклицание отразява ***евристичния елемент*** в нея.

Именно такива ***евристични елементи*** лежат в основата на интерпретацията на процеса на творчество не само при решаването на задачи, но и в математиката въобще. ***Творчеството в математиката предполага комбинация на разнообразни понятия и техники, разработени в математическите теории, така че в тази комбинация да са включени и различни евристични елементи***, които изискват досещане в мащаби и размери, достъпни на малцина.

Този подход към понятието "трудност на задача" има някои особености. Понеже евристичните елементи са тясно свързани с процеса на математическо творчество, който е дълбоко индивидуален, такива са и самите те. Понякога се случва определено "досещане" да е по-лесно за едни индивиди и по-трудно за други. В такъв случай се приема, че първите са по-творчески в математиката от вторите. Но всъщност реалната ситуация е по-сложна. Например се случва Х да реши дадена задача, а У – не; след това У да реши друга задача, а Х –

не. Кой от двамата е с по-големи математически способности за творчество?

Отговор (разбира се, относителен) на подобен въпрос, както и в други подобни случаи, се дава с термините на статистиката: ***за по-големи считаме способностите на този индивид, който се досеща "по-често" от другия.*** Понякога разликата в такива "честоти" е впечатляваща.

Затова е естествено, че идеите на математическата статистика са в основата на възприетия в настоящото изследване подход към категорията "трудност на задача": грубо казано, ***от две задачи по-трудна е онази, която се решава по-бавно и от по-малък брой ученици***. За подобна преценка е необходимо дадените задачи да са решавани от голям брой ученици, които представляват представителна извадка за съвкупността на учениците.

По-горе беше спомената една съществена специфика на задачите за състезания: че изискването за краткост на решението ограничава неговата структурна сложност. ***За състезания се подбират задачи, изискващи неочаквани, "изненадващи" идеи за решение***. При състезателните задачи съзнателно се ***култивира наличието на "евристични компоненти"***. Те са задължителен елемент на всяка такава задача. Затова математическите състезания и техните задачи всъщност индуцират ***творчество в образователния процес на изявените ученици***.

От такава гледна точка разгледаните в настоящото изследване проблеми на трудността на задачите и предложените методики за сравнение на трудността в рамките на даден тест са актуални.

§ 6. Анализ на целите на настоящото изследване

Осем от формулираните цели са насочени към подбора и формулирането на задачи за математически състезания и композирането на тестове от задачи с избираем отговор (също предназначени за състезания). Това са:

1) Анализ на основни проблеми на подбора на задачи за математически състезания,

2) Изясняване на възможностите за засилване на мотивиращото действие на задачите върху изявените ученици,

3) Анализ на възможните подходи за избор на дистрактори при задачи с избираем отговор.

4) Анализ на особеностите на двата основни вида тестове: диагностични и състезателни,

5) Изграждане на концепция за оценяване на трудността на задачите в тест от задачи с избираем отговор,

6) Провеждане на конкретно измерване на трудността на задачите в състезателния тест на Турнира "Черноризец Храбър" през 1994 г.,

7) Изграждане на концепция за изследване на корелацията между резултатите на изявени ученици в отделни области на математиката, и

8) Изследване на корелацията между постиженията на участниците в Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. по отделни области на математиката (аритметика, алгебра, геометрия, информатика).

Описанието на работата по тази група от цели и резултатите от реализирането им е осъществено във втора глава.

Подборът на задачите и търсенето на оптимални формулировки са разгледани от две различни гледни точки: на математическото съдържание (и по-специално на трудността) и на "хуманитаризацията", т.е. на внасянето на хуманитарни елементи в задачите, а оттам и в цялостната работа с изявените ученици. Втората отразява една нова, вече печелеща все по-широка популярност тенденция за "отваряне" на математиката към изкуството и хуманитарните науки, а също и желанието за хармонично развитие на учениците. Тази тенденция отваря вратата и към перспективни направления в мотивационния инструментариум.

Заключителната част на втора глава представя анализ на една специфична и много важна група проблеми, които възникват при съставяне (композиране) на тестове. Те са свързани с "хомогенност" на теста и при диагностични тестове с тясна насоченост се решават с т.н. "дискриминационен фактор", който дава възможност да се открият и отстранят "чужди елементи" от теста. По същество това е просто изследване на корелации между участващите в теста задачи. В края на глава втора този въпрос е разгледан в по-обобщено и е проведено конкретно изследване на корелацията между групи задачи. Успоредно с това са изследвани и някои особености на прилаганата методика.

Идеи за създаване на нови възможности в подготовката на изявените ученици за състезания, или, на "делничната работа" по обучението им, и осъществяването на тези идеи са в основата на глава втора, формално посветена на 4 от целите на настоящата дисертация:

1) Да се изследва възможността стремежът към обобщения да бъде използван за творчески стимул,

2) Да се изгради концепция за специализирано пособие за изявени ученици, обслужващо финалния етап от подготовката им за състезания от висок ранг,

3) Да се разработи темата "Хомотетия" в два варианта с различно предназначение,

4) Да се разработи темата "Дискретна оптимизация" за пособие за финална подготовка на изявени ученици.

Ако подходим тесногръдо към обучението на изявените ученици, бихме могли да ограничим проблемите му само в рамките на конкретните и непосредствени цели - успешното представяне на състезания и получаването на добра математическа подготовка. Обаче един по-широк поглед предполага друго, по-обхватно отношение към проблемите на изявените ученици, излизащо извън професионалните математически рамки. И по-специално, към изучаването на различните специфични особености и характеристики на изявените ученици – както на индивидуалните, така и на тяхната цялостна съвкупност. Този подход е представен с една разработка в четвърта глава, където са представени реализации на още две от целите на дисертацията: 1) Да се изгради концепция за изследване на рисковото поведение на изявени ученици в зависимост от пола и възрастта им, и 2) Да се изследва склонноста към риск у състезателите от Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. в зависимост от пол и възраст.

Успоредно с постигането на тези цели четвърта глава илюстрира възможностите на състезателните задачи и тестове да се използват като инструменти за педагогически изследвания от различен характер.

Втора глава

Подбор и подготовка на задачи за състезания

§1. Подбор на задачите за състезания

1-1. Разширяване на тематиката на задачите за състезания

През началния период на провеждане на математически състезания, приблизително до 1980 г., господстваше мнението, че задачите трябва да бъдат в рамките на учебния материал, или поне близо до него. Постепенно обаче става ясно, че, от една страна, това условие е трудно изпълнимо, и в същото време поставя изкуствени ограничителни рамки.

Особено отчетливо тези проблеми се открояват с развитието на международните олимпиади по математика и нарастването на броя и разнообразието на участващите в тях страни.

Оказа се, че учебното съдържание по математика, изучавано в училищата по различни кътчета на света, е доста различно. Първия удар понесе стереометрията: видя се, че в много държави тя е застъпена много слабо в училище. Участващите в Журито на международните олимпиади представители на тези страни предпочитаха при избора на състезателните теми в тях да не бъдат включвани стереометрични задачи. Така постепенно стереометрията практически "отпадна" от тематиката на международните олимпиади, макар че формално такова решение не е взимано. Този факт повлия отрицателно на присъствието на стереометрията в националните олимпиади в различни страни и като резултат на това някога традиционните за състезания и олимпиади стереометрични задачи са рядко срещана екзотика (за щастие култивирана в България). Един допълнителен и много ефикасно действащ механизъм, чрез който се осъществява "отпадането" на дадени области от математическите състезания, е "недостигът" на непознати за учениците трудни математически задачи от традиционен "училищен" тип. Присъствието на такава задача в български сборник например веднага я лишава от шанс да бъде дадена на българско състезание (освен при пропуск на журито).

Като резултат от тази ситуация практически в много състезания по света не се срещат тригонометрични преобразования и тригонометрични уравнения. Рядкост са и традиционните алгебрични уравнения и системи.

Международните олимпиади по математика (МОМ) се превърнаха в най-големия "законодател" на модата в тематиката на работата с изявени ученици. Областите на математиката, от които се избират задачи в състезателните теми на МОМ, стават задължителен обект на внимание на ученици и учители при подготовката за състезания, и овладяването им е съответно важен елемент на "тренировки", работа в кръжоци, школи и др.

Кои са тези области от математиката?

Отговорът на горния въпрос е обусловен от две от основните изисквания, на които трябва да отговарят задачите за състезания: да не съдържат непознати термини и решаването им да не изисква познаване на специални теории.

От съвременните, развили се през XX век математически теории и направления най-подходяща и удовлетворяваща горните изисквания се оказа теорията на графите. Към тях може да добавим комбинаториката и комбинаторната геометрия.

В тези области на математиката се оказа достатъчен потенциал от задачи и идеи за задачи, които се формулират без непознати термини и за чието решение не са необходими специални теории. Но от своя страна появата на такива задачи в тематиката на МОМ автоматично привлече вниманието на бъдещите участници и на техните учители, които включиха в подготовката за състезания и базови знания за съответните научни области (т.е. теория на графите и другите споменати по-горе).

Ако анализираме по-внимателно описания по-горе процес, забелязваме някои негови негативни страни. "Извеждането" на някои традиционни раздели на "училищната" математика от полезрението на изявените ученици едва ли може само по себе си да нанесе ущърб на математическото им развитие, защото те владеят предвиденото от учебната програма, а липсата на трудни "училищни" задачи се компенсира с трудни задачи от друга тематика. Все пак обаче се появява един съществен минус, свързан с привличането на нови ученици в кръга на изявените. Ще се спрем малко по-подробно на това.

Добре известно е, че интересът към математиката и проявата на математически способности може да стане на различна възраст: най-често във възрастта 14-15 г. те са вече факт, но се случва и по-късно "откриване на талант", във възраст 17-18 г. Практиката показва, че не малко от най-стойностните дарования са се проявили "с известно закъснение". Класически пример в това отношение е Якоб Щайнер: до 18-годишна възраст той не посещавал училище, защото е трябвало да помага на баща си в домашната ферма, а когато след това започнал образованието си, успял да се издигне и да стане един от водещите геометри от първата половина на XIX в.

Една добра система за селекция трябва да отчита подобно развитие на способностите на учениците и да дава възможност в нея да намерят реализация и "закъснелите таланти".

В подкрепа на тази теза е и мнението на И. Ф. Шаригин, един от водещите съвременни руски специалисти по методика на обучението по математика и автор на най-разпространените в Русия учебници по математика. Критикувайки създаването на изкуствени "задачи-чудовища" за олимпиади, които са трудни, но същевременно далече от основните идеи в математиката, Шаригин апелира за търсене на ***задачи, които са трудни, но са близо до училищната практика и не изискват предварителна подготовка*** (посещение на кръжоци, школи, работа с частен учител). В ръководеното от него жури на Соросовската олимпиада в Русия стремежът е да се постави ударението именно върху такива задачи, за да може в рамките на тази олимпиада ***да се даде повече шанс за учениците с математически способности, които*** по една или друга причина ***до момента не са били включени в извънкласна работа***. Като резултат на това според специалистите задачите, давани на Соросовската олимпиада, по външен вид, по съдържание и по начин на формулиране са близки до тези, които учениците решават в училище (***Сорос 1995*** с. 305-306). При това те не са по-лесни от "модерните" и излизащи извън учебните рамки задачи, които се предлагат на редица национални състезания и олимпиади, в това число и на международните.

Така връщането към трудни задачи от "училищен тип" дава възможност да се компенсира негативния ефект на "извънучилищната тематика" на състезателните задачи върху "късните таланти".

1-2. Изисквания към задачите за състезания

Откъде се взимат задачи за математически състезания? За да отговорим на този въпрос, да помислим малко по-нашироко: откъде се взимат математическите задачи въобще?

Най-лесният и повърхностен отговор е: от сборниците със задачи. Но откъде са ги взели авторите на тези сборници? Тази насока на мисълта ни показва, че същината на нашия въпрос се свежда до проблема: как се съставят математически задачи и как се модифицират стари задачи, за да се използват като нови?

Това е много сложен проблем, който е част от темата за математическото творчество, и остава извън рамките на настоящата дисертация.

Тук съсредоточаваме вниманието си върху проблемите, които възникват пред журито на едно състезание, което вече има на разположение един списък от задачи, и трябва на базата на този списък да състави състезателна тема. Ще предполагаме, че този списък е достатъчно дълъг; в практиката на състезанията се случва при нужда първоначалният списък да се разширява с допълнителни задачи, но това не изменя същината на основните проблеми.

На какво трябва да бъде подчинен изборът на задачите за състезанието?

Най-важните изисквания към избраните задачи са:

- всяка от тях да бъде подходяща по трудност;
- да бъдат непознати на участниците;
- да допускат кратки и ясни формулировки;
- като цяло да образуват тема, която покрива определено математическо съдържание;
- темата като цяло по трудност да бъде съобразена с възможностите на участниците;
- трудността и обемът на решенията да отговарят на времетраенето на състезанието.

1-3. Предварителен анализ на трудността на възможните решения

Въпросът за "трудност" на дадена задача е важен. "Трудността" е категория от психологията, а самото понятие "трудна задача", което използваме в ежедневието, има интуитивен характер и като такова е едновременно относително и субективно.

Трудността на задача може да се разглежда от индивидуална гледна точка, но обикновено се свързва с усредняване, с което се стига до оценка, усредняваща оценките спрямо някаква съвкупност от индивиди; например спрямо учениците. Така оценката, че някоя задача е лесна, се интерпретира като означаваща, че задачата е лесна за "средния ученик" – идеален образ, обобщаващ средните, типичните качества на дадена съвкупност от ученици.

Най-разпространеният метод, прилаган за оценка на трудността на дадена задача, е експертната оценка. Всъщност такива оценки са една от най-важните страни на работата на всяко жури при подготовката на състезателна тема. Добри резултати в тази дейност се постигат при колективна експертна оценка, след непосредствено обсъждане от група специалисти; тя се прилага практически във всички случаи.

Трудността на задачите може да се изследва и по-системно и задълбочено. Към този проблем се връщаме в края на настоящата глава.

1-4. Модификация на задачи за състезания

При работа върху изготвяне на състезателна тема се случва от списъка, с който разполага журито, да не може да се избере достатъчно добра тема, която да удовлетворява всички по-горни условия. Например понякога достигаме до тема, която удовлетворява първите три, но не удовлетворява последните две, и е по-трудна, отколкото трябва да бъде при съществуващите обстоятелства. В такъв случай търсим начин да "направим по-лека" някоя от задачите – обикновено най-трудната.

Типичен подход за решаване на подобни проблеми е използването на задача – компонента (**Ганчев** 1976 с. 15) Ето един пример, който показва как се излиза от такава ситуация.

Задача 1. Триъгълна пирамида с пълна повърхнина S е пресечена с равнина, успоредна на два противоположни ръба. Ако Q е лицето на полученото сечение, да се докаже, че $S>4Q$.

За да улесним участниците, правим им "стъпало", за да могат първо да се справят с по-лесен случай и да разберат как да атакуват по-сложния; това "стъпало" е формулирано като подточка.

Задача 2. А) Да се докаже, че лицето на произволен изпъкнал четириъгълник е не по-малко от удвоеното лице на всеки вписан в него успоредник, чиито страни са успоредни на диагоналите на четириъгълника.

Б) Триъгълна пирамида с пълна повърхнина S е пресечена с равнина, успоредна на два противоположни ръба. Ако Q е лицето на полученото сечение, да се докаже, че $S>4Q$.

(задачата е от IV кръг на Националната олимпиада по математика през 1980 г.; вижте (**Кендеров и Табов** 1990))

Подточка А) е задача-компонента **(Ганчев** 1976 с. 15) на Б); с други думи, решението й е компонента от решението на Б). Затова, формално погледнато, като реши А), ученикът фактически е решил и част от Б). Но след като реши А), ученикът вече по-лесно може да се досети и за логическата връзка на А) с Б), а оттам и да намери и оформи в цялостен вид решението на задачата.

Този факт има своите логически последствия: използването на задачи-компоненти увлича ученика. След решаването на първата компонента той е въодушевен и ***допълнително мотивиран*** да положи усилия за преодоляване на втората и т.н. Тази идея е развита подробно от И. Ганчев в (**Ганчев** 1976).

§ 2. Формулиране на задачи за състезания

Една от най-важните цели на настоящата глава е анализът на важни аспекти на ***подготовката на задачи с избираем отговор*** за математически състезания.

Навлизането на "тестовете" в обучението по математика изведе на преден план нов – по форма – тип задачи: задачите с избираем отговор.

За разлика от тях, задачите "от класически тип" от векове са атрибут на математическото образование, а що се отнася до математическите състезания и работата с изявени ученици към съвременния момент, те са своеобразен фокус на цялата дейност в това направление. Като дидактически материал "класическите" задачи са обект на различни изследвания за мястото и ролята им в образователния процес, за класифицирането по видове, за точността и разнообразието на формулировките им и т.н.

Но навлизането на задачите с избираем отговор (като елемент на различни видове тестове, а напоследък и на математически състезания) постави теорията и практиката на съставителите (или "композиторите") на задачи в нова ситуация. Оказва се, че тепърва трябва да се откриват нови подходи към формулировките, да се спазват нови правила и принципи, да се изследват необичайни за класическите задачи елементи.

2-1. Математика и хуманитарни науки

Общественото мнение разделя математиката от филологията. Счита се, че ако някой решава добре математически задачи, може да му се прости невежеството в литературата и чуждите езици, а поетите някак си априори трябва да не могат да разделят две числа. Зад двойките по математика на децата си много родители са склонни да виждат дарби в история или музика.

Всичко това е само външна проява на фактическия разрив между математиката и естествените науки, от една страна, и хуманитарните науки и изкуството от друга. Но ако противопоставянето на естествените и хуманитарните науки е донякъде логично и обусловено от различията в обекта на изследване, необяснимо е защо математиката се поставя близо до естествените науки и толкова далече от хуманитарните. Като наука на абстракциите, тя би трябвало да бъде в някакъв смисъл еднакво отдалечена от всички останали науки. Защо тогава практически днес съществува реална пропаст между нея и хуманитарните дисциплини?

Този ред на мисли води до извода, че са необходими целенасочени усилия за преодоляване на това неестествено състояние.

2-2. Хуманизация на състезателните задачи

В класически смисъл ***хуманизацията*** се разбира ***като взаимодействие и взаимно проникване*** между обществената наука и другите области на науката (**Марев** и **Иванов** 1995 с. 15); схваща се и като ***дейност*** – просветна или практическа, съобразена с потребностите на отделния човек (**Марев** и **Иванов** 1995 с. 15).

Разривът между математиката (като представител на естествените науки) и хуманитарната "област" в човешката култура е забелязан отдавна, и също така отдавна се говори и пише за необходимостта от неговото преодоляване. Обикновено се набляга на едната "посока" на взаимно сближаване: за "хуманитаризация" (най-общо казано) на математиката. Тя наистина е много важна и придобива все по-актуални измерения. Например И. Марев и И. Иванов пишат (**Марев и Иванов** 1995 с. 16), че "цялата наука, в това число и обществените, … преживяват нов етап – етапа на хуманитаризацията", и подчертават, че този процес е още в своето начало.

В този контекст усилията за "хуманитарно влияние" в математиката имат своите роля и значение. Мисля обаче, че е необходимо да се работи и за проникване на математически идеи в обществената наука; това проникване допълнително ще повлияе на хуманитаризацията на самата математика.

По-надолу се спирам на целенасоченото въвеждане на "хуманитарни елементи" в условията на задачите и на възможностите то да се използва и като допълнителен източник на интерес и стимулиране. В следващата глава ще засегнем и друга компонента на "хуманизацията" – отношенията "учител-ученик" и "ученик-ученик" (**Петров** 1995) в контекста на подготовката на ИУ.

2-3. "Нематематически" формулировки на задачите за състезания

Една от основните и най-важни цели пред математическите състезания и пред извънкласната работа по математика въобще е популяризирането на математиката. За осъществяването й се използват различни конкретни инициативи и действия. Сред тях особено място имат специфичните задачи, които са свързани с реалния живот, използват реални ситуации, или пък са свързани с известни исторически или литературни герои и др. п. В практиката на състезанията се срещат

- забавни идеи
- литературни идеи
- идеи от други науки.

В дейността си на член на журита на различни математически състезания винаги съм подкрепял излизането от рамките на "сухата", "формална" математика. Това става чрез намирането на "нематематическа" задача, за която е лесно да се намери съответен "математически модел", т.е. еквивалентна математическа задача, и така фактически за да решим първата, трябва да решим втората. Това така наречено намиране на нематематически контекст на една по същество математическа задача е много важно по цял ред причини, сред които тук ще споменем само спечелването на допълнителни симпатии и интерес към математиката и убеждаването на учениците в съществуването на многобройни тесни връзки на математиката с различни науки и във възможностите за нейното широко приложение. Но намирането на подходяща "нематематическа" формулировка на математическа задача е и много трудно, защото:

1) От вкарването в задачата на термини и описания, които са чужди на математиката, не бива да пострадат нито точната постановка, нито – в разумни граници – "обема", т.е. дължината на формулировката на задачата.

2) Реалната ситуация в задачата трябва да е естествена, да се възприема лесно.

Желателно е новият контекст да е свързан с близки на учениците неща: любими приказки, герои от кино, известни литературни персонажи и т.н. Много добър ефект дава наличието на хумористичен елемент; такива задачи са истински находки.

Практиката показва, че много често подходящи задачи от този тип стават нещо като "ученически математически фолклор". По време на школи и състезания за ИУ те се разказват от учениците един на друг, с нещо като предизвикателство.

Следващите няколко примера илюстрират какви точно задачи се използват и дават представа за въздействието, което тези задачи оказват на учениците.

Али Баба и четиридесетте разбойника

Али Баба изяжда една тенджера пилаф за 50 мин, а един разбойник – за 1 ч и 20 мин. За колко време Али Баба и четиридесетте разбойника ще изядат 13 тенджери пилаф?

А) 1 часа и 5 минути Б) 35 минути В) $33\frac{1}{4}$ минути

Г) 25 минути Д) друг отговор.

Пижо и Пендо

На рисунките къщата на Пижо е изобразена 4 пъти, а къщата на Пендо – само веднъж. Коя е къщата на Пендо?

Мед и масло

Сладката хранителна смес "Рай" се прави от масло и мед. Ако в нея се добави толкова масло, колкото е медът, процентът на маслото в получената смес ще бъде два пъти по-голям от процента му в смес, получена при добавянето в първоначалната "Рай" на толкова мед, колкото е маслото в нея. Колко процента мед има в "Рай"?

А) 30 Б) 40 В) 50 Г) 60
Д) не може да се определи еднозначно.

Сизифов труд

Сизиф трябва да премести голям и тежък камък на стръмен връх, който е на 2 км от него. През първия час Сизиф преместил камъка 1 км напред, но накрая го изпуснал и камъкът се изтърколил $\frac{1}{4}$км назад. През втория час Сизиф преместил камъка $\frac{1}{2}$км напред, но накрая го изпуснал и камъкът се върнал $\frac{1}{5}$км назад. През *n*-тия час Сизиф преместил камъка $\frac{1}{n}$км напред, но накрая го изпуснал и камъкът се изтърколил $\frac{1}{n+3}$км назад и т.н. След колко време Сизиф ще премести камъка на върха?

А) 4 часа Б) 6 часа В) между 7 и 8 часа
Г) между 1000 и 1998 часа Д) никога.

Решаващите тази задача могат да потърсят подкрепа в знанията си в областта на класическата митология. Така както митичният Сизиф никога не може да постави камъка на желаното място, и в горната задача "математическият Сизиф" не може да достигне върха и верният отговор е Д). Затова в този конкретен случай добрата обща култура подпомага решаването на задачата за Сизиф, а с това поощрява учениците да не ограничават интересите си в рамките на математиката, а да поддържат широк поглед към цялата човешка култура.

Еликсир на безсмъртието

В стара книга професор Соломоновски намерил формулата на еликсир на безсмъртието. За съжаление първата и последната цифри в участващото в нея четирицифрено число x били изтрити, четели се само втората и третата и те били съответно 9 и 2. От текста до формулата ставало ясно, че x се дели на 13. Асистентът на професора д-р Всезнайков намерил разликата на изтритите цифри и тя била

А) 0 Б) 2 В) 3 Г) 7 Д) 8.

Магически квадрат

В стар ръкопис професор Соломоновски намерил полуизтрит магически квадрат, в който сборовете на числата във всеки ред, стълб и диагонал са равни помежду си, и успял да разчете четири от числата; реконструкцията е показана на чертежа. След това професорът пресметнал и останалите числа. Кое е било числото на мястото на x?

24	3	
	15	
12		x

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7.

Разкъсана книга

Професор Соломоновски намерил стара книга, разкъсана на отделни листове. Той преброил, че в записа на номерата на тези листове цифрата 2 се среща 46 пъти, и направил хипотезата, че от книгата липсва поне един лист. Асистентът на професора д-р Всезнайков проверил внимателно и установил, че от листовете, които били номерирани последователно с числата 1, 2, 3…, липсва точно един. Колко листа е имала първоначално книгата?

А) 222 Б) 221 В) 202 Г) 200
Д) не може да се определи еднозначно.

Реакцията на учениците показна, че подобни "хуманитарни" елементи в извънкласната работа по математика са особено важни. Те са обект на специално култивиране в Националния турнир "Черноризец Храбър" и се радват на почит или поне на добър прием сред организаторите на Международния Турнир на Градовете и на някои състезания и математически прояви за ученици както в България, така и в други страни.

Какво се постига чрез подобни задачи? Отговор на този въпрос може да се даде ***на базата на непосредствени наблюдения и опит, както и на мненията на ученици, учители и родители***, и до голяма степен е обусловен от вече установени общи положения в педагогиката и психологията.

На първо място, въздействие върху психологическия климат, в който протича решаването на задачи. Това е особено важно при учениците от по-ранна възраст, обикновено до 7-8 клас. Те все още "живеят" в света на любимите си приказки, филми, компютърни игри. Своеобразната "среща" на любим герой във формулировката на задача им дава чувството, че са в позната обстановка и ги освобождава до известна степен от напрежението, съпътстващо състезанията. Ако задачата е "композирана" по подходящ начин, удачно свързващ "героя" с проблемната ситуация, ученикът е улеснен да разбере по-бързо и по-точно условието на задачата.

На второ място, при учениците, особено в по-ранна възраст, голяма роля играе образното мислене, което преобладава над формалното. Затова "приказният контекст", "познатият герой" и др.п. придават по-конкретен, реален образ на постановката и на търсеното в задачата. Те дават на ученика повече "неформални" опори в разсъжденията, намаляват количеството на абстрактните и отвлечени понятия и обекти за сметка на реални.

На трето място, дават възможност по-добре да се прецени полученият от ученика отговор на задачата, да се осмисли и понякога да се забележи грешка. Така например ако за брой на хора или животни се получи дробно число, това е индикация за грешка.

На четвърто място, всяка подобна задача се запомня по-лесно и се задържа повече време в съзнанието на учениците. Онези от тях, които не са я решили по време на състезанието, често пъти се връщат към нея в мислите си и в разговорите си с връстници и родители. Така те имат възможност да огледат по-добре условието на задачата и проблема, поставен в нея, да разсъждават, като понякога успяват, макар и със закъснение, да намерят собствено решение. Понякога те могат да чуят от съученик или възрастен някоя идея за решение или направо цялостно решение. Така подобна задача стимулира по-продължително мислене и работа върху задачата.

И накрая, подобни формулировки създават трайно положително отношение към математиката както у самите ученици, така и у техните учители и родители, а чрез тях – и в обществото. С удачно въведени елементи на хумор се постига опровергаване на разпространяваното мнение за "сухостта" на математиката и математиците, за тяхната изолираност от света и др.п.

Разбира се, "нематематическите" формулировки не бива да бъдат самоцелни. Едно лошо подбрано съчетание на

математическото съдържание с нематематически "сюжет" носи повече вреда, отколкото полза. Трябва да се има предвид, че задачите с традиционни математически формулировки трябва да преобладават в състезателната тема; в противен случай лесно се стига до профанизиране на духа и целите на състезанията. При това естествено е с "порастването" на учениците да намалява броят на задачите с "приказно" съдържание, което би могло да бъде схванато от учениците като "бебешко"; за големи ученици (11-12 клас) появата на повече от една "закачлива" формулировка в състезателната тема е израз на лош вкус.

2-4. Кратко или дълго условие?

Разбира се, краткото и ясно условие на задачата винаги е за предпочитане. Изискването за кратко и ясно условие е особено важно за състезания, които са ограничени в рамките на кратко време. Такива са "очните" математически състезания и олимпиади. Когато човек има на разположение четири или пет часа (четири и половина в случая с олимпиадите), за да реши и опише решението на три задачи, ясно е, че загубата на 15-ина минути за прочит и вникване в същността на дадена задача е неоправдана. Стремежът към краткост и простота е много важен например при подготовка на условията на задачите за международни олимпиади. Там журито избира състезателната тема, след което задачите внимателно се оглеждат и се фиксират формулировки на английски език. За ръководителите на отборите на отделните страни настъпва отговорен момент: те трябва да преведат условията от английски на собствения си език. Преводът трябва да е точен – това условие е абсолютно необходимо. Но ако той е много дълъг и неясен, ще създаде допълнителни грижи на участниците. Така на международните олимпиади зад кулисите съществува и негласно състезание между ръководителите: да направят колкото може по-кратки, по-ясни и "по-удобни" преводи на условията на задачите, и с това да улеснят максимално учениците си.

По традиция ***тестовете от задачи с избираем отговор*** се състоят от относително голям брой задачи (20-30 и повече), които трябва да бъдат решени за кратко време (60-120 мин.). Това налага да се обърне голямо внимание на краткостта и яснотата на условията. Те трябва да бъдат лаконични и лесно разбираеми. Към много от геометричните задачи е препоръчително да има чертеж. Ученикът трябва бързо да бъде доведен до същината, или може би по-точно, към "есенцията" на задачата.

Горните констатации не означават, че трябва да пренебрегваме задачите с дълги условия. Има редица интересни и важни задачи, които изискват по-дълго описание и съответно по-дълга формулировка. За предпочитане е те да бъдат насочвани към задочните състезания (конкурси на математически списания, реферативни състезания и др.). Формите на работа с ИУ са разнообразни и за всяка от тях има най-подходящ тип задачи; съобразяването с това обогатява, а не ограничава кръга от използваните задачи и формата, в която те се поднасят.

2-5. Особености на задачите с избираем отговор

Вековната практика за формулиране на математическите задачи е наложила като най-универсални ***задачите "от отворен тип"***, където почти няма ограничения за това какво искаме от решавача. За разлика от тях задачите с избираем отговор предлагат на решавача да избере и посочи като правилен един от няколко (от 2 до 5-6, понякога повече, но обикновено 5 или 4) предложени възможни отговора. Това ограничение на формата на поставяне на задачата практически изважда от употреба в математически състезания цели класове от задачи.

Например ако искаме да формулираме задача за построение като задача с избираем отговор, праволинейното отношение води към конструиране на 4 или пет варианта на построение, от които само един е верен, и предлагане на решавача за избор петте варианта. Така обаче условието става много дълго, защото всеки вариант на построение е дълъг.

Подобни са проблемите и със задачите за доказателство.

Поради посочените причини в практиката на математическите състезания липсват задачи за построение и доказателство с избираем отговор.

Трудностите в това отношение обаче понякога могат да бъдат заобиколени, и по-надолу предлагаме примери, които показват как може да стане това. Разбира се, става дума за отделни находки, а не за универсални рецепти.

Пример. За задачата "Даден е ΔABC и средата M на AC. През B и C да се прекара окръжност, допирателната към която от точката A е равна на AM." е предложено следното решение, в което е допусната грешка:

"1) През M построяваме права l, която {е успоредна на BC};

2) Построяваме пресечната точка N на l и AB;

3) Построяваме описаната около Δ NBC окръжност Γ, която е търсената."

За да стане решението вярно, трябва изразът в големите скоби да се замени с:

A) сключва с *AC* ъгъл, равен на $\angle ABM$;
B) сключва с *AC* ъгъл, равен на $\angle CBM$;
C) е перпендикулярна на *AB*;
D) е перпендикулярна на *AC*;
E) е успоредна на *BC*.

Макар и по-малко очевидни, проблеми възникват и при други типове задачи. Традиционните задачи за "решаване на уравнение" при праволинейно трансформиране се превръщат в задачи, допускащи друго естествено решение. Например

Пример. Да се намерят корените на уравнението $x^2 - 3x + 2 = 0.$

А) 1 и 2 Б) 1 и 3 В) 2 и 3 Г) 1 и 4 Д) 2 и 4.

само формално прилича на задача за решаване на уравнение. Нейното естествено решение е

"Решение: Заместваме последователно 1 и 2 в уравнението и получаваме

$$1^2 - 3.1 + 2 = 0$$
$$2^2 - 3.2 + 2 = 0,$$

т.е. тъждества. Следователно 1 и 2 са търсените решения.",

от което става ясно, че фактически сме получили задача за числено пресмятане на алгебрични изрази за конкретна стойност на участващата буква.

И при този тип задачи проблемите може да бъдат заобиколени. Примери в това отношение има в (сборника с Б. Лазаров). Конкретно в горния случай бихме могли да се насочим например към варианта

Вариант: Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 3x + 2 = 0$, да се намери $|x_1 - x_2|$.

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4 Д) 5.

Техниките, чрез които се постига заобикаляне на възможността за директно заместване на отговори в уравнение и/или неравенство, са разнообразни. Ето няколко конкретни примера, които илюстрират някои от най-предпочитаните:

Пример 1. Броят на решенията на уравнението $|2x-3|-|x+1|=5x-10$ е равен на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) безброй много Д) нула.

Пример 2. Намерете сумата от корените на уравнението $\sin x-\sin x\cos x+\cos x=1$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right)$.

А) π Б) $\frac{\pi}{2}$ В) $\frac{\pi}{3}$ Г) $\frac{7\pi}{4}$ Д) $\frac{\pi}{12}$.

Пример 3. Броят на целочислените решения на неравенството $|x|\geq x^2-30$ е:

А) 13 Б) 12 В) 11 Г) 6 Д) безброй много.

Пример 4. Намерете сумата от целите стойности на параметъра *a*, за които уравнението $x^3-x=a\left(x^3+x\right)$ има точно три реални корена.

А) -7 Б) 0 В) 1 Г) 11
Д) няма такива стойности.

Както се вижда от тези примери, налага се да изменим формулировката на задачата, но тази промяна е формална; решението на новата задача е практически еквивалентно на решението на предишната.

2-6. Избор на дистрактори

Ще се спрем по-подробно на един много деликатен момент при изработване на формулировката на задача с избираем отговор: избора на дистракторите (неверните отговори). За да очертаем по-добре проблемите около него, ще опишем накратко особеностите на двата основни прилагани в практиката типа тестове.

И в двата случая става дума за тестове, съставени от задачи с избираем отговор. Принципната разлика е във възприетия начин на оценка на теста, и по-специално на задачите, в които решаващият не е посочил отговор.

Диагностични наричаме тестовете, в които непосочен отговор се оценява като грешен.

За разлика от тях ***състезателни*** наричаме тестовете, в които непосочен отговор се оценява с междинна оценка; ако приемем, че грешните отговори се оценяват с 0 точки, то оценката за непосочен отговор се избира от 20 % до 50 % от оценката за верен отговор.

Този нюанс в схемата за оценка на отговорите прави тестовете ***различни по цели*** (оттам и на поле на приложение) ***и съставяне*** (в частност по избор и на самите задачи, и на дистракторите в тях).

Забележка. Термините ***"диагностични"*** и ***"състезателни"*** в смисъла на приведените дефиниции се използват в практиката, но не са общоприети. Тук се придържаме към тях за удобство.

Първата важна разлика между двата типа тестове, която непременно трябва да бъде отбелязана, и която води до многобройни последствия, е различната стратегия, която следват учениците при решаване на теста.

Очевидно е, че за постигане на по-добър резултат при диагностичните тестове решавачът трябва да попълни отговор на всички задачи. Например, след като попълни отговорите на задачите, с които по негова преценка се е справил, и когато са останали само задачи, които не може да реши, той следва да попълни по произволен начин (опитвайки се да "отгатне") отговори на нерешените задачи.

Не така стоят нещата при ***състезателните тестове***. Тук ***отгатването е грешна стратегия***, защото при 4, 5 или повече дистрактора вероятността за грешен отговор е доста голяма, а за такъв отговор в оценката е предвидено наказание – 0 точки, или (обикновено) с 2-5 по-малко, отколкото би била присъдена за непопълнен отговор. С други думи, тук участниците се стремят да попълнят отговорите на решените задачи, а нерешените да оставят без попълнен отговор, като за всяка такава задача получат няколко точки, вместо да рискуват да отгатват и евентуално да получат нулата точки, предвидени за грешен отговор.

Така на практика се оказва, че ако в правилата за оценка на теста предвидим "наказание" (или "глоба") за грешен отговор в сравнение с непопълнения, изменяме съществено стратегията на решаващите. Ще видим до какви следствия води тази разлика.

За целта да разгледаме хипотетичен тест от диагностичен тип (т.е. при оценяването не се прави разлика между грешни и непопълнени отговори) от 60 задачи (или въпроса), и да предположим, че за всяка задача има по четири възможни отговора: един верен и три дистрактора. Да предположим още, че:

1) Тестът е проведен с голям брой ученици, например 3000-4000.
2) За верен отговор е предвидена 1 точка, за грешен (или непопълнен) 0.

3) Полученият среден резултат (т.е. резултатът на "средния ученик") е 30 точки.

4) Всички ученици са работили съвестно, стремейки се да получат максимален резултат, и съответно са попълнили отговор на всички задачи.

Сега можем да съобразим, че ако средният ученик е получил 30 точки, те са от:

I) задачите, които той съвестно е решил; нека те са X на брой, и

II) задачите, чийто отговор той е отгатнал; техният брой е (60-X)/4, защото при четири възможни отговора той "улучва" верния с вероятност ¼.

Така стигаме до уравнението X+(60-X)/4=30, от което съвсем лесно намираме X=20.

Следователно средният ученик е получил 20 от своите 30 точки за показания от него обективен резултат, и 10 – от отгатване. На практика, точките, получени от отделните участници, могат да варират от 0 до 60.

Но ако средният ученик по законите на теорията на вероятностите улучва верния отговор на една от всеки четири задачи, не така стоят нещата с реалния ученик. Някои от тях имат по-голям шанс, други – по-малък. Както при средния ученик, така и при всеки реален ученик ***резултатът е сбор от две компоненти***: едната отразява ***показаните знания***, другата е ***случайна величина***, резултат от късмет, нещо като хвърляне на своеобразен зар или игра на тотализатор.

Очевидно е, че тази случайна компонента не е малка, и ние ***не можем да получим*** от резултатите на този тест ***обективно подреждане*** на участниците в него по "знания", или по показани истински, реални резултати.

Казано с други думи, този тест не може да бъде използван за "честно" и обективно състезание между участниците.

На пръв поглед изглежда, че този извод компрометира напълно диагностичните тестове. Това обаче не е така. Правилно прилагани, те могат да бъдат полезни. Предимството им е, че резултатите от тях се обработват по-лесно, например допускат оценяване с шаблони, които не са приложими за състезателни тестове с избираем отговор.

Типичната ситуация, в която ***прилагането на диагностични тестове е целесъобразно, е за преценка на средното ниво*** на определен вид знания за група ученици. Например, ако искаме да разберем, как учениците от 6 клас в Пловдивска област работят с десетични дроби – без индивидуални оценки, а да преценим средното ниво – може да използваме анонимен диагностичен тест, чрез който както в примера по-горе от общия среден резултат да пресметнем обективно решените от среден участник задачи. Този показател би могъл да се използва за сравняване на работата на областни инспекторати, на различни учебници и т.н.

Горните обяснения обаче демонстрират нагледно, че ***диагностичните тестове не са подходящи за състезателни цели.***

Съпоставени с тях, състезателните тестове заслужават названието си: чрез тях може да се постигне до голяма степен справедливо класиране, адекватно на показаните от участниците резултати. Залог за това е оптималната стратегия, която като цяло следват участниците, и сравнително малкото на брой произволни "отгатвания". Още сега обаче трябва да подчертаем, че отгатванията не са напълно изключени; те обаче са разумни и обикновено се прилагат от участниците, когато последните по някакви съображения успяват да разпознаят като грешни част от предложените отговори на дадена задача, свеждайки по този начин избора си например до един от два възможни отговора. Ясно е, че в повечето такива случаи "отгатването" е печеливша стратегия. Но в същото време ***това не е "чисто отгатване", а почива всъщност на частично решаване на задачата,*** ако така може да наречем "откриването" на грешни отговори.

Борба срещу "отгатването" се води и при диагностичните тестове. Тук тя удачно се вмества в контекста на стремежа за точно диагностициране.

2-7. Дистракторите при диагностични тестове

Обикновено с ***диагностични тестове*** се измерват важни, базови знания в строго определена тясна област. В тази ситуация е необходимо да имаме представа от типичните грешки, които допускат учениците; ясно е, че тези типични грешки следва да бъдат отразени в предлаганите дистрактори (грешни отговори) към задачите. Така ученик, допуснал типична грешка, получава съответния грешен отговор и го маркира, а с това си осигурява съответната нулева оценка; от своя страна организаторите на теста правят верни изводи за недостатъците в подготовката на ученика и могат да вземат мерки тези недостатъци да бъдат отстранени.

Ако ученикът допусне грешка, но не получи някой от предложените му отговори (сред които е и верният), той фактически разбира, че е сбъркал; ако не може да се поправи, той "отгатва" и има шанс (обикновено около 10-25 %) да налучка верния отговор. Това, общо взето, не е желателно, защото пречи на точното диагностициране. Затова ***дистракторите трябва да бъдат избирани много внимателно, като отчитат в максимална степен възможните грешки, и особено типичните грешки***.

Тази особена роля на дистракторите изисква и провеждането на апробация на тестовете, една от важните роли на която е проверка "как работят дистракторите". Ако някой от дистракторите остане "пренебрегнат" от учениците, желателно е той да бъде заменен с по-подходящ.

Ако при диагностичните тестове е важно дистракторите към дадена задача да визират типични грешки, допускани при решаването й, не така стоят нещата при състезателните тестове.

§ 3. Избор на дистрактори при задачи за състезания

Обект на нашето внимание е ***изборът на дистрактори при задачи с избираем отговор за математически състезания***.

По начало изборът на дистрактори е един много отговорен елемент от формулирането на задача с избираем отговор. Може да се каже, че дистракторите играят роля, понякога доста важна, за оформяне облика на задачата и влияят на трудността й. Това е добре известно от теорията за създаване на диагностични тестове, която дава определени правила и препоръки за практическата дейност по съставянето им.

В контекста на ***състезателните тестове*** обаче ***основното правило: дистракторите да отразяват типични грешки, допускани от учениците при решаването на задачите, е погрешно***. Това ще бъде показано с подробен анализ в следващите редове.

Първо ще опишем основната причина, поради които горното правило не бива да се спазва, и след това ще посочим пример, който илюстрира нашето твърдение.

Преди всичко трябва да отбележим, че по правило задачите в диагностичните тестове са ***стандартни задачи*** и от учениците се иска да приложат за решаването им стандартна техника, изучавана в училище. Ако в тяхното решение се обособяват отделни етапи, то те са чисто технически, свързани със стандартната процедура за решаването им.

За разлика от тях решенията на задачите за състезателни тестове почти винаги са съставени от няколко технически момента, чието съчетаване изисква определено ***досещане***. Именно върху досещането пада "тежестта" при решаването на задачата; самите технически елементи обикновено не представляват сериозно препятствие за участниците в състезанието, макар че и при тяхното преодоляване учениците понякога грешат.

Да предположим, че ученикът M се явява на диагностичен тест, и решавайки някоя задача p, допуска техническа грешка и получава грешен отговор g. Ако този грешен отговор g е сред дистракторите, M го посочва като верен отговор. При проверката на теста грешката се отчита, а това е и целта на диагностицирането.

Ако грешният отговор g не е сред дистракторите, ученикът обикновено първо търси грешка в решението си; ако я намери, попълва верен отговор, като за сметка на грешката губи допълнително време, което го ограничава при по-нататъшната работа по теста. Ако M не намери грешката си, или оставя отговора "празен" (непопълнен), или се опитва да отгатне. И в двата случая целта на диагностицирането е постигната.

Горният анализ показва, че присъствието на грешния отговор g сред дистракторите улеснява диагностицирането; той дава индикация за допускане на грешка, която води до грешния отговор g.

По принцип по същия начин протича и решаването на задачата при състезателен тест.

Да предположим, че, решавайки задача от състезателен тест, ученикът N допуска грешка и като резултат получава грешен отговор g. Възможни са два случая:

I) Ако този грешен отговор присъства сред дистракторите на задачата, в тази ситуация естествено N посочва g като верен отговор.

II) Ако g не е сред дистракторите, N прави проверка на решението си и ако си открие грешката, може да я поправи и да попълни верния отговор; ако не я открие, ще остави задачата без отговор.

В случая I) N получава 0 точки, а в случая II) - 3 или 7 (при обичайното оценяване на средни по трудност задачи в Турнира "Черноризец Храбър").

Сега вече имаме общ поглед върху възможните резултати, постигнати от участник в състезателния тест, и можем да се насочим към сърцевината на изследвания проблем.

Към нея ще ни отведе въпросът: справедлива оценка ли е получил N за постигнатото от него в случая I) ?

Даже от пръв поглед се вижда, че отговорът е НЕ. N не се е опитвал да отгатва, за да попадне под ударите на въведеното "наказание" (или "глоба") за грешен отговор.

Но всъщност практиката показва, че в повечето случаи несправедливостта е още по-голяма, отколкото очертаната в предишното изречение.

Причината за такава несправедливост е в това, че фактически често пъти "типична грешка" при състезателните задачи имаме тогава, когато ученикът е ***постигнал определен, често пъти съществен, прогрес в решаването на задачата***. Той може да се е "досетил", където трябва, да се е справил с почти всички технически детайли и ***само в един от тях да е допуснал техническа грешка***. Това означава, че ***за подобно решение*** при "обичайна" формулировка на задачата (от отворен тип) ***той би получил почти максимална оценка*** ! Вместо това в състезателния тест за незначителна техническа грешка той би бил допълнително "наказан".

Тази абсурдна ситуация показва, че наистина присъствието на "типични грешки" сред дистракторите на задачите в състезателен тест е нежелателно.

Горната констатация с пояснения е докладвана от Б. Лазаров и Й. Табов на VI Световен конгрес по математическо образование в Севиля през 1996 г. и на конференцията "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков" в Дубна през 2000 г. (**Tabov & Lazarov** 2000). В доклада е анализиран следният пример:

Задача. В равнината са дадени 5 точки в общо положение. От всяка от тях са спуснати перпендикуляри към правите, минаващи през всеки две от останалите четири точки. Колко общо са пресечните точки на

прекараните перпендикуляри?
(Международна олимпиада по математика 1964 г.)

Решението на тази задача може да бъде разделено на три основни стъпки:

1) Определяне на броя на всички прекарани перпендикуляри и на броя на двойките перпендикуляри;

2) Определяне на съвкупностите от взаимно успоредни перпендикуляри и броя на перпендикулярите в такава съвкупност;

3) Определяне на броя на точките, в които се пресичат повече от два перпендикуляра.

Във всяко вярно решение се прави подходяща комбинация и интерпретация на резултатите от тези стъпки.

Сега да си представим, че трябва да предложим система за оценяване на решенията на тази задача; тя трябва да отчита възможните "типични грешки". Такава система би могла да изглежда по следния начин:

- 2 точки за решение от вида: "4 точки в общо положение определят 6 прави; към всяка от тях е спуснат перпендикуляр от петата точка, следователно перпендикулярите са общо 5x6=30, и затова броят на пресечните точки е 30x29/2=435." Това решение е грешно, обаче ученикът е схванал общата идея и е показал, че владее необходимата комбинаторна техника.

- 4 точки за решение, в което има разсъждения от вида "към всяка права, съединяваща две от дадените точки, са спуснати 3 перпендикуляра; тези три перпендикуляра са успоредни и не се пресичат; две тройки от успоредни перпендикуляри определят 9 пресечни точки; и тъй като броят на правите, съединяващи двойка от дадените точки, е 5x4/4=10, то търсеният брой пресечни точки на перпендикулярите е 9x10=90."

- Още 4 точки за решение, което освен някой от горните резултати взима под внимание факта, че всеки три от дадените пет точки са върхове на триъгълник, а височините на този триъгълник, които са перпендикуляри от визираните в задачата, имат обща пресечна точка; тъй като броят на всички такива триъгълници е 5x4x3/(2x3)=10, от резултата, получен според някое от предишните разсъждения (435 или 90) трябва да се извади 10x2=20.

Стъпките 2) и 3) са взаимно независими. Ученик, който е осъществил някоя от тях в решението си, е показал геометрични знания на доста високо ниво. Ясно е, че такъв ученик има потенциал да реши задачата; и ако той е пропуснал някоя от тези стъпки, това е просто резултат от недостатъчно внимание или лош шанс. Това непременно трябва да се отчете при евентуално оценяване на решението му.

Сега да си представим, че разглежданата задача е формулирана като задача с избираем отговор, придружена от следното решение и дистрактори:

А) 70 Б) 90 В) 415 Г) 435 Д) 500

В съответствие с направения анализ и предложенията за оценка, отговорът А) би трябвало да се оцени с 8 точки (максимум) като верен отговор; Б) – с 4 точки; В) – с 6 точки, Г – с 2 точки, и Д) – с 0 точки. Спецификата на тестовете с избираем отговор обаче налага други стандартни правила: посочилите някой от отговорите Б), В) или Г) ***получават по 0 точки, въпреки че са представили решение, което заслужава по-висока оценка***.

Така на практика дистракторите Б), В) и Г), които визират типични грешки, характеризиращи решения "с неголям пропуск", се оказват своеобразен ***капан***, заложен за силните ученици, който ги наказва незаслужено сурово за незначителни грешки.

От този пример се вижда, че ***типични грешки, характеризиращи решения "с неголям пропуск", не се препоръчват за дистрактори при състезателни тестове***.

С подобни разсъждения може да се покаже, че ***при състезателни тестове е за предпочитане*** и типични грешки, които са резултат от ***съществен пропуск, също да не се избират за дистрактори.***

В случаи, които са подобни на разгледаната по-горе задача, е целесъобразно да се усложни системата за оценяване, като се предложат повече възможни отговори – например 10, като 4 от тях (означени в нашия анализ с А), Б), В) и Г)) се оценяват примерно съответно с 10, 6, 8 и 4 точки, отказ от отговор се оценява с 3 точки, а за посочване на някой от 6-те дистрактори (грешни отговори, означени с Е), Ж) и т.н.) се присъждат 0 точки.

§ 4. Оценка на трудността на задачите за състезания

4-1. Категорията трудност на задача

Въпреки че в българската просветна традиция анализът на трудността на задачите не е публичен и почти липсва в статии и книги, той несъмнено е важен и е основен елемент в дискусиите между учители за теми на приемни изпити, състезания и други.

Преди всичко е важно да подчертаем още веднъж, че понятието "трудност" не е математическо, а отразява субективни оценки за творческия процес при работа с дадени (в нашия случай математически) проблеми. На него се спряхме в предишната глава.

Един от основните проблеми в обучението по математика е това понятие да се "обективизира", конкретизира, евентуално да се модифицира, упрости (и моделира) така, че упростеният вариант (математически модел) на "трудността" да подлежи на измерване, сравняване, в краен случай на относително по-проста преценка, за да може да бъде удобно за нуждите на практиката.

Според Крупич (**Крупич** 1995), в изследванията на различните проблеми, свързани със задачите в училищния курс по математика, важна роля играе общото понятие ***"структура на задачата",*** което е в основата на определянето на ***"сложността"*** на задачата, а тя от своя страна е свързана с "трудността" на задачата.

Пак според Крупич (**Крупич** 1995), тук сред изследователите има ***три направления***.

Първото направление при изследване на характеристиката "сложност" на дадена задача предлага количествени критерии и оценки, прилагайки ***алгоритмичен подход*** (т.е. анализ на алгоритъма за решаване) за определянето им.

Представителите на второто направление изследват оценката за трудност на дадена задача като психолого-дидактическа характеристика. Например трудността на дадена задача се оценява количествено като ***отношение на усвояваните знания към усвоените***, които се проявяват в процеса на решаване. При други изследвания оценката за трудност на дадена задача се изгражда на базата на нейната структура, на броя на елементите в нея и др.п.

Трето направление, чийто представител е българският педагог Иван Ганчев (**Ганчев** 1976), свеждат оценката за ***сложността на дадена задача*** към, грубо казано, ***сумарна оценка на базата на***

съставните части на алгоритъма на нейното решение; например, към сумата на емпирично получени коефициенти на сложност на последователните операции, изграждащи решението, или към броя на елементарните подзадачи, съставящи решението.

Тези три направления, описани в монографията на Крупич, насочват своите теории към търсене на възможност за ***априорни*** оценки за ***сложността на решението*** (а оттам и на трудността) на отделни задачи, които могат да бъдат правени независимо от евентуални данни от натрупан опит, без да се правят експерименти, а само от анализ на логическата структура на задачите и на данни за стари и нови знания на учениците.

В първа глава е представен анализ на този тип подходи, като са посочени техните силни и слаби страни. От него е ясно, че те не са подходящи за задачите за математически състезания.

За да може да си служим с понятието трудност по-удобно и да можем да го използваме за по-определени изводи, е необходимо да го впишем в по-тесен контекст, в който да можем да го свържем с подходящи за пресмятане параметри. Това може да стане по различни начини, така че трябва да свикнем с мисълта за съществуването на различни дефиниции на понятието "трудност на задача" (в същото време близки до дефиницията, спомената в глава първа); и от тях трябва да предпочитаме онези, които са възможно по-близки до интуитивните представи за трудност и в същото време са достатъчно удобни за ползване. Последното изискване би могло да бъде конкретизирано и по следния начин: желателно е "трудността на задача" да може да се изразява с число, като при това на по-голямо число да отговаря по-трудна задача.

Но математическите състезания дават добра възможност да се облегнем на допълнителна информация за трудността на задачите, дадени на самото състезание, тъй като разполагаме с ученическите решения, чийто брой и "пълнота" фактически отразяват тази трудност. Статистическите данни за броя и "верността" на решенията на състезателите могат да бъдат добра база за ***апостериорна*** оценка на трудността на отделните задачи.

Този нов подход, който по-добре отразява "евристичните елементи" в задачите, е разработен и приложен от Кендеров, Табов и Велев (**Kenderov & Tabov** 1990), (**Табов и Велев** 1996, доклад на XXIX Пролетна конференция на СМБ).

В първата от цитираните публикации се визират международните олимпиади по математика. В тяхната по-ранна история Международното жури, което определя състезателната тема, се занимаваше и с предварителна преценка за трудността на задачите, като за решения на по-трудните задачи се предписваха повече точки.

Сега ще се спрем на методите, развити във втората спомената публикация (**Табов и Велев** 1996), където са представени резултати и изводи от изследване върху трудността на задачите от математическия турнир "Черноризец Храбър" '94. Там е реализирана следната идея: една задача е по-трудна от друга, ако, грубо казано, е решена от по-малко участници.

Темата на турнира се състои от 30 задачи (публикувани във (**Василева** 1995)). Задачите са предварително наредени по трудност и групирани в три групи по десет задачи от журито на турнира.

За всяка задача участниците или избират за верен един от предложените им 5 отговора или не отговарят ("празен" отговор). Участниците се класират по получените от тях резултати, представляващи сума от точките, които им се присъждат за всяка задача по следния начин: за неверен или за празен съответно 0 или 3 точки, а за верен отговор – или 5, или 7, или 9 точки в зависимост от принадлежността на задачата към една от трите предварително определени от журито "групи на трудност".

През 1994 година в турнира участваха 453 ученика. По технически причини сме работили с резултатите на 449 от тях.

4-2. Предварителни оценки на трудността на задачите в Турнира "Черноризец Храбър" '94

За представяне на обсъждания проблем използваме като описателни статистики разпределенията на сумата от точките, броя на верните, неверните и празните отговори на задачите от участник – величини, които я илюстрират достатъчно общо.

Диаграма 1 илюстрира разпределението на сумата от точките, получени от участниците. Абсцисата 85 например означава "брой точки от 80 до 85", а колонката над нея е с височина, съответстваща на броя участници, получили от 80 до 85 точки. Кривата, изобразена на диаграмата, е графика на функцията $y=F(x)$, където $F(x)$ е процента на участниците, получили не повече от x точки. При аналогични означения Диаграма 2 и Диаграма 3 показват разпределенията на верните и неверните отговори от участник (т.е. броя участници с 1, 2, 3 и т.н.

верни/неверни отговори), а Диаграма 4 – разпределението на броя на задачите, оставени без отговор от участниците.

Четирите диаграми нагледно ни убеждават, че от интуитивна гледна точка темата е била ***умерено трудна*** за участниците.

Максималният брой присъдени точки (155) съответства на 73.81% от максималния възможен брой (210 точки), 86.64% от участниците имат не повече от 105 точки, а 95.65% от участниците са оставили 10 или повече задачи без отговор.

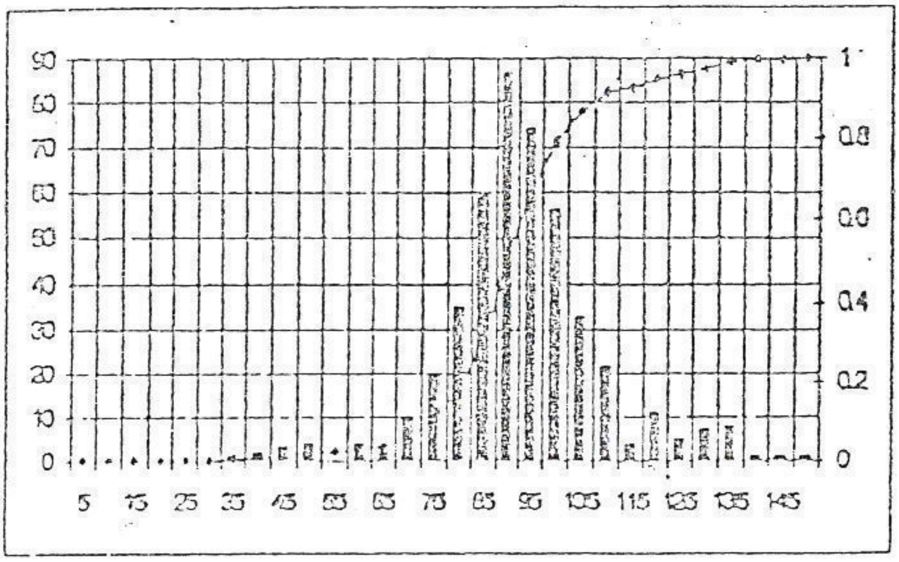
Регламентът на турнира е насърчил участниците към ***отказ от налучкване***. С не повече от 10 неверни отговора са 92.43% от участниците. Успоредно с това броят на задачите, оставени без отговор е голям: с не повече от 15 задачи без отговор са по-малко от 20% от участниците.

4-3. Изследване на трудността на задачите в Турнира "Черноризец Храбър" '94

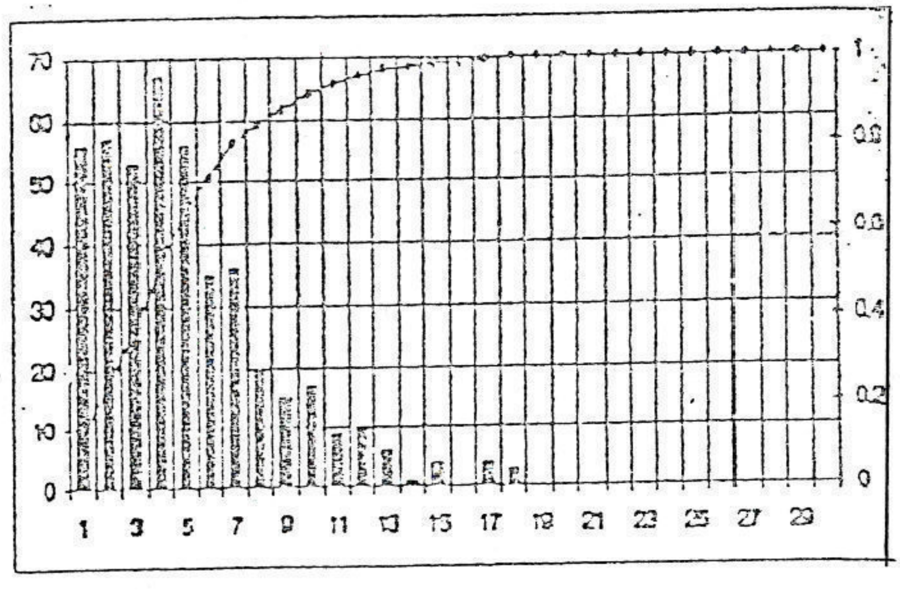
Дефинираме няколко количествени характеристики на трудността, разделени на две групи:

I група – характеристики, които представляват отношения (вижте например (Harman & al 1993)):

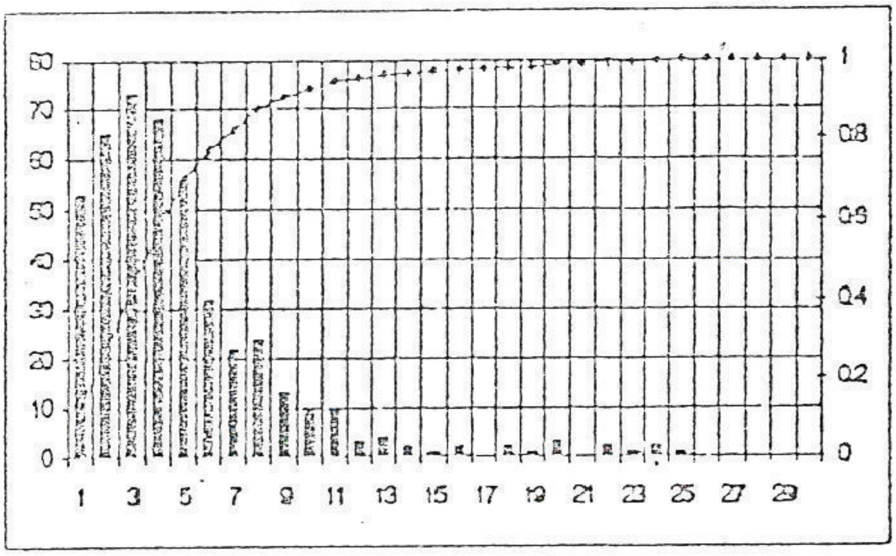
- r – броя на верните отговори към броя на всички участници;
- a – броя на дадените отговори (верни и неверни) към броя на всички участници;
- ρ – броя на верните отговори към броя на дадените отговори.



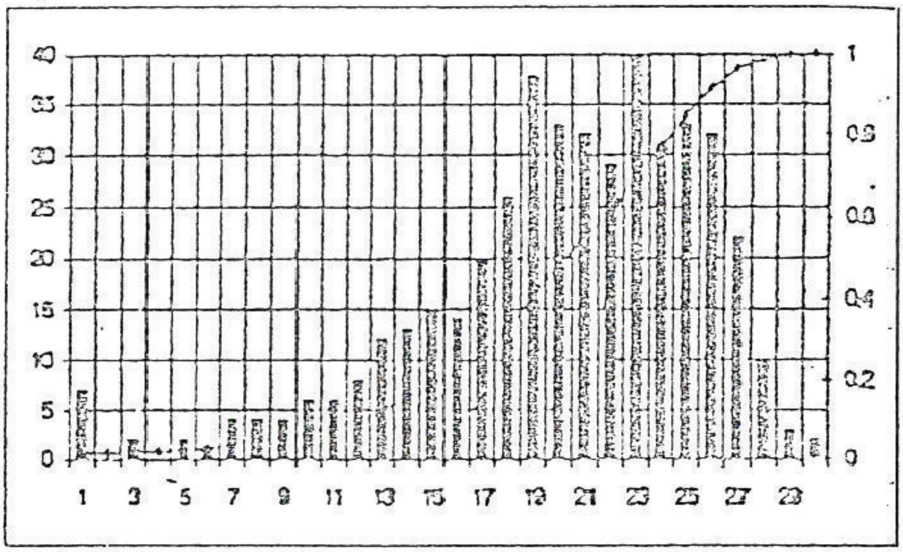
Диаграма 1



Диаграма 2



Диаграма 3



Диаграма 4

II група – характеристики, които са линейни комбинации от относителния брой на верните и празните отговори (спрямо броя на участниците), взети съответно с тегла T_r и T_b :

- $e_i = r + (T_b / T_i).b$, където i = 1,2 и 3, а

  b = Брой празни отговори / Брой участници

  $E = T_r\, r + T_b\, b$

На точното описание на характеристиките e_1 , e_2 и e_3 няма да се спираме, а само ще отбележим следното:

- Първата характеристика – e_1 е изчислена със стойности на теглата T_b = 3 и за T_r € {5, 7, 9}, като конкретните стойности на теглата се определят от принадлежността на задачата към съответната група на трудност.
- Втората – e_2 е изчислена със стойности на T_b = 3 и T_r , линейно зависещо от e_2 за T_r € [5, 9].
- Третата – e_3 е изчислена със стойности на T_b и T_r , линейно зависещи от e_3 за T_b € [2, 4] и T_r € [5, 9].
- Характеристиката E е изчислена за T_b = 3 и T_r € {5, 7, 9} по наредбата на задачите по трудност, извършена от Журито на турнира.

Таблица 1 представя една ***извадка от изчислените характеристики за трудност*** и съдържа задачите, определени от 4 от характеристиките r, a, ρ, e_1, e_2 , e_3 в шестицата на най-трудните задачи.

N	В	П	Н	N	r	N	a	N	ρ	N	e_1	N	e_2	N	e_3	N	E	S
4	34	164	251	9	0.076	28	0.635	2	0.119	1	0.197	1	0.210	1	0.180	1	1.777	!!!!
12	42	271	136	12	0.094	23	0.396	6	0.236	4	0.295	4	0.329	4	0.293	3	2.465	!!!!
13	23	285	141	5	0.051	21	0.365	4	0.140	2	0.263	2	0.295	2	0.249	2	2.263	!!!!!
21	12	386	51	2	0.027	2	0.140	5	0.190	5	0.313	6	0.370	5	0.321	7	2.820	!!!!!!
28	16	328	105	3	0.036	15	0.269	3	0.132	3	0.279	3	0.319	3	0.270	4	2.512	!!!!!
30	2	428	19	1	0.004	1	0.047	1	0.095	6	0.322	9	0.398	8	0.338	11	2.900	!!!!

Забележка: Знакът „!“ означава включване на задачата в шестицата на най-трудните за някоя от характеристиките $r, a, \rho, e_1, e_2, e_3$.

Таблица 1

Забележка: Знакът "!" означава включване на задачата в шестицата на най-трудните за някоя от характеристиките *r*, *a*, ρ, e_1 , e_2 , e_3 .

4-4. Поглед върху резултатите от изследването на трудността на задачите в Турнира "Черноризец Храбър" '94

Най-напред да погледнем някои от разпределенията на характеристиките на трудността на задачите, доколкото те позволяват по-лесно възприемане и осмисляне на табличните данни. Тук ще покажем разпределенията на характеристиките ρ (Диаграма 5) и e_3 (Диаграма 6) отново с илюстративна цел.

Характеристиката ρ има относително по-равномерно разпределение, което свидетелства за това, че задачите действително могат да бъдат оценявани по скала "трудни-лесни". От друга страна, позволява и по-равномерно групиране на задачите по брой в отделни групи на трудност.

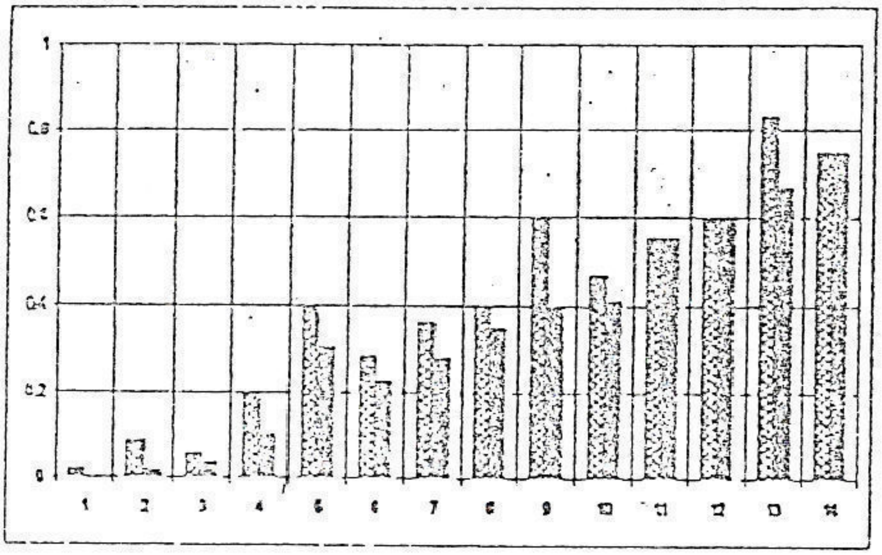
Да отбележим специфичните стойности на e_3 за някои особени случаи:

- e_3 = 1 за задача, получила верен отговор от всички участници,
- e_3 = 0 за задача, с неверен отговор от всички участници,
- e_3 = 0.25 за задача, оставена без отговор от всички участници.

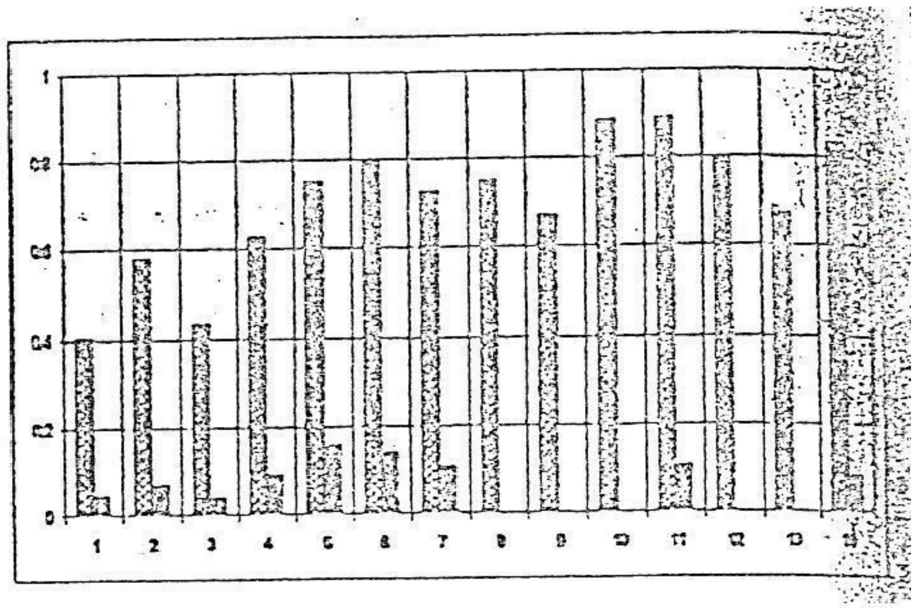
Характеристиката e_3 има по-компактно разпределение, което позволява по-компактно групиране на задачите по трудност.

Въпреки че характеристиките e_i са производни на *r*, те са ***по-добре корелирани с ρ***, така че бихме могли да ***препоръчаме използването на последната характиристика***, поради по-лесното й изчисляване.

Характеристиката e_3 има най-висок коефициент на корелация с всички останали характеристики, а характеристиката *a* има най-ниска степен на корелация с всички останали.



Диаграма 5



Диаграма 6

4-5. Анализ на компонентите на състезателната в Турнира "Черноризец Храбър" '94

1. Един ***важен въпрос,*** на който бихме искали да получим отговор на базата на горните резултати, е следният. Ако желаем да ***използваме повторно*** темата, целесъобразно ли е ***да се измени наредбата на задачите*** в нея? Ако отговорът е да, каква е конкретната препоръка? С други думи, препоръчителна ли е промяна в априорната оценка на трудността на отделните задачи?

Този проблем възниква поради факта, че в зависимост от групата на трудност, в която Журито е поставило дадена задача, зависи броят на точките, с които се оценява решението й. Ясно е, че ако от две задачи по-трудната първоначално е била поставена в групата на по-леки, то при повторно провеждане на състезание с този тест (евентуално с други ученици) е целесъобразно местата им в теста да бъдат разменени.

На основа на получените данни по горните характеристики считаме, че за разглежданата тема е целесъобразно да се направят 6 такива промени, които засягат прегрупиране на задачите в трите групи по трудност. Да се разменят местата на задачи 22 и 4, на 27 и 13, на 24 и 12, на 17 и 5, на 15 и 8 и на 14 и 10.

2. Втори важен въпрос. ***Би ли се повлияло класирането на участниците от една преоценка на трудността на задачите*** по резултатите от турнира? Този въпрос е свързан с по общ въпрос. Възможно ли е ***да се определя трудността на задачите в едно математическо състезание апостериори, след състезанието, по статистически характеристики, изчислявани чрез резултатите от него***, като по този начин да се постигне по-коректно класиране?

Нашите предварителни изследвания показват, че това е деликатен проблем, защото засяга правилата, по които се оценяват резултатите на участниците. Поставянето апостериори на тегла на трудност може да остави впечатление, че евентуално е възможна манипулация с цел да се постигне пренареждане в класирането. Затова ще разгледаме този проблем само илюстративно, като сравним възможни класирания на участниците в турнира по получените от тях резултати, с използване на различни начини за задаване на теглата за оценка на верните и празните отговори.

Използвали сме четири начина за задаване теглата на отговорите:

I. Всеки верен отговор носи 7 точки, всеки празен отговор – 3 точки (т.е. това представлява средното тегло на верните отговори и теглото на празните отговори, използвани от организаторите на турнира.)

II. Вторият начин е начинът, използван от организаторите на турнира и описан тук по-нагоре.

III. Начин подобен на втория, но задачите са прегрупирани по трудност чрез характеристиката e_1 .

IV. Верните и празните отговори получават тегла, линейно разпределени в диапазона {5, 9} и {2, 4} в зависимост от стойностите на характеристиката e_3 .

Класиранията са сравнени две по две чрез:

- броя размествания, които трябва да се направят, така че от едното класиране да се получи другото,
- броя участници, които заемат еднакви места в класиранията.

Резултатите са показани в Таблица 2 и Таблица 3 за множества от участници, включващи първите 6, 10, 20, 100, 200 и 449 участници от съответните класирания.

Таблица 2 съдържа броя на разместванията, а Таблица 3 съдържа броя участници с еднакви места в класиранията.

Любопитна особеност, която се забелязва е, че класиранията, изчислени по първи и четвърти начин дават близки резултати и пълно съвпадение за класираните до 17 място. Това показва, че въпреки различните формули за пресмятане на "параметрите на трудност", тези два начина отразяват близки идеи за представяне на трудността.

	6	10	20	100	200	449
I-IV			4	117	520	1.252
III-IV	6	14	48	1.034	2.796	5.397
I-III	6	15	42	1.178	3.537	6.457
II-III	11	7	35	1.616	4.426	7.621
I-II	12	21	40	1.168	3.889	6.840
II-IV	15	27	59	1.421	3.607	6.442

Таблица 2

	6	10	20	100	200	449
I-IV	6	10	17	50	82	168
III-IV	2	4	7	24	33	72
I-III	3	4	8	18	23	70
II-III	1	3	8	19	23	62
I-II	2	2	4	7	11	48
II-VI	2	4	7	18	30	67

Таблица 3

4-6. "Лесни" задачи, които са "по-трудни" за "силните ученици"

Да разгледаме групите от участници: $Г_1$ – участниците, посочили точно един верен отговор, $Г_2$ – точно 2 верни отговора, $Г_{13}$ – точно 13 верни отговора и $Г_{14}$ – 14 или повече верни отговора. Изчисляваме характеристиките на трудност *a* и *r* на всяка задача във всяка група, доколкото бихме могли да разглеждаме тези характеристики, в едно първо приближение, като априорни и апостериорни оценки от страна на участниците за трудността на задачите.

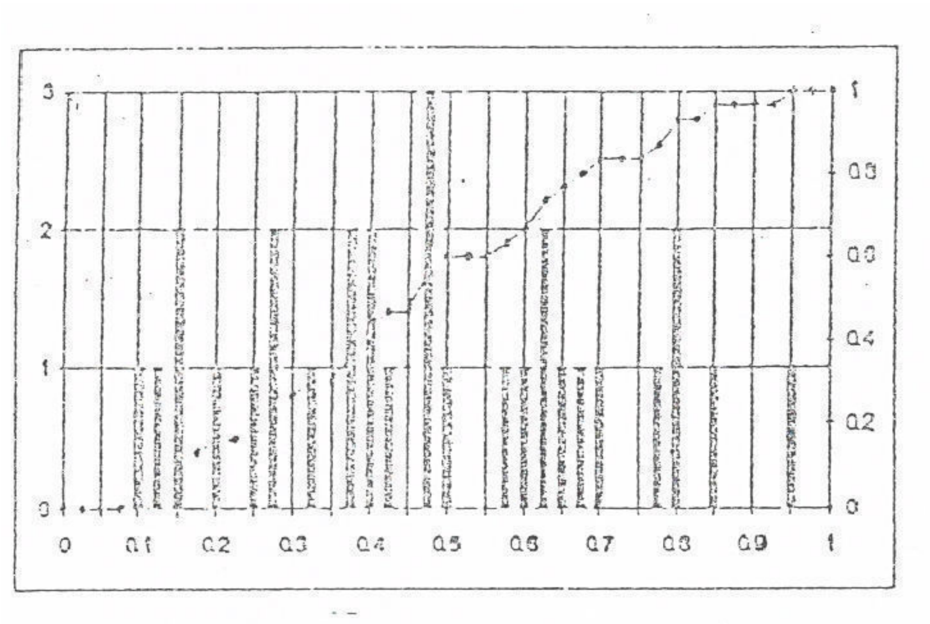
Естествено е да считаме, че при $j > i$ участниците в група $Г_j$ са "по-силни" от участниците в група $Г_i$ и затова очакваме, че стойностите на тези характеристики за $Г_j$ са по-големи от тези за $Г_i$. В повече от случаите това е така. Например за задача №6 (Диаграма 7) изменението на *a* и *r* е почти линейно по *i* (на диаграмите *r* е показана с по-тъмно щриховане, а *a* – с по-светло).

Можем още и да очакваме, че за по-трудните задачи стойностите на *r* могат да имат нулеви стойности за групите с малки номера. Но тези задачи показват друга особеност – по-малки стойности на *r* за участници от групи с по-големи номера ($Г_{10}$, $Г_{11}$). Този ефект достига до ***"инверсия" в задача №4 (Диаграма 8), решена по-добре от "по-слаби" участници, отколкото от "по-силни"***.

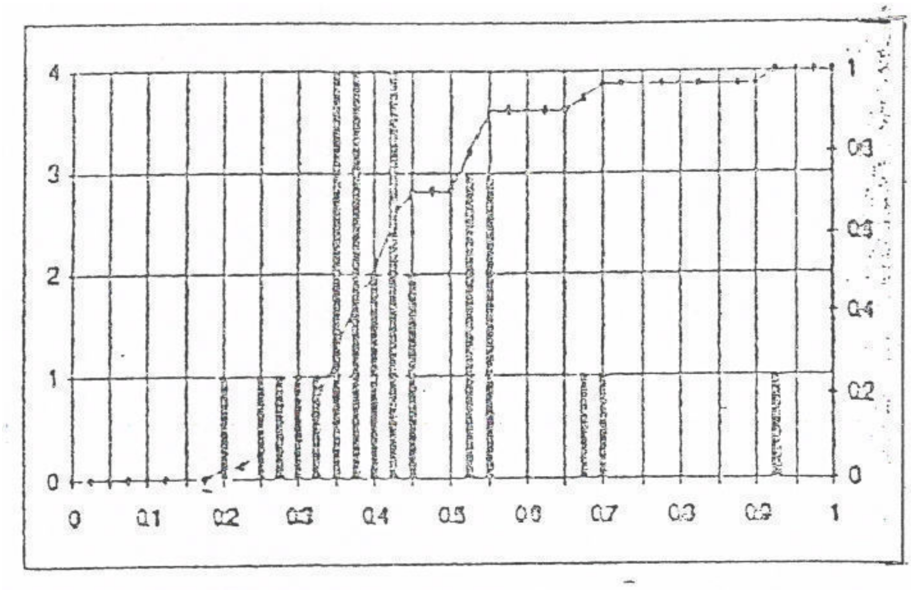
Това изглежда странно.

Но трябва да си дадем сметка за едно важно обстоятелство: задачите в теста са разнообразни, от различни области на математиката. Затова е погрешно да се мисли например, че "добрите" по алгебра ученици са "добри" и по геометрия. С други думи, резултатите на участниците в едно състезание по дадена задача зависи не само от тяхната "сумарна сила", но и от нивото им в кръга от математически въпроси, отразени в задачата.

Описаният ефект и скицираното обяснение засягат фундаментални въпроси от методиката на композиране на тестове, затова ще им отделим подобаващо внимание в следващия параграф на дисертацията.



Диаграма 7



Диаграма 8

§ 5. Композиция (съчетаване) на задачите в тест

5-1. Дискриминационният фактор като мярка за корелация на задачите в даден тест

Една важна особеност на ***диагностичните тестове*** е свързана с това, че те са предназначени да ***мерят знания в*** строго определена относително ***тясна област*** (например работа с десетични дроби, работа с обикновени дроби, тъждествени преобразования, лица на фигури и др.п.). Тази тясна област се "покрива" от задачите и въпросите, включени в теста, като всички те образуват един цялостен обект, в който на всяка задача са определени съответни функции. Конструкцията на ***такъв тест предполага взаимосвързаност между съставящите теста задачи, така че да осигурява валидност на резултатите***, т.е. резултатите наистина да измерват онези параметри, които са обявени за обект на диагностициране.

Формален показател за обвързаността на всяка една от задачите с теста като цяло е нейният така наречен "***дискриминационен фактор***" (или "дискриминативна сила"). Това е число, което се пресмята от резултатите на учениците при провеждане на теста. ***Голям дискриминационен фактор означава добра обвързаност на дадената задача с теста***; с други думи, задача с голям дискриминационен фактор измерва почти същото, което измерва и тестът като цяло. Малък дискриминационен фактор означава, че задачата е "от друга опера" и е желателно да бъде премахната от теста и заменена с по-подходяща.

При ***състезателните*** тестове обаче нещата стоят по съвсем друг начин. Там традицията изисква голямо тематично разнообразие от задачи: от алгебра, геометрия, аритметика, комбинаторика, логически задачи и др. Те трябва да "измерват" знания и умения в много различни области. Може да се каже образно, че те трябва "да разпънат" теста в различни математически направления, за да му придадат максимален обхват. Оттук и почти противоположни изисквания ***към дискриминационните фактори: те не бива да бъдат много големи***, поне за съществена част от задачите.

С известно приближение може да се каже, че дискриминационният фактор на дадена задача изразява някакъв вид корелация на резултатите за тази задача и резултатите за теста като цяло.

Затова ***при тестове с тесен спектър*** на обхванатата тематика ***оценката на задачите чрез дискриминационния фактор е необходима***, за да може тестът да изпълнява функциите си достатъчно добре, на нивото на съвременото теоретично равнище; препоръчително е задачите с нисък дискриминационен фактор да се заменят с по-подходящи.

При тестове с широк спектър, в които са включени разнородни въпроси от различни области на знанието или от различни учебни предмети обичайната ***оценка чрез дискриминационен фактор води до неправилни изводи и не следва да се прилага***.

Неразбирането на този факт води до сериозни грешки. Предварителна оценка на дискриминационния фактор (за замяна на едни задачи с други) е бил прилаган в "пробни изпити" след VII клас. Както е известно, такъв "пробен изпит" обединява в един тест въпроси и задачи с избираем отговор от различни училищни учебни предмети: български език, математика, история и др. В този контекст оценката на задача по математика – например геометрична - чрез дискриминационния фактор по същество отразява ***оценка на корелацията на резултатите на учениците за тази задача с резултатите им за целия тест***. "Нисък дискриминационен фактор" означава липса на корелация между тези резултати и в съответствие с криво интерпретирана теория при апробация в такъв случай трябва да следва отстраняване на задачата от теста.

Но ***защо трябва да има такава корелация? Защо ученик, който е силен по български език и история, евентуално по алгебра, трябва да показва и високи резултати по геометрия?*** Подобно очакване очевидно е неправилно, не съответства на действителното състояние на знанията на учениците и не може да бъде база за действие при подбора на задачите за теста.

Обратно на практиката за използване на дискриминационния фактор при всякакви тестове, за широкоспектърни тестове трябва да се осигури представително участие на разнообразни и разнородни задачи, покриващи цялата обявена област на теста; всяка задача трябва да "измерва" знания и умения, доста различни от знанията и уменията, "измервани" от останалите задачи. Следователно в повечето случаи следва да се очаква слаба или никаква корелация на резултатите по отделна задача с резултатите по целия тест. Това означава, че ***ако в един широкоспектърен тест всички задачи имат висок***

дискриминационен фактор, в повечето случаи този тест не е добър и не може да изпълнява добре желаните от него функции.

5-2. Корелация между групи задачи

От полза ли са знанията по аритметика при решаване на задачи по геометрия? На този въпрос би могло да се отговори: да, донякъде; поне е ясно, че познаването на аритметиката не пречи за решаване на задачи по геометрия.

Но идеята за изясняване на евентуални връзки между знанията по аритметика с тези по геометрия може да се прецизира. Да поставим въпроса така: ако учениците от IX "А" клас са с по-добри постижения по аритметика от учениците от IX "Б" клас, следва ли да сме сигурни, че и по геометрия постиженията на IX "А" клас ще бъдат по-добри от тези на IX "Б"?

Интуицията ни подсказва, че нямаме особено основание за сигурност. Например IX "А" може да има по-добър учител по аритметика, отколкото IX "Б", но по-лош по геометрия.

Подобни въпроси са естествени. Техните отговори могат да ни помогнат например да разберем, доколко изучаването на един учебен предмет Х може да повлияе (положително или отрицателно) на усвояването на друг учебен предмет У. Затова изследването на такива влияния (или корелации) е важно за изясняване на степента на взаимна обвързаност на знанията по различни училищни дисциплини.

То е важно и от гледна точка на методиката за съставяне на състезателни и диагностични тестове, и по-специално за подбора на задачите. Добре е да си дадем сметка, че дискриминационният фактор, прилаган за "избистряне" на тестове, всъщност в известен смисъл отчита степента на корелация на всяка фиксирана задача от теста с останалите задачи от него. Така използването на дискриминационен фактор е фактическо прилагане на данни за корелация. От тази гледна точка изследването на корелациите между резултатите на учениците за отделни групи задачи на практика изяснява механизмите за формирането на стойностите на дискриминационния фактор, а оттам и за границите на целесъобразността на прилагането му.

Конкретно изследване на корелацията между групи от задачи, подбрани тематично, е описано в следващия параграф.

§ 6. Изследване на корелации между групи задачи

6-1. Предмет и цели на изследването

Описанието на ***предмета*** включва няколко елемента:

1.) Резултатите на участниците от XI-XII клас в Турнира "Черноризец Храбър", проведен на 1.11.2002 г. по задачи;

2.) Четири групи задачи, които участват в състезателния тест, а именно: 1. алгебра, 2. Геометрия, 3. аритметика (теория на числата) и 4. информатика;

3.) Стандартните инструменти на продукта Excel за изследване на корелации.

Изследването беше осъществено от автора на тази дисертация съвместно с Емил Келеведжиев (***Kelevedzhiev & Tabov 2003***).

Първоначалната ***цел на изследването беше да установи съществуването или отсъствието на корелации между резултатите на участниците***, пресметнати ***върху отделните четири изброени по-горе групи задачи***. Например, съществува ли корелация между резултатите на участниците, пресметнати за групата задачи по аритметика, с резултатите на участниците, пресметнати за групата задачи по информатика? Търсихме отговор на същия въпрос и за другите двойки области на математиката: по алгебра и геометрия, по геометрия и информатика и т.н.

На пръв поглед точка 3 не би трябвало да бъде отнасяна към това описание, но се оказа, че изборът на стандартния инструмент влияе върху изводите, затова трябва не само да държим сметка за него, но и да познаваме особеностите му. Затова покрай корелациите между резултатите за групи задачи нашето изследване фактически постигна и още една, ***допълнителна цел: осъществи изследване и изяви особености на заложените в Excel параметричен (чрез пресмятане на коефициент*** (параметър) ***на корелация) и графичен*** (чрез графика) ***методи за изследване на корелации.***

В изследването може да разграничим три етапа:

I) определяне на задачите от теста, които спадат към всяка една от групите 1. – 4.

II) прилагане на софтуерния продукт Excel (и на наличните в него параметричен и графичен метод за представяне на корелация) към числовите данни за резултатите на участниците от XI-XII кл. В Турнира "Черноризец Храбър";

III) анализ и съдържателна интерпретация на резултатите от обработката с Excel.

Вторият етап можем да характеризираме като технически, а първият и третият като носители на неформални, съдържателни съображения, разсъждения и заключения.

В съответствие с нашите цели, ще съсредоточим вниманието си върху ключовия момент от изследването – третия от изброените етапи.

Ще се спрем последователно на ***анализа на данните за корелация, получени след прилагането на етап II към всяка една от двойките групи от задачи***.

6-2. Степен на корелация между резултатите по аритметика (1. група) и геометрия (2. група)

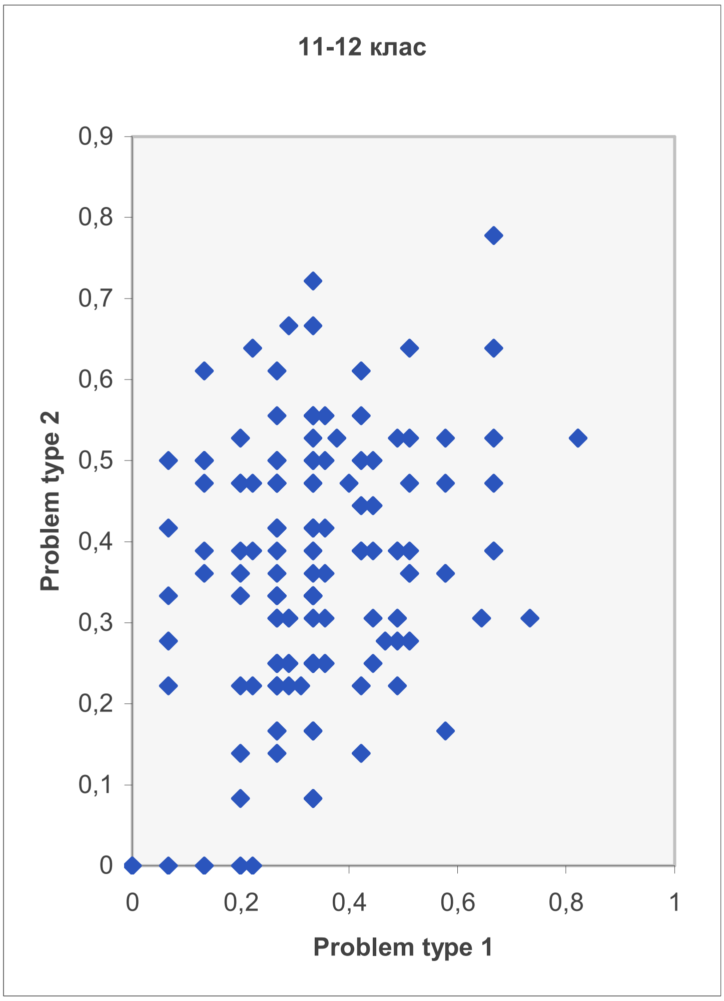
Данните от компютърната обработка са представени в Таблица 1, която дава стойностите на коефициента на корелация R(X,Y) – в реда на аритметика и колоната на геометрия, и на Графика 1-2.

Тук коефициентът на корелация R(X,Y) от n-елементните съвкупности X и Y е пресметнат по формулата (вградена в Excel):

$$\mathbf{R(X,Y) = Cov(X,Y) / (S(X)\ S(Y)),}$$

където $(S(X))^2 = (1/n) \sum (X_j – M(X))^2$, M(X) е средната стойност на X и

Cov(X,Y)= (1/n) Suma_j (X_j-M(X))(Y_j-M(Y)).


11-12 клас
Problem type 2
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
Problem type 1

Графика 1-2

Стойността на параметъра R(X,Y) за резултатите по аритметика и геометрия е 0,29577. Тя е много малка и говори ***практически за липса на корелация*** – резултатите на участниците по аритметика не зависят от резултатите им по геометрия и обратно.

Да видим какво ни дава графичното представяне на данните в Графика 1-2. Наистина, то в много голяма степен съответства на заключението, направено на базата на коефициента на Пиърсън. Точките, отговарящи на участниците (с координати техните резултати), са ***почти равномерно*** разпределени по полето на графиката.

И все пак забелязваме проявата (макар и в слаба форма) на един специфичен ефект: в самия ъгъл в долната дясна и в горната лява част на графиката липсват точки! От съдържателна гледна точка това означава, че "върхушката" ("супер силните") участници по аритметика са поне на средно ниво по геометрия, а "върхушката" ("супер силните") участници по геометрия са поне на средно ниво по аритметика.

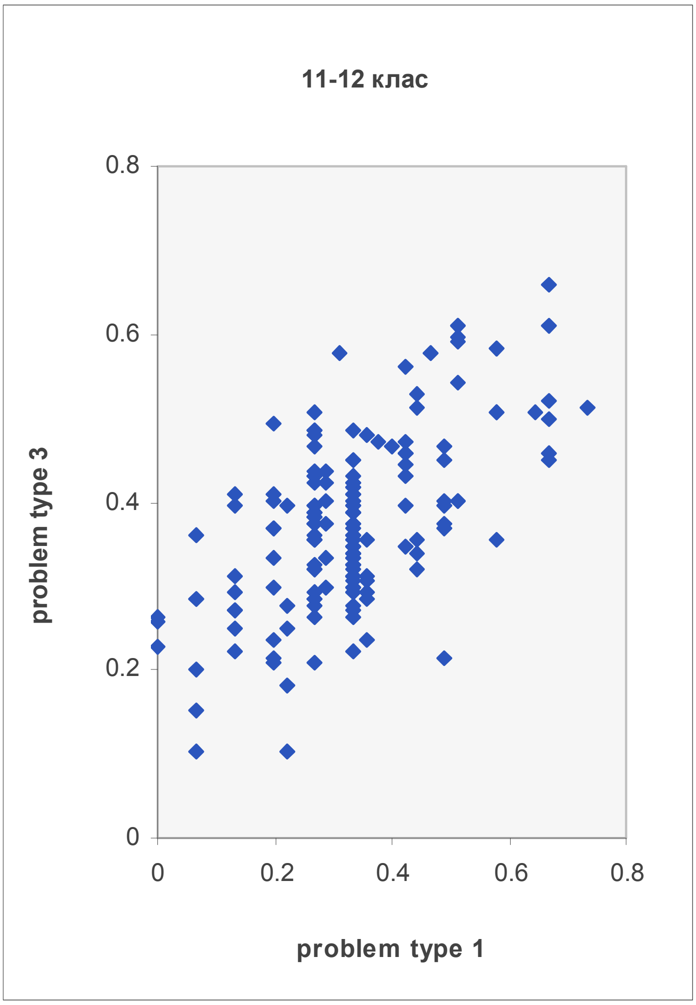
Този ефект, който ще наблюдаваме и по-надолу, е интересен и важен. Той говори за вътрешните връзки, които съществуват между различните области на математиката, и за степента на проявата им в процеса на обучение и в различните етапи на развитие на ИУ.

6-3. Степен на корелация между резултатите по аритметика (1. група) и алгебра (3. група)

Стойността на параметъра R(X,Y) от Таблица 1 за резултатите по аритметика и алгебра е 0,65250. Тя говори за наличието на корелация, която е изразена в средна степен. Общо взето, който е бил "по-силен" по аритметика се е оказал "по-силен" и по алгебра.

Погледът към графичното представяне на резултатите на Графика 1-3 потвърждава горния извод. Забелязваме, че точките на диаграмата "гравитират" около права, което говори за закон на корелация, близък до линейния; грубо казано, който е "по-добър" по алгебра, е "по-добър" и по аритметика.

Макар че този извод в нашия контекст се отнася за групата на изявените ученици, той хармонира с представите за близост на аритметиката и алгебрата в училище и оправдава обичайното включване на елементи от аритметиката (теория на числата) в учебната програма и учебниците по алгебра.


11-12 клас
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
problem type 3
problem type 1

Графика 1-3

Наблюдаваната в този случай добра корелция графично е свързана с обсъждания по-горе "ефект на ъглите": сега горният ляв и долният десен ъгъл са определено "празни" и ефектът е изразен по-ясно и категорично: най-добрите по аритметика са над средното ниво по алгебра, както и най-добрите по алгебра са над средното ниво по аритметика

6-4. Степен на корелация между резултатите по аритметика (1. група) и информатика (4. група)

Стойността на параметъра R(X,Y) от Таблица 1 за резултатите по аритметика и информатика е 0,42306. Тя не е достатъчно голяма, за да може да говорим за наличие на корелация – стандартният извод при тази ситуация би трябвало да бъде, че резултатите на участниците по аритметика не зависят от резултатите им по информатика и обратно.

На пръв поглед към такив извод сочи и разположението на точките на графичното представяне на Графика 1-4.

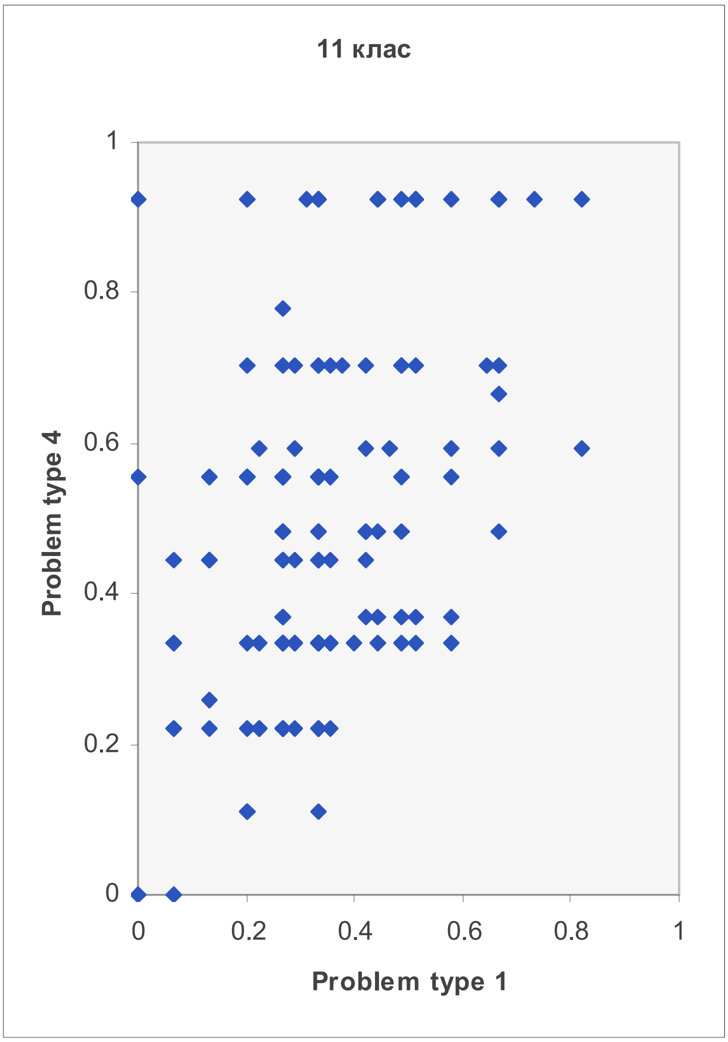
По-внимателният анализ обаче открива нещо доста любопитно. Забелязваме, че долният десен ъгъл на Диаграма 1-4 е "празен" – в него липсват точки! Това означава, че ***"добрите" по аритметика ученици непременно са "добри" и по информатика***! Обратното вече в общия случай не е вярно.

Констатираната зависимост между резултатите по аритметика и информатика би могла да бъде характеризирана като "еднопосочна корелация" – смисълът на този термин е всъщност изяснен в предишното изречение.

От това следват два важни практически извода.

1. Изводи, направени на базата само на коефициента на Пиърсън, може да пропуснат някои интересни и значими нюанси; затова е ***желателно при анализ на корелация на огледаме и съответната графична диаграма***.
2. ***Добрата подготовка на учениците по аритметика вероятно е важна и необходима компонента на овладяването и на информатиката***.

За изясняване на хипотезата, формулирана в последната точка, са необходими допълнителни изследвания върху по-широк кръг от ученици.



Графика 1-4

6-5. Степен на корелация между резултатите по геометрия (2. група) и алгебра (3. група)

Стойността на параметъра R(X,Y) от Таблица 1 за резултатите по геометрия и алгебра е 0,24952. Тя е много малка и говори практически за ***липса на корелация*** – резултатите на участниците по аритметика не зависят от резултатите им по геометрия и обратно.

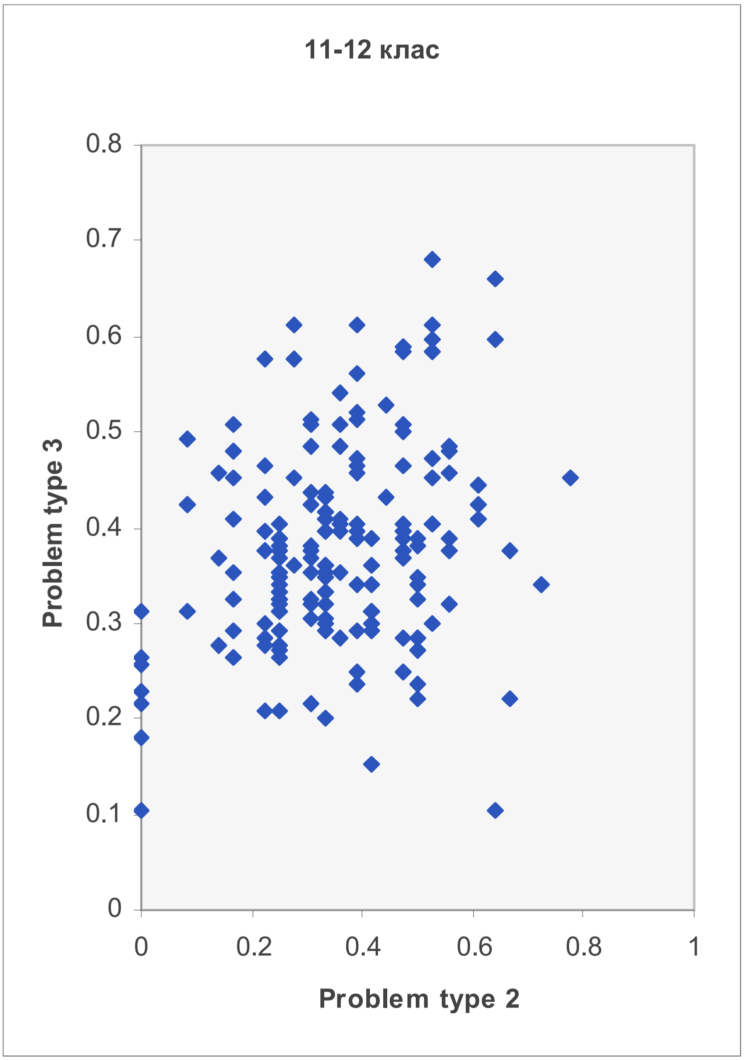
Анализът на Графика 2-3 потвърждава този общ извод (възможни са само нюанси за тълкуване на неголямата по размери "празнина" в горния ляв ъгъл).

Сравненията на резултатите на участниците върху първите три области от нашия списък – аритметика, геометрия и алгебра – показват корелация между аритметика и алгебра и липсата на корелация на тези две с геометрията. Това говори за ***по-дълбоките вътрешни връзки между аритметиката и алгебрата***: включването на елементи на аритметиката в програмата и учебниците по алгебра е естествено.

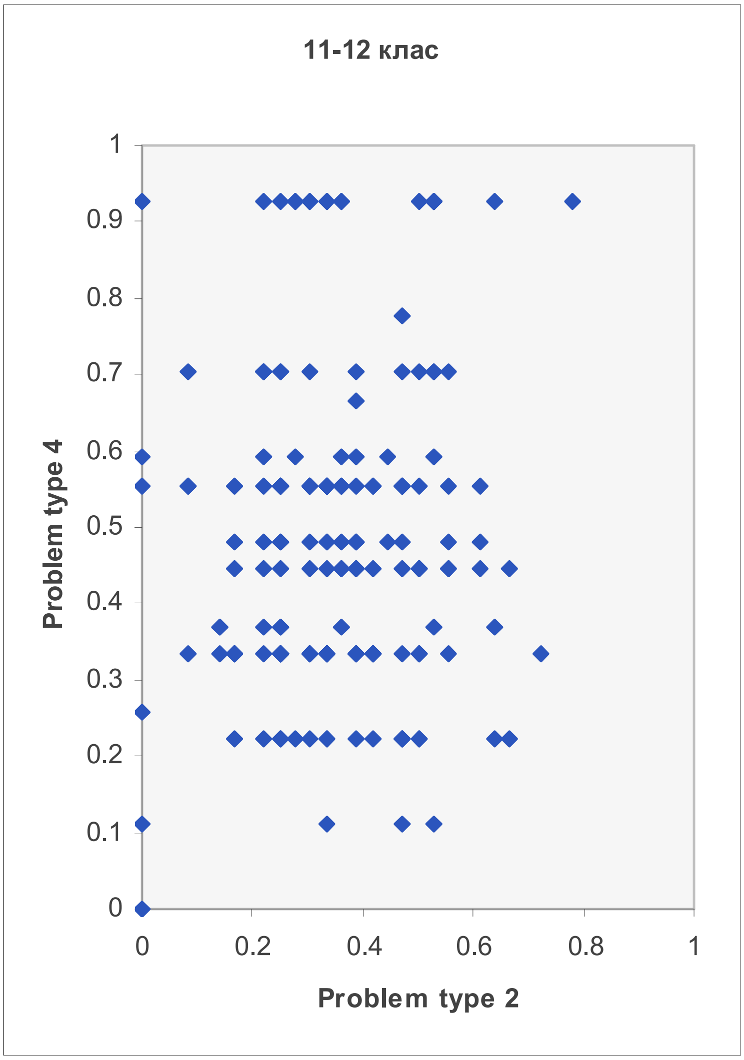
6-6. Степен на корелация между резултатите по геометрия (2. група) и информатика (4 група)

Стойността на параметъра R(X,Y) от Таблица 1 за резултатите по геометрия и информатика е само 0,11922. Това е най-малката стойност от получените за четирите групи задачи. В този случай категорично може да се твърди, че между резултатите на участниците по аритметика резултатите им по геометрия ***липсва корелация***.

Графиката 4-1 потвърждава този категоричен извод. ***Дали той остава валиден и извън рамките на изследваната съвкупност на ИУ*** ? Доколко на категоричността може да е повлиял специфичният избор на задачите по информатика? За по-добро ориентиране в тази проблематика очевидно са необходими по-обемни и по-прецизни изследвания.


11-12 клас
Problem type 3
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Problem type 2

Графика 2-3


11-12 клас
Problem type 4
Problem type 2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

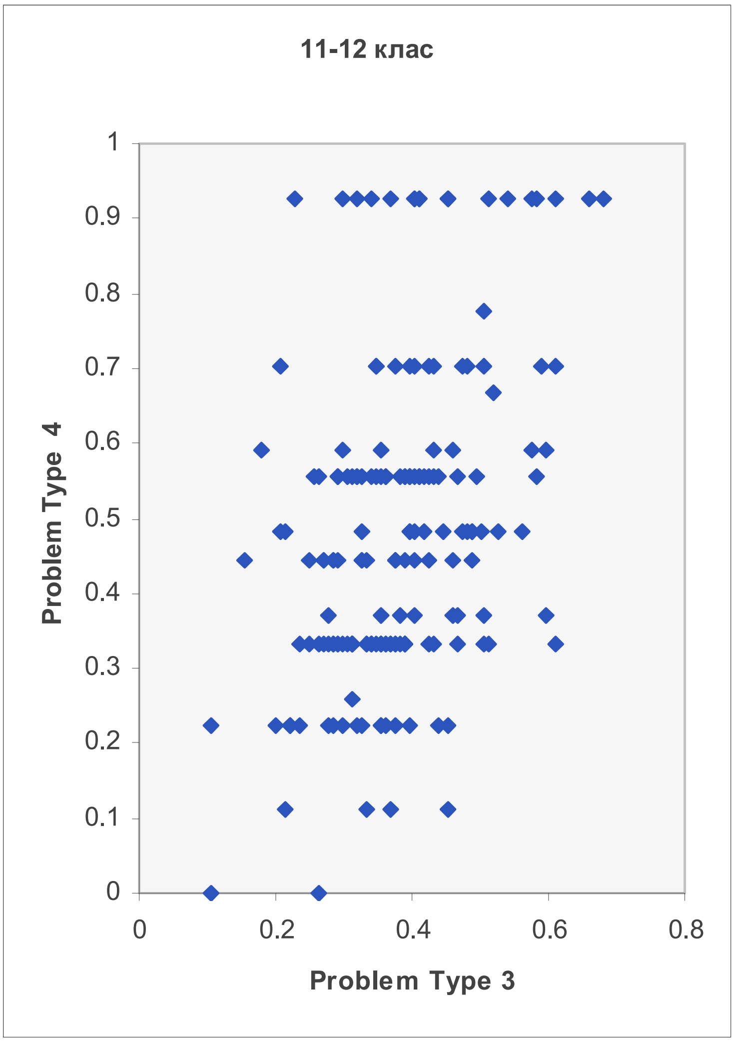
Графика 2-4

6-7. Степен на корелация между резултатите по алгебра (3. група) и информатика (4. група)

Стойността на параметъра R(X,Y) от Таблица 1 за резултатите по аритметика и информатика е 0,41191. Тя е малко по-малка от стойността, която имаме при сравнението за аритметика и информатика и определя приблизително същия извод: ***резултатите на участниците по аритметика не зависят от резултатите им по информатика и обратно***.

Анализът на Графика 3-4 потвърждава този извод; възможни са незначителни нюанси, свързани с интерпретацията на неголемите "празнини" в горния ляв и долния десен ъгли.

В светлината на отбелязаната по-горе "еднопосочна" корелация на резултатите по аритметика и информатика и на средната корелация на резултатите по аритметика и алгебра последният позволява следната хипотеза: в някакъв смисъл знанията по аритметика заемат междинно положение между знанията по алгебра и знанията по информатика, като са по-близо до първите.


11-12 клас
Problem Type 4
Problem Type 3
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Графика 3-4.

§ 7. Сравнения, експерименти и оценка

Предложените в тази глава математически модели на "трудността на задачите" има доста предимства в сравнение с използваните от други изследователи идеи, свеждащи се до замяна на трудността на задачата със "сложност" или на самата задача, или на нейното решение. Преди всичко те са по-близо до практиката на решаването на задачите, защото отчитат фактически резултатите от масови експерименти. Особено важно е обаче, че те по-адекватно отразяват "евристичната трудност", на която беше обърнато внимание по-горе, и следователно са по-подходящи за задачите, използвани в състезания.

Ролята на най-непосредствен експеримент, който "проверява" качеството на подбора на отделните задачи, намирането на удачни формулировки на условията им и композирането им в състезателна тема, е самото състезание. Именно качествата на състезателната тема определят протичането на състезанието, оценките на решенията на участниците, класирането им, и затова винаги са обект на изострено внимание от страна на участници, учители и специалисти. Успехите и неудачите при съставянето й не остават скрити.

Затова изложените в тази глава анализи, заключения и концепции са проверявани многократно – от участниците в състезанията, от учители, от специалисти от най-висока международна класа. Прилагал съм ги в практиката на състезанията като:

- член на Журито на Международните олимпиади по математика през през 1978, 1979, 1981 и 1982 г.;
- член на Журито на Австрелийското математическо състезание (едно от най-големите и авторитетни състезания в света, с над 500,000 участници) през 1993 и 2001 г.
- Председател на Журито на Българската олимпиада по математика през 1978, 1979, 1980 и 1981 г.;
- Председател на Журито на Турнира "Черноризец Храбър" от създаването му през 1992 г. досега;
- Председател на Журито на различни регионални състезания по математика в България.

За резултатите положителните резултати от тези непосредствени експерименти говорят следните факти:

- Златният медал "For Excellence" (за отлична работа), с който бях награден от Организационния комитет на XXI МОМ в Вашингтон, САЩ, 1981 г;
- Наградата "Пол Ердьош" за приноси в образованието на изявените по математика ученици, с която бях награден от Световната Федерация на Математическите състезания през 1994 г.;
- Избирането ми за Вицепрезидент на Международния Турнир на Градовете (едно от най-големите и авторитетни международни състезания).
- Включването ми в Редколегията на американското издание "Индекс на задачите по математика".

Трета глава

Подготовка за решаване на задачи за състезания

§ 1. Общи проблеми при подготовката на изявени ученици

1-1. Специфична роля на задачите при подготовката на изявени ученици

Подготовката на учениците за математически състезания има за основна цел – поне на преден план – да ги научи да решават успешно трудни задачи.

Но какво е за математика решаването на задачи? С този въпрос докосваме фундаментални проблеми на важни процеси, които можем да обединим с израза "математическо творчество", или "творчество в математиката". Класическо произведение в тази област е "Как да решаваме задачи?" ("How to solve it") от Д. Пойя (***Polya*** 1945), което заедно с други произведения на същия автор (***Пойя*** 1976-1) и (***Пойя*** 1976-2) предлага майсторски направен анализ на мисловни процеси, който разкрива математическата специфика на интелектуалното преодоляване (или решаване) на стоящите пред изследователя проблеми. Пойя представя и общи препоръки, които при творческо прилагане могат да подпомогнат търсенето на решение. Неговите идеи често се подлагат на различни модификации. Например У. Берлингоф предлага към решаването на задачи да се подхожда с последователното прилагане на следните процедури (***Berlinghoff*** 1989; ***Berlinghoff & Grant*** 1988):

1. Провери дефинициите.
2. Преформулирай задачата.
3. Начертай чертеж.
4. Въведи подходящи означения.
5. Построй примери.
6. Търси аналогии.
7. Реши по-лека задача (частен случай).
8. Изследвай отговора.
9. Разсъждавай от търсеното към даденото.
10. Провери дали използваш всички дадени условия.
11. Обобщи решението.

Макар че този списък е доста дълъг, по същество той въвежда само второстепенни и маловажни детайли в сравнение с идеите на Пойя.

Съвременното състояние на научните теории и методики за обучението на учениците да решават задачи е представено в монографията "Теоретические основы обучения решению школьных математических задач" (***Крупич 1995***). Като отбелязва, че в психологията, както и в теорията и методиката на обучението понятието задача се разбира достатъчно широко като сложна система с две състояния: изходно и търсено, авторът подчертава, че тази постановка дава възможност да се изследват не само проблемите на методиката на обучението по ***решаване на задачи***, но и проблемите на методиката на ***обучението по математика чрез задачи*** (***Колягин*** 1977-2)***.***

Именно втората от тези възможности е едно от основните положения, на които стъпва и мирогледът, и конкретните разработки в настоящия дисертационен труд, защото застъпвам гледището, че ***при обучението на изявените ученици в т.н. "извънкласни форми на работа" на задачите е отредена особена роля***, както беше обяснено по-рано. Тук трябва да напомним, че тази ситуация е коренно различна от обучението по редовните училищни програми, където предназначението на задачите е друго и съответно са други функциите, които те изпълняват.

Крупич се спира последователно на:

- психолого-дидактическата трактовка на понятието "задача";
- проблемите на съотношението на алгоритмичните и неалгоритмичните процеси при търсенето на решение на дадена задача;
- аналитико-синтетично търсене на решението на дадена задача;
- училищната задача по математика като предмет на изследване;
- дидактическия механизъм на възникване на проблемна ситуация;
- системен анализ на вътрешната структура на училищните задачи по математика;
- един модел за систематизиране на структурата на училищните задачи по математика;

- системно-структурен подход към построяването на цикли от задачи;
- общи изисквания към системите от училищните задачи по математика.

Особено интересна е трактовката на ***вътрешната структура*** на училищните задачи по математика.

Основен обект в монографията на Крупич обаче са именно училищните задачи, а не задачите за състезания. Тази специфична разлика е много важна, защото ***училищните задачи обхващат предимно често срещаните, типични, стандартни ситуации и въпроси***, докато ***състезателните задачи са "нестандартни" – поне като идея за решаване***. Тук сме в рамките на един ***съществен парадокс***: ако за даден кръг състезателни задачи разработим детайлна методика и рецепти за решаване, с това те автоматично стават "стандартни" и излизат извън кръга на "олимпиадната мода", т.е. излизат извън рамките на настоящия труд.

Затова за ***работата с изявените ученици са типични частичните – непълни - изследвания, препоръки, рецепти за решаване на задачи***.

Така виждаме, че се очертава в известен аспект антагонизъм между, грубо казано, теорията за подготовка на учениците за решаване на училищни задачи и теорията за решаване на състезателните задачи.

Като резултат от това, от ***редица теоретични разработки и резултати, валидни и с принципна важност за училищните задачи, може да се извлекат само маловажни изводи за състезателните задачи***.

Но, обръщайки внимание на тази принципна разлика, трябва да кажем, че между сравняваните две групи задачи има и доста сходства, а следователно и теории и идеи, които ***могат и трябва творчески да се използват и заимстват*** от едната за другата група. Към тях може да отнесем идеите, теориите и практическите примери на В. Гутенмахер и на И. Ганчев за ***цикли от задачи*** (***Гутенмахер*** 1977, ***Ганчев*** 1985) и на Г. Дорофеев (***Дорофеев*** 1983) ***за "околност на задача",*** които използване по-надолу в § 2.

Вече отбелязахме, че подготовката на учениците за математически състезания има за основна цел – поне на преден план – да ги научи да решават успешно трудни задачи. Постигането на отделни, макар и частични успехи по пътя към посочената цел, е свързано с изследвания, експерименти, обобщаване на опит; в крайна сметка – със създаване на организационни форми за работа, пособия и др., които имат практическо приложение.

Резултатите от работата по две такива направления са описани в настоящата глава.

1-2. "Географски" проблеми в работата с ИУ

Броят на изявените ученици не е голям. В зависимост от различни критерии, по които се дефинира понятието "изявен по математика", той може да бъде преценяван от 1-2 до 5-6 % от всички ученици. Този процент се изменя с възрастта: понеже започвайки от 13-14 г. се наблюдава засилваща се диференциация на възможностите на учениците, а успоредно с това има и "оттичане" на изявени ученици към "нови" предмети – информатика, физика, химия, биология – броят на "математическите таланти", които запазват интереса си към математиката, намалява. При учениците от 11-12 клас процентът им вече не надминава 1-2 %.

Тези числа създават илюзията, че групата на "изявените" лесно може да бъде идентифицирана и обхваната от организирано обучение.

Това обаче не е точно така. Практиката показва, че ИУ са "географски равномерно" разпределени по територията на страната. В малките градчета се случва да има по 1-2 ИУ, в големите градове са повече, но обикновено живеят в различни квартали и учат в различни училища. Въвеждането на математическите гимназии представлява голяма крачка напред в създаването на условия ИУ да бъдат събрани в едно училище, където по-лесно може да им се създадат подходящи условия за обучение и развитие на съответното математическо ниво.

С това обаче се решават само част от проблемите.

В групата на ИУ има също доста голяма стратификация; те определено се различават по възможности. Обикновено във всеки випуск в България има около 20 "супер изявени" по математика ученици (СИУ). Можем да приемем, че няколко от тях са от София, а останалите са от някоя от 20-ината математически гимназии в други градове на страната. Макар и рядко, в тази група се появяват и ученици от езикови училища и техникуми, както и от "обикновени" гимназии. Ако съсредоточим вниманието си върху последните 2-3 гимназиални класа, това прави една група от около 60-ина ученика. Действащата система на математическите състезания в България ги откроява добре, те вече са се изявили като класирали се на челни места в редица състезания по математика, наясно са за силата си като математици и в повечето случаи са добре мотивирани да положат системни усилия за овладяване на математиката, участие в състезания и чрез класиране в тях да си отворят път към желаните от тях университети и специалности. Тук трябва да отбележим, че българската система за извънкласна работа и състезания по математика се ползва с голям авторитет: 20-ината най-добри български ученика са желани студенти за всеки университет по света.

На пръв поглед изглежда целесъобразно въпросните ученици да бъдат събрани в едно училище-интернат, където да бъдат обучавани по специална програма. Такава идея е частично осъществена още преди около 40 години в Русия. Там по инициатива на покойния акад. Колмогоров в Москва започна да фунционира математическа гимназия – интернат, в която се приемат само надарени ученици от тогавашния СССР.

Но се оказва, че не е възможно още в началния клас на гимназията да се съберат точно тези ученици, които след 4-5 години пак ще бъдат "на върха". Казано другояче, в периода от 7 до 11 клас в способностите и мотивацията на учениците настъпват забележими промени, в резултат на които се променя условното "класиране" на учениците по изяви. То става доста по-различно от онова, въз основа на което е извършена селекцията в 7 клас; в 11 клас "на върха" са други ученици, а не онези, които са били там в 7 клас. Освен това доста родители с основание не желаят да оставят децата си без контрол в такава ранна възраст, както се предвижда в системата на интернатите. Затова е ясно, че този вариант може да бъде осъществяван доста ограничено.

И така, налице е следната ситуация: СИУ са "пръснати" в различни градове и училища.

Успоредно с това трябва да направим баланс и на "преподавателското тяло" – специалистите, които имат знания и възможности да ръководят подготовката на СИУ. Преди всичко трябва да се съобразим с това, че такива специалисти има малко, много от тях не са учители, че всички те имат други основни трудови задължения.

Ангажираните с математическата подготовка на СИУ ще разделим условно на две групи: "учители" и "научни работници". Обикновено един или двама учители, в повечето случаи преподаватели на съответния СИУ в училище, следят подготовката му и полагат усилия да му предадат знания и умения, да му осигурят помагала, да организират участието му в различни математически изяви (състезания, конференции и др.) и обучението му в различни летни и др. школи.

Доста бързо се оказва, че СИУ е по-добър от тях в решаването на задачи. Потънали в други грижи, те трудно могат да проверяват решенията му, да търсят в тях грешки, които да поправят, да "запълват дупки" в "репертоара" му.

За щастие, в България има дълга традиция за извънкласна работа, и един от нейните най-важни продукти са печатните източници на информация: книги, сборници задачи, списания. Към тях напоследък се прибавят различни сайтове в Интернет. Така СИУ има възможност да бъде донякъде независим от учителите си, и сам да работи за усъвършенстването си.

"Научните работници" обикновено имат дълбоки професионални познания в няколко теми (области, методи), които често се срещат в практиката на математическите състезания. Това им позволява да бъдат особено полезни за подготовката на СИУ, защото те са в състояние да им дадат за кратко време концентрирана информация за определени кръгове задачи, включително да им разяснят същината на основните методи за тяхното решаване. Важен е също начинът на разсъждение, който те предават на СИУ, а също детайли от практиката на професионалния математик като избор на най-добри означения, умение да се насочват към кратки решения, да заобикалят определени "подводни камъни" и т.н. Оказва се, че курсове от лекции, провеждани от "научни работници" в продължение на 2-4 седмици, са в състояние да допринесат съществено за подготовката на СИУ.

При подготовката на СИУ се налага да търсим баланс между две до голяма степен противоречиви насоки:

- желанието да осигурим на учениците по-продължителен и траен допир с висококвалифицирани специалисти-математици;
- желанието да не ги откъсваме от естествената им семейна и училищна среда.

Де факто специалистите с подходяща квалификация са малко на брой, до десетина души в София и по 1-2 в няколко по-големи града. Така учениците в доста от математическите гимназии в страната имат ограничен контакт с такива преподаватели.

1-3. Психолого-педагогически специфики в обучението на СИУ

Причините, поради които е нецелесъобразно да се правят опити всички СИУ да бъдат събрани в едно училище и там да учат по специална програма са много.

Сред тях се откроява необходимостта да се запази връзката им с техните семейства и желанието те да бъдат в естествена човешка среда. Високото общо интелектуално ниво на СИУ прави по-сложни и проблемите на тяхното психологическо равновесие и на социалната им адаптивност. Те са достатъчно умни, за да осъзнаят способностите си и това, че техните дарби ги правят ценни за обществото. Тази ситуация поражда опасност те да станат самолюбиви, надменни, с чувство за превъзходство. За противодействие е добре от една страна да са повече време сред роднини, стари приятели и познати, с които имат стереотип на отношение от времето преди техните способности да са били проявени и забелязани, т.е. от времето, когато те по нищо не са се различавали от заобикалящите ги близки, приятели и врагове. Ето защо е за предпочитане да се запази колкото е възможно по-дълго и по-трайно животът им в средата, в която са израстнали. В същото време те трябва да имат и достатъчно интензивни контакти с други СИУ. Такива контакти също парират впечатлението за уникалност на всеки СИУ и му показват, че има и други хора със същите качества. Общуването и съвместната работа с тях в подготовката по математика създава здравословна конкурентна среда.

Всички тези доводи обясняват възникването и разпространението на "задочни" форми на работа със СИУ. Сред тях най-разпространени са задочните конкурси на математическите списания и задочните школи по математика. Тук в България има дългогодишни традиции. Заслужава да се отбележат например вестникът, издаван от А. Радев в началото на XX в., и оригиналната идея на Радиоконкурсите, организирани през 1960-те години от талантливите педагози Ив. Ганчев, К. Тодоров и др.

Една от интересните в много отношения прояви от този тип е "Кореспондентният кръжок" (КК), функционирал в България от 1978 г. до към 1990 г. С някои от специфичните си особености той е уникален в световната практика и може да се окаже прототип на бъдеща разпространена форма на работа със СИУ.

§ 2. Кореспондентен кръжок

2-1. Задочен диалог

Стартът на КК през 1978 г. е като своеобразна разновидност на "задочните школи" и по-специално на "Задочната математическа школа" (ЗМШ) на Московския университет. Принципните разлики със ЗШМ са две:

1) Докато в ЗМШ участват широки кръгове от ученици, които се интересуват от математика, покана за участие в КК се отправя всяка година към 50-60 ученици, заели челно място в Националната олимпиада по математика в България. Трябва обаче да подчертаем, че не е било ограничавано участието и на други ученици, които са желали това и са били на достатъчно високо ниво, за да се изяват в работата на кръжока.

2) В ЗШМ на участниците се изпращат брошури с теоретични разработки на отделни математически теми, по които участниците се подготвят и след това връщат на организаторите решена "домашна работа" от няколко задачи. За разлика от това на кръжочниците от КК не се изпращат теоретични пособия, а само списък от десетина задачи плюс коментар върху получените решения и обобщения на задачите от предходния списък.

Еволюцията на КК постепенно наложи стил, който наподобява днешен "чат" в Интернет. В размножавания от Министерството на просветата писмен материал, който се разпращан по пощата, Ръководството на КК поддържаше ***диалог*** както между себе си и участниците, така и между самите участници. Една от важните цели беше да бъде показан ***индивидуалния принос*** на всеки участник за оригинално и кратко решение. На особена почит бяха стремежите към творчество, стимулираше се нагласата за разширяване на кръгозора на базата на всяка отделна задача чрез търсене на обобщения и развитие на идеята на всяка от първоначално предложена задача.

Ето как описва работата на КК един от неговите ръководители Борислав Лазаров:

"Кореспондентният кръжок започва своята дейност през 1978 г. с подкрепата на Министерството на просветата, ФМИ при СУ, "Климент Охридски", ИМ при БАН и ЦСМТА. В началото участници са първите 16 ученика в класирането на IV кръг на БНМО. Впоследствие (периода

1983-1989) броят на участниците е между 55 и 90 ученици от средното училище годишно.

2-2. Технология на работа на Кореспондентния кръжок

Формално работата на КК протичаше в следния цикъл.

1) Организаторите (научен ръководител на КК от основаването му беше ст.н.с. Й. Табов, материалите са подготвяни от Д. Раковска и Б. Лазаров) изпращат на участниците материали, включващи нови задачи, коментари към стари задачи, решения, списък на участниците, решили отделните задачи.

2) Учениците изучават материалите, решават задачите и изпращат свои решения, понякога обобщения или нови задачи на тема, близка до застъпената в материалите. Понякога учениците изпращат и коментари към поместени решения. Организаторите проверяват получените решения, селекционират ги, проучват изпратените предложения и подготвят следващите материали.

Този цикъл на работа се повтаря 4 пъти през учебната година.

Някои особености на организацията:

1) списъкът на участниците се актуализира в началото на всяка учебна година, като първите материали за годината се изпращат на всички участници в IV кръг на Българската МО;

2) допуска се както индивидуално, така и групово участие;

3) няма възрастови ограничения;

4) отделните теми са отворени за дискусия без ограничение на това колко пъти ще бъдат включвани в материалите;

5) в КК не се извършва класиране." (***Лазаров*** 1999)

През годините, в които функционираше КК, се натрупаха доста наблюдения върху работата му, върху отношението на участващите в него ученици, и не на последно място върху впечатленията на техните учители, които на място са следили реакцията на възпитаниците си. За много от тогавашните СИУ КК се оказа една важна школа, която им е помогнала да израстнат като математици и да придобият самочувствие в работата си. Трябва да добавим и приноса за развитие на интуицията им и математическото им въображение, култивирани от подтика не да се ограничават в рамките на поставената задача, а да се опитат ***"да я погледнат отстрани и отгоре"***, да забележат фундаментални закономерности, и в резултат на това да постигнат обхващане на по-обща ситуация и съответно постановка и решение на задача, която ***обобщава изходната.***

Кратко описание на някои аспекти на работата и постиженията на КК (***Lazarov & Tabov*** 1995) беше публикувано в едно от най-старите и авторитетни списания по дидактика на математиката – американското “School Science and Mathematics” – и получи добри отзиви от рецензентите. Сега ще се спрем на няколко представителни за работата на КК фрагмента и ще направим кратък коментар.

По-нагоре споменахме, че от формална гледна точка работата на КК протичаше по следния сценарий: 1) организаторите изпращат на участниците материали; 2) Учениците изпращат свои решения, понякога обобщения или нови задачи на тема, близка до застъпената в материалите; и 3) Организаторите проверяват получените решения и подготвят следващите материали.

Този ***цикъл*** на работа се повтаря 4 пъти през учебната година.

Думата "цикъл" тук е употребена условно, понеже видът на материалите не предполага завършеност на отделна фаза, както в конкурсните форми.

Напротив, често явление беше ***многократното връщане към една и съща тема***, разклоняване и разнопосочно развитие на някоя първоначална идея. По-долу ще дадем два примера (две серии задачи: едната тръгва от задача А, а другата – от задача Б), които илюстрират творческия дух и математическия талант на участниците в КК.

В първата серия по предложена от организаторите задача А в писмата на кръжочниците стъпка по стъпка се оформи следната ***серия от задачи***, в която ясно личи ***развитието на първоначалната идея***.

Задача А. Намерете всички естествени числа n, за които числото

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

се дели на 37.

Идеята се развиваше в следната последователност:

Задача А1. Намерете всички естествени числа n и k, за които числото

$$k\underbrace{00\ldots00}_{n}k\underbrace{00\ldots00}_{n}k$$

се дели на 37.

Задача А2. Намерете всички естествени числа n и k, за които числото

$$k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k$$

се дели на 101.

Задача А3. Намерете всички естествени числа n и k, за които числото

$$k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k$$

се дели на 271.

Задача А4. Намерете всички естествени числа n и k, за които числото

$$k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k\underbrace{0\ldots0}_{n}k$$

се дели на 91.

Задача А5. Намерете всички естествени числа n и m, за които числото

$$\underbrace{1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n}1}_{m}$$

се дели на 37.

За илюстрация предлагаме анализ на еволюцията на идеята, заложена в предложената задача, в писмата на участниците. Важно е да се отбележи, че самата задача A не беше затруднила участниците в КК.

Първото обобщение (задача A1) е повече формално, отколкото по същество.

Следващите след A1 три задачи A2 - A4 – предложени от участници в КК - са ***варианти на една и съща тема***. Ценното при тях е, че методът, приложен в задача A, се експлоатира за генерирането на нови задачи и се прилага успешно в тях. Те представляват добро постижение на авторите си.

Последната задача (A5) е ***истинско обобщение на първата***. То е изпратено от Д. Алексиев. В него проличава определен вкус към математически изследвания, както и развит усет да се забелязва по-общото чрез по-частното; авторът на задачата A5 заслужава висока оценка. Мисля, че с нея би могъл да се гордее и един изграден професионален математик.

Вторият пример от КК, който ще разгледаме, е свързан със следната тематична серия от задачи, изградена по писма на участници в КК.

Задача Б. Намерете последните две цифри на числото

$$7^{7^7} - 7^7.$$

Тази задача беше включена в първия материал за 1983 г. Във втория материал нейното решение беше придружено от следните предложения на двама от участниците:

Задача Б1. **(Ян. Янев)** Намерете последните две цифри на числото

$$\underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{n} - \underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{m}.$$

Задача Б2. **(Св. Дойчев)** Да се докаже, че

$$\underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{m} - \underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{n} \equiv 0 (\bmod 100).$$

В третия материал тази идея получи развитие в следната задача, която даваме в оригиналната авторска формулировка:

Задача Б3. **(П.Гласнов)** Вярно ли е, че

$$7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} - 7^{7^{7^{7^{7}}}} \equiv 0 (\bmod 1000)?$$

В четвъртия материал беше предложена и една много обща формулировка, до която води развитието на първоначалната идея:

Задача Б4. **(Св. Дойчев)** Намерете най-голямото естествено число k_n, такова, че

$$\underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{n} \equiv \underbrace{7^{7^{\cdots^{7}}}}_{n-1} (\bmod \mathrm{k_n})$$

за всяко естествено число n.

Последната задача беше решена в случаите $n = 4, 5, 6, 7$.

Преди да анализираме развитието на идеите, заложени в задача Б, трябва да отбележим, че тази задача беше решена от повечето участници в КК.

Предложенията на Янчо Янев (задача Б1) и Светлозар Дойчев (задача Б2) са ***естествените обобщения*** на задачата. Те не използват нови методи в решенията си, така че тези по същество ***варианти*** могат да се разглеждат като първа крачка към изследователската работа: директно прилагане на метода в по-сложна ситуация. Докато първото предложение е "чисто графично" следване на първоначалната идея, то във второто вече се ***сменя терминологията***, което може да се счита за по-сериозен напредък.

Павел Гласнов формулира задача (задача Б3), която е по-сложна от задача Б в три посоки.

1. Разглежда се технически по-сложен въпрос: изследване последните 3 цифри на някакви степени.
2. Формулира се общо твърдение за естествените числа.
3. Използва се терминология от теорията на сравненията.

Предложението на Светлозар Дойчев (задача Б4) е най-далечната точка, до която може да се стигне по този път. Формулировката е изчистена и стегната; методът е развит и приложен в няколко конкретни частни случая; така предложена, задача Б4 дава материал за по-задълбочено проучване, което излиза далеч извън рамките на обичайното ниво на СИУ. Ясно е, че авторът заслужава висока оценка.

Разгледаните примери са илюстрация на няколко основни елемента в работата на КК. Те показват колко далеч може да стигне развитието на една идея, когато учениците работят системно и задълбочено върху нея. Но развитието е възможно благодарение най-вече на взаимното активиране на участниците -- стремежът да постигат все по-нови резултати, работейки върху общ проблем.

2-3. Специфика на Кореспондентния кръжок

По-нагоре споменахме, че КК се отличава от останалите използвани форми на задочна работа. Разликите са следните (***Лазаров*** 1999):

1. КК не е състезание, в КК не се прави класация, не се раздават награди или грамоти;

2. задачите, включвани в материалите на КК се подбират така, че да допускат развитие на идеята;

3. в КК няма срокове, след които дадена задача престава да се обсъжда;

4. в КК могат да се предлагат нови задачи от участниците;

5. организаторите кореспондират лично с участниците; стремежът беше

6. формата на работа да е диалог.

Основните предимства, които произтичат от общите характеристики за задочните форми на работа в съчетание с особеностите на КК, са:

1. Върху отделна задача може ***да се работи по-дълго***, което позволява да се проучват отделни въпроси в литературата, да се търсят разработени методи за атакуване на подобни задачи. Има случаи ученици да изпращат решения с цитиране от вида "Виж сборник еди-кой-си, задача еди-коя-си на тая-и-тая страница".

2. Достатъчното време за работа позволява решенията да се оформят прецизно, подробно; отделните случаи в решението на една задача могат ***да се анализират в детайли***.

3. Личната кореспонденция с участниците прави контактите между тях и организаторите по-непосредствени. Този ***персонален подход*** създава особен ***климат на доверие*** между организаторите и участниците. ***Цитирането на имената*** на отделните участници е допълнителна ***форма на социална изява и признание за всеки един от тях***, което е силен мотив за участие.

4. Липсата на състезателен елемент дава възможност за гъвкав регламент за участие: първоначално предназначен за индивидуално участие на средношколци, КК впоследствие допуска участие на цели кръжоци, а някои от участниците продължиха да следят материалите и като студенти. В работата на КК взимат участие и изявени учители, например г-н Митко Кунчев, сега директор на математическата гимназия "Баба Тонка" в Русе.

5. КК даде възможност за обучение и изява на ученици и кръжоци от по-малки селища. Участието на такива ученици считаме за особено ценно по две причини: от една страна, тези ученици се включват в един елитен колектив, макар и задочно, с всички положителни последици. Чрез общуването в такъв колектив те не се

чувстват изолирани в своите занимания по математика. От друга страна, тези ученици стават проводници на модерните тенденции в средношколската математика в по-малките селища.

6. Системата на работа на КК създава дух на сътрудничество между ръководителите и учениците и той е добра основа за "***оптимално педагогическо общуване***" (**Петров** 1995 с. 30).

7. Липсата на класиране в КК позволява един по-свободен стил на контакти. ***Учениците се поощряват да споделят и неуспехите си.*** Има случаи, когато те пращат задачи, които не са успели да решат пълно. Такива задачи също са предлагани за общо обсъждане в КК.

2-4. Функции на Кореспондентния кръжок

Пълноценното участие в КК предполага изготвянето и изпращането на доста подробни ***писмени материали, оформени от учениците***.

В (***Rose*** 1989), с. 28-29, се дават следните съставки, които е желателно да присъстват, когато писането се използва като стратегия в педагогическата практика.

1. Преподавателите трябва да участват в назначаване на писмените форми, споделяйки своя опит с учениците.

2. Учениците се нуждаят от подкрепа и насърчаване при започване на това "ново приключение" -- писането на математика; необходимо е осъществяването на постоянна обратна връзка.

3. Учителят трябва да създаде атмосфера на доверие, когато учениците рискуват да изкажат лични възгледи и да споделят свой опит при писането.

По-горе стана ясно, че КК отговаря напълно на тези изисквания. Такъв извод правим въз основа на наблюдения, проведени в продължение на 4 учебни години (***Лазаров*** 1999). За този период (1985-1989) в работата на КК са регистрирани 112 участника. От тях 28 редовно са изпращали материали през целия период. Ще отбележим, че работата в КК предхожда цитираните в (***Rose*** 1989) изследвания.

Наблюденията ни дават основание да заключим следното.

1. Независимо от големите възможности за участие в явни и задочни форми на работа в разглеждания период, участниците в КК го приемаха, а някои го предпочитаха. Ще споменем, че в периода 1987-

1989 г. в КК участваха всички членове на националния ни отбор по математика.

2. В процеса на работа в КК се забеляза ***подобряване на стила на писане*** на много от участниците. Учениците се насърчаваха да пишат добре. Това се правеше например чрез публикуването на някои задачи и решения на учениците без каквато и да било редакционна намеса.

3. Участниците имаха възможността да формулират и дискутират математически твърдения по начин, характерен за ***научната изследователска работа***. Някои от тях навлязоха доста дълбоко в отделни проблеми.

За разлика от решаването на задачи в математическо състезание, ученикът, участващ в КК, работи върху определени проблеми продължително време. Той проучва литература, консултира се, обсъжда със съученици своите идеи, обменя идеи. В крайна сметка резултатът е висока творческа активност на учениците, сериозно обогатяване и доразвиване на навиците за самостоятелна работа.

Осъществяването на постоянна обратна връзка с участниците позволяваше едно своевременно коригиране на трудността на предлаганите задачи, степента на подробност на излаганите решения. Задачите, които бяха решени от всички (или по-голямата част) участници се обсъждаха бегло. Задачите, за които се получаваха само няколко решения, се обсъждаха по-детайлно; някои от тези задачи, снабдени с подходящи упътвания, се оставяха за дообмисляне. Тази система поддържаше високо ниво на активността у учениците.

Участието на групи ученици или ученици и учители показва, че някои учители включват в преподавателския си арсенал и такива задочни форми. За съжаление по ред причини КК преустанови своята дейност.

2-5. Анализ на две от най-важните особености на работата на КК

Първата от тях е ***"диалоговият режим на работа"***.

Той би могъл да се схване тривиално: като диалог между водещите кръжока, от една страна, и всеки един от участващите ученици. Но всъщност КК излезе от тези рамки, защото осъществяваше, макар и ограничен и контролиран от ръководителите, и ***диалог между отделните участници***. Създаваше се атмосфера на ***съперничество***, своеобразни "двубои" и "многобои" на учениците посредством включването на техни задачи – "предизвикателства" към конкретни други участници. Например: ученикът А "предизвиква" (като в рицарски турнир) със задача другите кръжочници, в отговор на това ученик В не само решава въпросната задача, но и я обобщава, като предизвиква А да се справи с вече по-трудното обобщение и т.н.

Сега идеята за "чат в Интернет" вече е нещо обичайно. Но тогава елементите на такава идея бяха новост, а доста нейни детайли бяха осъществени в дейността на КК. И ако Д. Павлов и В. Поплилова имат пълното основание да пишат за "***преодоляване на ограниченията на учебната зала***" и "***дидактическото въздействие върху участниците е несравнимо по-дълбоко, по-силно, по-трайно***" за ефекта от работата в ИНТЕРНЕТ (***Павлов и др.*** 1996), то подобни явления се наблюдаваха и като резултат от формите, прилагани в КК, независимо от това, че пренасянето на информацията с писма (плюс допълнителна загуба на време за размножаване на материалите) забавя (особено в сравнение с днешните представи) темпото на работа.

В КК беше осъществена и ***още една много важна идея***, която се оказа силен творчески стимулатор за участниците и, според мен, свърза тяхното бъдещо професионално развитие с математиката.

Това е идеята за ***обобщения***.

Изправянето на ученика пред необходимостта (или предизвикателството) да реши една сложна и трудна задача предполага явна или неявна, външна или негова лична (вътрешна) оценка на стойността на резултата: ако той се справи със задачата, този факт е добър атестат за неговите качества и знания. "Майстор съм", или "умен съм" – казва си ученикът. Подобна похвала могат да отправят и учител, родител, съученик. Но всъщност думите не са толкова важни. В повечето случаи учениците са в състояние сами да оценят постижението си, реализирано в решаването на трудни задачи. Тяхната собствена оценка и желанието да я подобрят са едни от основните стимули за по-нататъшна работа в математиката.

В току-що описаната картина ***ученикът се намира пред трудно преодолимо препятствие, но все пак е поставен в определени*** достатъчно традиционни за образованието ***рамки***: от него се иска да реши задача, съставена от някой друг, който я е решил преди него; и следователно пред задача, чието решение е известно (макар и не на мнозина). Справяйки се с нея, ***ученикът не може "да надскочи" съставителя***, даже ако решението му е оригинално и по-добро от известните до този момент.

По-различно стоят обаче нещата, когато пред ученика е поставена цел от съвсем друг тип: не просто да реши дадена задача (която може и да не е сложна), а да я ***обобщи***. С други думи, да поискаме от него не само (и не толкова) да реши задачата, колкото ***да състави друга подобна задача***, вече по-трудна, ***третираща по-общ проблем***, за който първоначалният е само частен случай. Подразбира се, че за съставената нова задача ученикът трябва да е намерил и решение, макар че понякога недоказано обобщение може да бъде интерпретирано като интересна хипотеза и също да се разглежда като математическо постижение, съответно принос.

Така поставяме ученика в доста ***типична за професионалния математик ситуация, когато той трябва да "открие" нова теорема***, евентуално опирайки се на аналогии с известни теореми.

Тук се открояват ***три*** основни предизвикателства за ученика:

1) Той не знае точно какво се иска от него, защото ***формулировката на желаното обобщение предварително не е известна на никого***; нещо повече, дадена задача може да допуска няколко различни обобщения "в различни посоки" и с различна степен на абстракция, и предварително остава неопределено, кое от тях би могъл (и ще може) да открие ученикът.

2) Той трябва да открие нещо, което е ***по-сложно*** (неизвестно доколко) ***в сравнение с дадената задача***, която пък е творение на друг математик; с това ***той трябва да надхвърли нивото***, демонстрирано от този математик, и по такъв начин влиза в задочно "***състезание***" с него;

3) при положение, че "напипа" подходяща обобщаваща идея, ученикът трябва да е в състояние да я доведе до завършено решение, т.е. да разполага с ***достатъчно богат математически "арсенал"*** от методи и техники. С други думи, той трябва да прояви и рутина на достатъчно високо ниво.

Третото предизвикателство би могло да се разглежда като свързано с достатъчно богата предварителна подготовка на ученика в рамките на кръжоци, школи, самостоятелна работа и работа с водещ учител (или друг специалист-математик).

Първите две поставят и психологически проблеми, които не са изследвани подробно. Но практиката на КК показва, че те са важни; защото се оказа, че ***именно обобщенията бяха най-***

привлекателни за участниците и там беше съсредоточено основното им внимание.

Именно ***осъзнаването на ролята***, която би могло да играе ***търсенето на обобщения в работата с ИУ, е най-важното методическо откритие, осъществено в рамките на КК***, което според мен стои по-високо от описаното по-горе подобие на съвременния "чат" в Интернет. Елементи на търсенето на обобщения присъстват и в работата на "учител + ученик", описана в дисертациите на Б. Лазаров (**Лазаров** 1999) и Е. Великова (**Великова** 2002).

Прекъсната през 1990 г. поради липса на финансиране, рано или късно подобна дейност ще бъде възстановена, вероятно с използване на електронна поща, и ще даде възможност за внимателно изучаване на комплекса от математически, методически, педагогически и психологически проблеми, свързани с работата на участващите в нея ученици и ръководители.

§ 3. Специализирани помагала за подготовка за математически състезания

3-1. Пособия за обучение на ИУ: общи методически бележки

Може би звучи екстравагантно, но е близко до истината твърдението, че ***сборниците с олимпиадни задачи са "учебниците" по математика за ИУ.***

Затова макар и формално да имат аналогия със сборниците със задачи, предназначени за училищния курс, сборниците с олимпиадни задачи обикновено са нещо, което има по-различно предназначение. Това различно предназначение намира отражение в някои съществени характеристики на самите сборници.

Първата разлика е връзката с определено "учебно съдържание" на формално стандартизираните учебници, които дават практически всички необходими теоретични знания, обявени в програмата на учебния курс. Този факт превръща "***училищните" сборници*** в сбирка от "примери", които трябва да упражняват преди всичко ***знанията и уменията, залегнали в учебното съдържание***. В противовес на това олимпиадните задачи трябва да съдържат елементи на умения, а много често и на знания, които излизат извън рамките на стандартния курс училищен курс.

Под влияние на олимпиадите през последните десетилетия в някои страни, в това число и в България, станаха някои промени в обучението по математика, които "разшириха хоризонта" му с привнасяне на "олимпиадни" идеи (например геометрични трансформации в геометрията и др.). Те разкриха едно интересно ***противоречие***: ако се разработи и включи в учебното съдържание някоя област, която до момента е била извор на задачи за олимпиади, с това тя автоматично до голяма степен "излиза" от "състезателния" интерес.

Тези общи разсъждения ни насочват към интуитивната мисъл, че ***трайно присъствие в олимпиадната практика имат теми и кръгове от въпроси, които по-трудно се поддават на формализиране***, за които е по-трудно "да се напише учебник" в обичайния смисъл на думата "учебник".

Друга съществена характеристика на "олимпиадните" сборници, която ги различава от "училищните", е ***"натоварването" на решенията с много важна, практически водеща роля***. "Училищните" са по-скоро "списък от примери" с дадени накрая отговори, като някои от примерите са решени за илюстрация. За "олимпиадните" трябва да подчертая, че в контекста на моите разсъждения тук даже не съм склонен да употребявам термина "сборник от задачи" за сбирка от олимпиадни задачи без решения. Моето лично убеждение е, че ***две еднакви сбирки, състоящи се от едни и същи задачи, могат да породят два различни сборника (и да се разглеждат като такива)***, ако са различни в достатъчно голяма степен съпровождащите ги решения. Така ***решенията*** всъщност ***поемат*** почти изцяло ***"обучаващата" компонента*** на олимпиадния сборник. Ученикът, който ползва такъв сборник, след опит да реши дадена задача, независимо от това дали опитът е бил успешен или неуспешен, се запознава с предложеното в сборника решение. От него той може да научи нов метод, кратки разсъждения, и в почти всички случаи да види подходящ чертеж, удобни и общоприети означения и удобно, убедително изложение. Във връзка с това е важно да се отбележи, че въпросът "Какво да включим в решението на една задача?" е много важен; на него не може да бъде даден формален и пълен отговор, и именно ***от решенията в олимпиадните сборници ИУ се учат как да оформят писмените изложения на своите решения***.

Трета характеристика, по която олимпиадните сборници се различават от училищните, е групирането на задачите по раздели. В училищните то е подчинено почти напълно на обособените теми в учебното съдържание; за разлика от това класифицирането на олимпиадните задачи по "област на математиката", към която се опитваме да ги отнесем, е в много от случаите условно, защото е обичайно явление в една олимпиадна задача да се преплитат идеи от съвсем различни области на математиката.

На ***олимпиадните задачи е присъщо именно комбинирането на две или повече различни основни идеи*** (понякога от различни области – например алгебра и комбинаторика, или геометрия и теория на числата и др.).

За илюстрация да разгледаме следната задача от IV кръг на Българската олимпиада през 1987 г.:

Задача. Да се докаже, че ако разстоянията от точка M до върховете на даден правилен тетраедър с ръб 2 са цели числа, то M съвпада с някой от тези върхове. (Съставена за олимпиадата от Й. Табов; вижте (***Кендеров и Табов*** 1989).

Още в условието може да се забележи наличието на термини от ***геометрията*** ("точка", "разстояния" и "правилен тетраедър") и от ***теорията на числата*** ("цели числа"), така че логично в решението се прилагат идеи и от двете споменати области.

Ясно е, че класификацията на подобни задачи е и условна, и нееднозначна и зависи от контекста, в който я поставя един или друг автор.

Един интересен подход за ***групиране*** на олимпиадните задачи е ***по водещите методи за тяхното решаване***. Макар че не е често явление, той се среща в практиката. Основното му предимство е в това, че, работейки върху подборка от задачи, илюстриращи прилагането на даден метод, учениците могат да огледат различните типични ситуации, в които той е препоръчителен, да вникнат в детайлите, да усвоят стандартните елементи на разсъжденията и на конструкцията на решенията, и да затвърдят получените знания и умения с подходящи упражнения.

Малко по-надолу ще се спрем на две разновидности на такова групиране, като разгледаме две различни изложения на метода, наречен условно "хомотетия" (по названието на геометричното преобразование, което се използва). Те са предназначени за постигане на различни цели.

3-2. Методическа концепция на пособието МОПС

"Учебниците", по които става подготовката на учениците за математически състезания, са фактически сборници от задачи, и в поредки случаи помагала, близки по съдържание и структура до сборниците от задачи. Основното им съдържание са задачи, задачи и пак задачи. Най-популярни и най-използвани са сбирки от задачите, давани на авторитетни математически състезания: "Сборник задач Московских математических олимпиад" (***Леман*** 1965), "Венгерские математические олимпиады" (***Кьюршак и др.*** 1976), «Зарубежные математические олимпиады" (***Сергеев*** 1987), "Польские математические олимпиады" (***Страшевич и Бровкин*** 1978), "Избранные задачи из журнала "American Mathematical Monthly"» (***Monthly*** 1977) и др.

За последния половин век, през който фактически съществуват и се развиват съвременните математически състезания, "подготвителната литература" измина дълъг път на развитие. Още ***първата олимпиада*** в България през 1949/50 учебна година ***е предвиждала подготовка***: комисията, възглавявана от акад. Л. Чакалов, е предложила списък с подготвителни задачи, и студенти по математика от СУ са решавали тези задачи пред ученици от софийските гимназии с цел да ги подготвят за предстоящото състезание.

Така българската традиция за "тренировка" на ученици с математически способности има в началото си списъци със задачи. Същият феномен се наблюдава и практически във всички страни по света.

Вероятно първият български "олимпийски" сборник е един сборник от подготвителни задачи за математически олимпиади, издаден от МНП през 1963 г. Той съдържа само задачи, някои от които са придружени от решения. Няколко години по-късно излезе значително по-богатият на задачи и идеи сборник на Будуров и Флоров, а скоро след това и сборникът на Будуров със задачите на българската и първите 10 международни олимпиади. В последния освен задачите на олимпиадите има кратък отчет за организацията, участието и представянето на българските ученици.

Друг "извор" на задачи за изявени ученици в периода отпреди 30-ина години беше рубриката за конкурсни задачи на сп. "Математика". Печатахе се и малки брошури със задачите на проведените през 60-те години радиоконкурси.

Около 1980 г. настъпи рязка промяна в "информационната среда", подхранваща с теми и задачи работата с изявените ученици. По инициатива на П. Кендеров, който успя да осигури подкрепа от страна на Единния център по математика, на Съюза на математиците в

България и на МНП, започна издаването на брошури за организираната тогава Задочна школа по математика; появиха се и ежегодни сборници със задачите от подготовката на българския отбор за Международната олимпиада по математика, после и други брошури със сбирки от олимпиадни задачи. Скоро след това в издателство "Просвета" започна да излиза "Библиотека Алеф", предназначена за ученици с математически способности и техните учители.

Мисля, че всичко това очертава ***материалната страна на стабилизацията*** на отличното ниво на българските изявени ученици по математика, потвърдено от станалото традиционно тяхно успешно представяне на международните състезания от всякакъв ранг и за всяка възраст.

В рамките на брошурите на ЗШМ, а по-късно и в "Библиотека Алеф" излязоха повече или по-малко успешни тематични разработки и сбирки от задачи. Те са своеобразен ***плод на методическо творчество на българските математици***, сравними с аналогична литература в тогавашния СССР, Румъния, Чехословакия. Те дават основание да отредим ***високо място в световен мащаб на "българските продукти" в областта на пособията за изявени ученици***. Много преподаватели и учени от различни страни по света намираха начин да преодолеят неудобствата от непознатата за тях кирилица и също така непознатия български език, за да използват плодовете на труда на българските си колеги.

Дългогодишната ми дейност в математическите състезания и подготовката на ученици и учители за тях формираха у мен идеята за осъществяване на един проект, който в някои отношения беше новост в световната практика.

През 1992 г. с австралийския математик Питър Тейлър (един от основателите на престижното Австралийско математическо състезание, сега президент на Световната федерация на математическите състезания) започнахме работата върху пособие, по-различно от съществуващите.

Какви цели преследва това пособие? Каква е структурата му? Какви са особеностите около елементите му?

Вече споменах по-горе, че през 80-те години в България излязоха (в поредицата "Алеф", сред брошурите за ЗШМ) някои хубави тематични (посветени на определена тема) пособия, предназначени за ученици с изявени способности и учителите им. Всички те задължително са изградени върху богата ***сбирка от подходящи задачи***, спадащи към съответната тема; съпровождат ги теоретични бележки, понякога съвсем кратки. Някои от тези неголеми книжки са по същество на ниво кратка монография в съответната област (например "Принципът на Дирихле" на И. Проданов, "Комплексни числа" на И. Тонов, "Теория на графите" на Н. Хаджииванов).

От личната ми практика, а и от впечатленията на колеги – учители и научни работници, работещи с изявени ученици, стигнах до убеждението, че ***тематичният подход има много силни страни***. Той насочва подготовката на учениците в ***системно русло***, към ***планомерност***. Работейки в рамките на дадена тема, може да се постигне задълбоченост, да се огледат всички важни детайли, и нещо повече: може да се постигне не само запознаване с основните за темата идеи, похвати, разсъждения и техники, но и те да се упражнят достатъчно, за да останат трайно в съзнанието на ученика и да станат част от "бойния му репертоар".

Разбира се, основната част от работата по такава тема се състои от решаване на задачи. Често пъти се случва учениците първо да се сблъскат с трудна задача, и неуспехите им в решаването ѝ да ги амбицират да прочетат кратка "теория" за идеите, с които може да се изгради решение.

Преминавайки от тема на тема, стъпка по стъпка ученикът придобива солидна подготовка. В резултат на това, ако на състезание му се случи да попадне на една или две задачи от изучените от него теми, той обикновено се справя с тях по-бързо и има повече време за работа върху останалите задачи.

И така, тематичното разделение на материала носи важни предимства, и то е важен елемент от структурата на пособието, което описвам.

Това е забелязано от мнозина, и затова редица автори на сборници за ИУ го използват. Особено често това става на повърхностно ниво: оформят се раздели като "алгебра", "планиметрия", "теория на числата" (или съответно "аритматика"), "комбинаторика" и т.н. Тази идея може да се усъвършенства, като фрагментирането продължи на още по-тесни, специфични раздели на алгебрата, геометрията и другите основни области на математиката. Много често авторите не се стремят да осигурят достатъчна "тематична наситеност" на отделните раздели-фрагменти, и в тях попадат само задачи от няколко специфични "серии", а важни и разпространени в практиката идеи остават въобще извън съдържанието на съответното пособие. Когато подобна слабост се избегне, сборниците стават отлични помагала за ***системна*** работа на ИУ и СИУ. Все пак трябва да подчертаем, че и "непълните" сборници могат съществено да допринесат за усъвършенстване на ИУ и СИУ в отделни области и поради това може да заслужават висока оценка и вниманието на СИУ при условие, че подборът на задачите и особено предлаганите решения са на високо ниво.

И така, желанието ни (със съавтора ми Питър Тейлър) да се насочим към общо взето тематична структура на нашето пособие беше естествено и отговаряше на тогавашните модерни тенденции в този жанр. Към това решихме да добавим нещо относително ново: ***да погледнем към задачите не от гледна точка на областта на математиката, към която спадат, а от гледна точка на методите, които се използват за решаването им.*** Така на преден план като водещ елемент в класификацията, а оттам и на структурата, станаха ***методите***, които се прилагат за решаване на задачи.

Следващата стъпка в избистрянето на концепцията за пособието беше насочването към ***специфични и нетривиални методи***, които се срещат достатъчно често в състезателната практика (а оттам и в литературата за ИУ), и които се прилагат в неочевидни случаи и/или по нестандартен начин, така че да заслужават термина "олимпиадни".

Изборът на методите като определящи съдържанието и структурата е първата "модерна" за времето си стъпка. Към нея се прибави и още една.

За нейното оформяне допринесоха няколко книги с високи качества, издадени за целите на обучението на ИУ. Сред тях е "Принципът на Дирихле" от Ив. Проданов. Всъщност тази книга е посветена именно на ***метод за решаване на задачи***, метод, основан на прилагането на известния и сред математиците, а и сред ИУ "принцип на Дирихле". На ***метод*** е посветена и книгата "Метод математической индукции" от И. Соминский, също предназначена за ИУ и техните учители. Успехът на тези книги сред ИУ и техните учители, а също и добрите резултати, постигнати от учениците, са основа за идеята замисленото пособие да се състои от отделни глави, подобни на тези две книги: глава за метода на математическата индукция, глава за принципа на Дирихле, и т.н.

Дали обаче във всяка от тези глави трябва да се търси пълнота?

Този проблем възникна във връзка с подобна моя книга – сборник, посветена на метод: "Хомотетията в задачи". Естествено, по-късно глава на същата тема се появи и в замисленото и осъществено пособие, но ***съдържанието ѝ е различно, а подборът на задачите е подчинен на други принципи***.

Понеже именно принципите на подбор на задачите в случая играят ключова роля, по-надолу се спирам на тях по-подробно и за нагледност предлагам и илюстрираща ги ***схема***.

Да разгледаме съвкупността на съществуващите задачи, които се решават с метода на хомотетията. Някои от тях са доста близки по постановка, геометрична конфигурация, елементи, начин на прилагане на метода и т.н. Често пъти една такава група от задачи би могла да бъде обособена от останалите и да образува своеобразна "серия" или по-общо "гнездо", ако искаме да използваме примитивното, но затова пък ясно онагледяване на задачите като "яйца" в гнездото.

Сега да разгледаме черт. 3-1. На него имаме примерна схема, на която задачите ("яйца") са представени като малки кръгчета, а "гнездата" са заградени с пунктирна линия. При това да предположим, че близостта на точките до известна степен съответства на близостта (по постановка, конфигурация и т.н., както по-горе) на съответните задачи. За определеност с малко по-големи кръгчета са изобразени по-трудни, по-важни, по-емблематични за метода задачи.

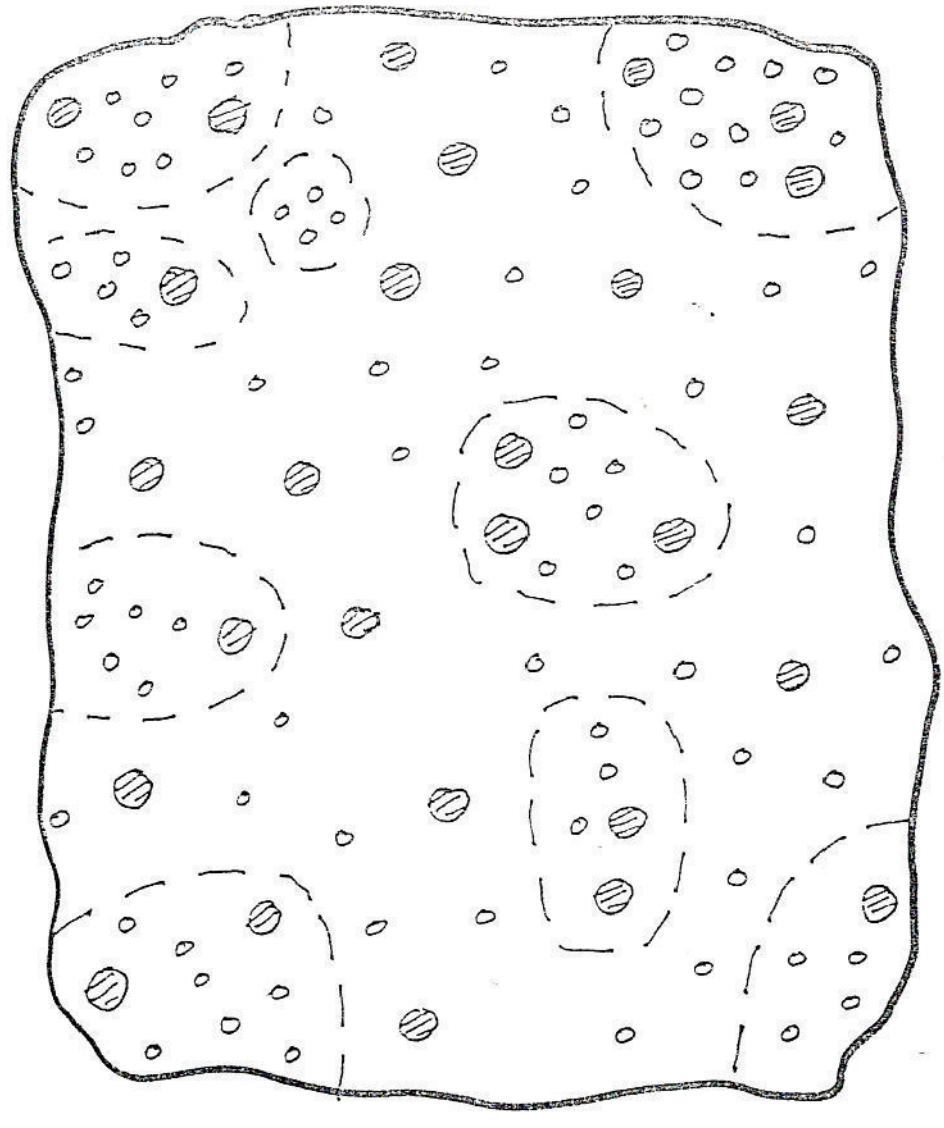
Как от тази съвкупност да изберем задачи (съответно точки) за пособие?

Открояват се три възможни (и понастоящем доста разпространени) подхода.

1) Избират се всички "съществени" задачи. Това означава следното: понякога имаме няколко формално различни задачи, но те са по същество варианти на една единствена: третираната в тях конфигурация е една и съща, решението е практически едно и също, само формулировката на проблема (най-често това, което се иска в задачата) е по-различна. От такива задачи – дубликати се избира само една, другите се изпускат. След отстраняване на всички задачи – дубликати остава съвкупност, която образува основното съдържание на пособието. Този подход беше приложен при работата ми над "Хомотетията в задачи".

2) Избират се само "интересни" задачи. Например, ако разполагаме с добре обмислени и изящно построени решения на 35 от задачите; решения, с които бихме могли да събудим приятни емоции у евентуален читател и евентуално любов и траен интерес към темата. Подобни пособия играят определена положителна роля.

3) Избират се няколко по-леки задачи заедно с известен брой техни задачи – дубликати. Този подход се прилага при пособие, въвеждащо начинаещи, неопитни ученици в нова тема. "Основните" задачи са с подробно, демонстративно решение, а дубликатите служат за упражнение, така че учениците да може самостоятелно в известен смисъл да повторят разсъжденията на автора.



Чертеж 3-1

Имайки предвид тези три широко разпространени методики за подбор на задачите за пособие, със съавтора ми Питър Тейлър взехме решение да ***ориентираме пособието към особено изявените ученици*** и към онези, които биха желали да опитат да работят като тях.

Целите, преследвани с това пособие, включват обслужване на подготовката на ученици с опит, достатъчно много "олимпиадни" знания за състезания от висок ранг. Ученици, които са преминали през кръжоци и школи и са изрешили не един и два "традиционни" олимпиадни сборника.

С други думи, пособието цели да "опресни" и повдигне на по-високо ниво "въоръжението" на състезатели със специфични методи за решаване на задачи.

При такава постановка е ясно, че трите описани по-горе подхода не дават възможност за осъществяване на такива намерения.

Все пак от нея следва, че трябва да се придържаме ***близо до втория*** от изброените подходи. Той обаче трябва да се съчетае – доколкото е възможно – с ***оптимизационна идея: подборът на задачите да се осъществи така, че те да "покрият" в максимална степен идеите, детайлите, конфигурациите и т.н.*** (вижте обясненията по-нагоре). Образно казано – в рамките на нагледните представи от черт. 3-1 – задачите да бъдат "максимално отдалечени" една от друга. На практика това например означава, че трябва да се избягва включването на две или повече задачи от едно и също "гнездо", а понякога и от съседни "гнезда", в избраната съвкупност.

В това описание се подразбира, че всяка от избраните задачи трябва да илюстрира в много добра степен съответния метод, че предложеното решение трябва да е възможно най-рационалното и в него да доминира идеята на метода.

Така очертаната ***концепция*** е трудна за осъществяване, а ***"най-подходяща" система от задачи не може да се определи еднозначно***.

Горната конструкция е близка до една полезна идея на Г. Дорофеев, която позволява на специалистите по състезателни задачи да се ориентират по-добре в съвкупността от задачи в дадена тематика (***Дорофеев*** 1983).

Той предлага с ***всяка задача да асоциираме*** набора (групата, множеството) от ***всички свързани с нея задачи*** – по използвани понятия, съдържание, разсъждения, методи за решаване и др. Този набор задачи Г. Дорофеев нарича "***околност***". Така всяка задача има своя "околност" от задачи и от своя страна влиза в техните "околности". Установяването и отчитането на такива връзки между задачите дава възможност да определим "по-възловата" роля на някои от тях в съвкупността от задачите в дадена област.

От това описание става ясно, че въведеното тук понятие "гнездо" е близко по смисъл до "околност". То е по-конкретно и просто и добре онагледява стратегията по подбора на задачи за пособието МОПС.

Изборът на числото 10 за ориентир на бройката задачи, които са представени на читателите на пособието за самостоятелна работа към всеки метод, се оказа удачен. Тези задачи са предхождани от кратки теоретични бележки за метода (които по-скоро да напомнят на читателите възлови дефиниции, означения и факти, отколкото да ги запознават с теоретичните му основи) и примери, илюстриращи приложението му.

Подготовката на пособието премина през няколко етапа, като започна с методи, в областта на които имахме най-богат опит на работа с ИУ, ОИУ и техните учители: П. Тейлър около подготовката на Австралийското математическо състезание и Международния турнир на градовете, и аз като ръководител на подготовката на българския отбор за няколко международни олимпиади и като лектор в десетки школи за ИУ и техни учители, като редактор в списание "Обучението по математика и информатика", водещ рубриката "Задачи", като главен редактор на международното списание "Mathematics and Informatics Quarterly" и др.

Подбраните задачи преминаваха практическа проверка, по-специално бяха представяни на лекции пред ИУ и учители. Тяхната реакция, мнения, критика и предложения бяха анализирани и взети под внимание при оформянето на окончателната версия. Подготвеният вариант на първия том на пособието беше подложен на внимателна преценка от двама от най-изявените в световен мащаб познавачи на такъв тип задачи: Б. Рени (сега покойник, а тогава един от най-авторитетните австралийски математици) и А. Лю (канадски математик от китайски произход).

Издадено от Австралийския математически тръст в неговата специализирана серия от книги за ИУ, пособието под заглавие "Methods of Problem Solving" намери добър прием и е една от най-търсените книги на издателството. Първият том претърпя вече 3 издания от 1996 г. насам, а през миналата година излезе и вторият том.

3-3. Концепция за представяне на метода на хомотетията в пособието MOPS

Ще се спра накратко на темата *хомотетия*, за да обсъдя някои по-важни разлики в представянето й в двете пособия "Хомотетията в задачи" и "Methods of Problem Solving" (за по-кратко го означаваме с MOPS).

При развитието й в MOPS ***изхождаме от предпоставката, че читателите*** не само ***са срещали понятието хомотетия***, но и ***са боравили с него.*** Дефинициите са предназначени да опреснят формалната страна на понятията и идеите и не на последно място да демонстрират и различните възприети означения, които отразяват различни нюанси в интерпретацията но хомотетията (например като функция и като трансформация).

Представянето на най-важните свойства на хомотетията също играе съществена роля. От една страна, те опресняват знанията и интуитивните представи на читателите. От друга страна създават сигурна база, на която да стъпят приложенията на хомотетията, защото ***при решаването на конкретна задача ние се позоваваме на някое определено свойство*** (или на няколко свойства) на хомотетията. Споменаването на хомотетията "въобще", без уточнение на свойството, създава условия за двусмисленост и оставя впечатление за непълно, не добре пояснено и доказано решение.

В списъка на свойствата важно място заема "принципът за съответствие при хомотетията", на който се изградени много от най-интересните и най-нетривиални нейни приложения.

Теоретичните бележки в MOPS завършват с няколко прости примера, които се решават с прилагане на хомотетия. Първият пояснява и един принципно важен както за хомотетията, така и за другите геометрични трансформации детайл: ако точка M описва фигура F, то хомотетичният образ на M описва хомотетичния образ на F. Вторият и третият показват "силата" на Принципа на съответствие при хомотетията.

Сравнявайки теоретичните бележки в MOPS с тези в "Хомотетията в задачи", забелязваме, че първите са част от вторите. В "Хомотетията …" има текст, който третира още начини за определяне на хомотетия; те улесняват откриването на хомотетични елементи в дадена геометрична конфигурация и подпомага читателите с по-беден опит в геометрията.

Списъкът от най-важните свойства на хомотетията (поне във вида, в който е представен в MOPS и в "Хомотетията в задачи"), ***не се среща в предшестващата литература***. Монографията на Шклярский и др. разглежда хомотетията предимно от гледна точка на групата на афинните преобразувания на равнината и пространството.

А сега да насочим вниманието си към спомената по-горе характерна за MOPS ***оптимизационна идея***, и конкретно към реализацията й в материала за хомотетия.

Да разгледаме задача 1 от цитирания по-горе текст от MOPS. Тя присъства и в "пълното" пособие "Хомотетията в задачи" под номер 2-18. При това в него тя е "в компанията" на други подобни задачи. Нещо повече, може да забележим, че петте задачи от 2-15 до 2-19 представляват обособена група, нещо като "серия", защото са обединени от общи водещи елементи в геометричната конструкцията, третирана в тях, и от общата идея за хомотетия на две окръжности, която се прилага в решението. Наредбата им е такава, че стъпка по стъпка става усложняване и обогатяване на постановката и съответно решението им.

Тези особености позволяват да разглеждаме ***групата от въпросните 5 задачи*** като своеобразно "гнездо", групирано от гледна точка на хомотетията, от подобни задачи. Решавайки ги последователно, един начинаещ в хомотетията читател е улеснен от постепенното навлизане в метода, може да го разгледа първо в най-лесните му варианти, и след това да проследи наред с другото и усложняването на постановката. Не на последно място е и повтарянето на идеята за хомотетия на две допиращи се окръжности, което пък улеснява запаметяването на елементите от техниката на прилагането й и характерните удобни фрази, които се използват в писмените решения.

В следващите редове представяме самата група от пет задачи.

Права през центъра на хомотетия на две допиращи се окръжности

2.15. В трапеца *ABCD* с основи *AB* и *CD* диагоналите се пресичат в точка *O*. Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците *ABO* и *CDO*, се допират.

2.16. Две окръжности се допират в точката *A*. През *A* минава права, която ги пресича още в точките *B* и *C*. Да се докаже, че допирателните към двете окръжности в точките *B* и *C* (черт. 2.12 и 2.13) са успоредни помежду си.

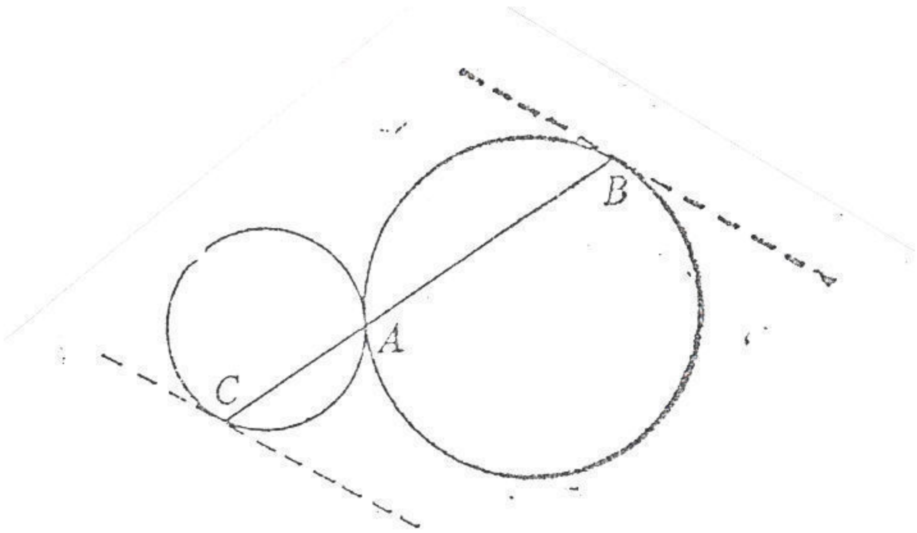
2.17. Две окръжности Γ_1 и Γ_2 с радиуси съответно r_1 и r_2 се допират в точката *P*. През *P* минават две прави, които пресичат Γ_1 в точките *A* и *B*, а Γ_2 - в точките *C* и *D* (черт. 2.14). Да се докаже, че *AB* и *CD* са успоредни и $\frac{AB}{CD}=\frac{r_1}{r_2}$.

2.18. Две окръжности се допират външно в точката *A*. През пресечната точка на техните общи външни допирателни минава права, която пресича окръжностите последователно в точките *B*, *C*, *D* и *E* (черт. 2.15). Да се докаже, че $\angle BAD = 90^\circ$.

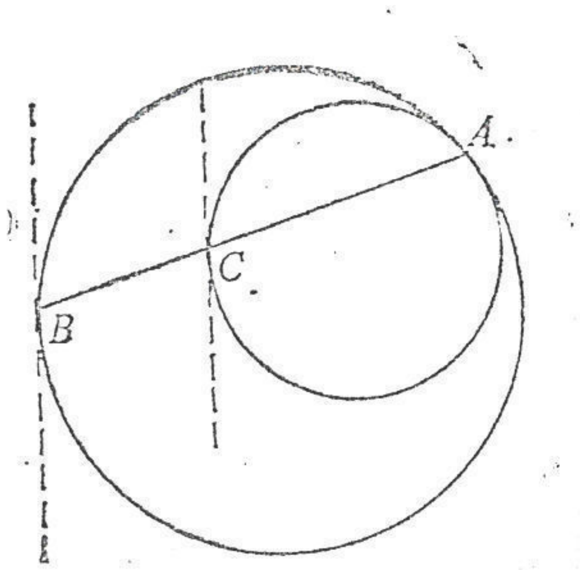
<u>Решение</u>*:* Нека Γ_1 и Γ_2 са двете дадени окръжности, а *M* – пресечната точка на техните общи външни допирателни, т.е. техния външен център на хомотетия. Можем да смятаме, че *B* и *C* са върху Γ_1, а *D* и *E* – върху Γ_2 (черт. 2.16). Нека *h* е хомотетията с център *M*, която изобразява Γ_1 в Γ_2. Тогава $h(B)=D$, а $F=h(A)$ е диаметрално противоположна на *A* в Γ_2 (*M*, *A* и центровете на Γ_1 и Γ_2 лежат на една права). Тъй като *AF* е диаметър на Γ_2, то $\angle ADF = 90^\circ$. От използваните съотношения $h(B)=D$ и $h(A)=F$ е ясно, че правата *FD* е образ на правата *AB* при хомотетията *h*, т.е. че *FD* и *AB* са успоредни, а това означава, че вътрешно кръстните ъгли *ADF* и *BAD* са равни, т.е $\angle BAD = 90^\circ$.

2.19. Две окръжности се допират вътрешно в точката *A*. През техния вътрешен център на хомотетия минава права, която ги пресича последователно в точките *B*, *C*, *D* и *E* (черт. 2.17). Да се докаже, че

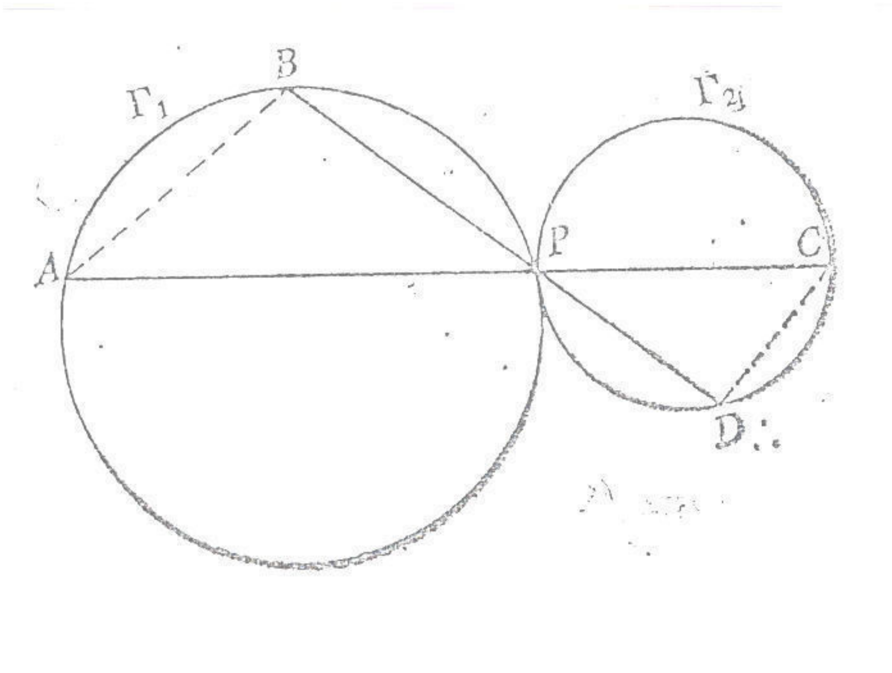
$\angle BAD = 90^\circ$.



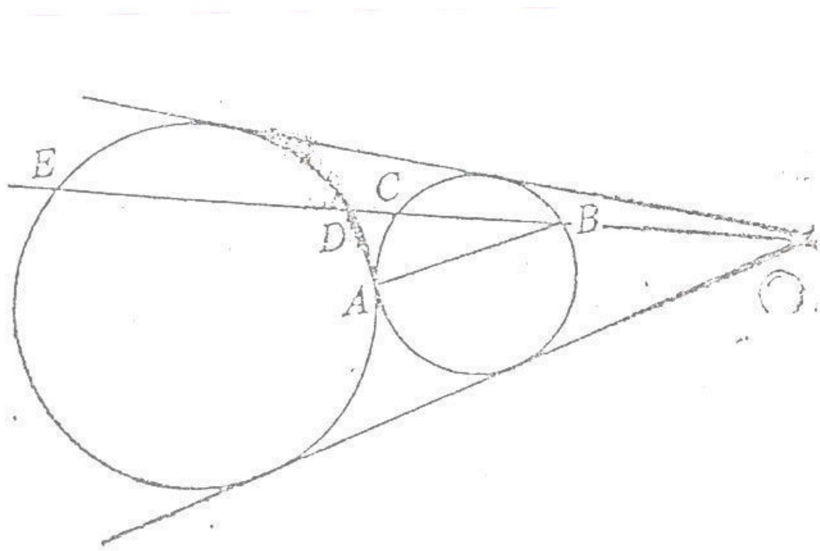
Чертеж 2.12



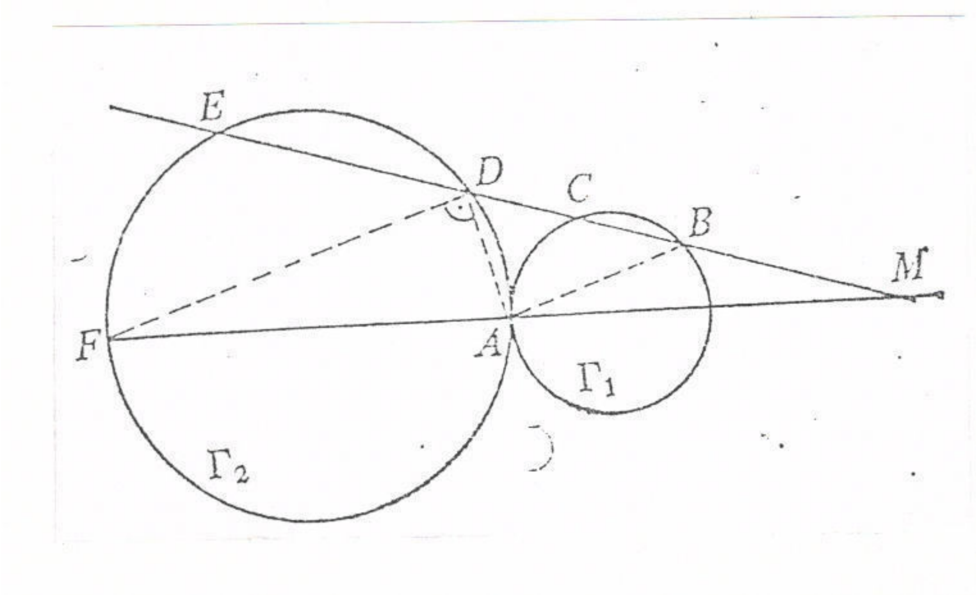
Чертеж 2.13



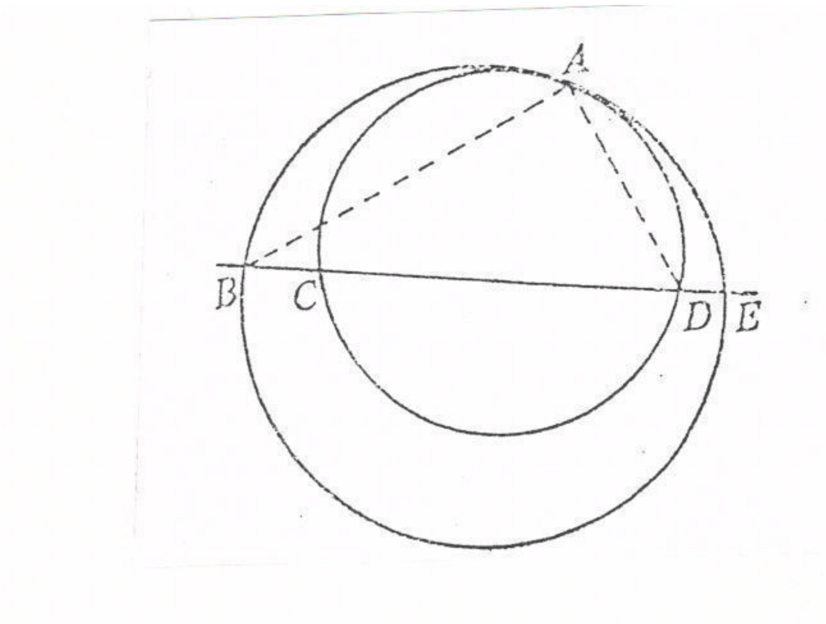
Чертеж 2.14



Чертеж 2.15



Чертеж 2.16



Чертеж 2.17

3-4. От концепция към реализация: една вместо пет

След подробните разяснения можем да се върнем към реализацията на оптимизационната идея в случая с хомотетията. Логиката на подхода води до извода, че от серията от пет задачи ***за две допиращи се окръжности*** в "пълното пособие" за MOPS трябва да изберем ***една или две***. Коя (или кои)? Отговорът на този въпрос също следва логично от поставените пред MOPS цели: да обслужва подготовката на ОИУ, които вече са срещали хомотетията и са работили епизадично с нея. Така стигаме до извода, че трябва да изберем ***една*** (или две) ***от най-трудните задачи, които възможно най-пълно разкриват особеностите на общата конфигурация и на прилагането на идеята за хомотетия.*** В нашия случай на тези условия отговаря задача 2-18. Затова тя беше предпочетена за MOPS, където фигурира като задача 1.

Възприетият в MOPS подход е различен от идеята, осъществена в монографията (Ганчев 1976), където на стр. 79-82 са предложени шест групи задачи по темата хомотетия. Във всяка от тях има обща свързваща идея, а наредбата проследява нейната еволюция към по-сложни варианти. Ясно е, че предназначението им е за първоначално запознаване с хомотетията; това се вижда от внимателно подбраните повтарящи се детайли, чиято цел е да упражнят учениците чрез третиране на сходни ситуации, базирани на обща идея. Спецификата на целите изключва необходимостта от оптимизация в смисъл свеждане към минимален брой задачи. От гледна точка на стратегията, възприета в MOPS, за "финална подготовка" на особено изявени ученици би трябвало да изберем от всяка от въпросните шест групи по не повече от една задача.

Цялостната разработка на метода на хомотетията в MOPS е представена в следващите редове.

ХОМОТЕТИЯ

Дефиниция

Нека O е точка и k е реално число. Хомотетия с център O и коефициент k ($k \neq 0$) е взаимно еднозначно изображение на равнината (или пространството) в себе си, което на всяка точка X съпоставя точка Y така, че

$$\overrightarrow{OY} = k\overrightarrow{OX}.$$

Ако h е хомотетия, при която точка Y е образ на X, записваме

$$X \xrightarrow{h} Y,$$

или

$$h(X) = Y.$$

Както обикновено, геометричните фигури разглеждаме като множество от лежащите на тях точки.

Нека F е фигура и h е хомотетия. Множеството от образите на точките от F при хомотетия h е фигура F_1, която наричаме образ на F и записваме

$$F \xrightarrow{h} F_1$$

или

$$h(F) = F_1.$$

Хомотетия h с коефициент $k = 1$ е идентитет, т.е. $h(X) = X$ за всяка точка X. В този случай хомотетията не зависи от положението на центъра си.

Хомотетия с коефициент $k = -1$ се нарича централна симетрия.

Ако хомотетия h има център O и коефициент k, хомотетията h_1 с център O и коефициент

$$k_1 = \frac{1}{k}$$

се нарича обратна на h. Ясно е, че ако $h(F) = F_1$, то $h_1(F_1) = F$.

Ако съществува хомотетия, изобразяваща фигурата F в друга фигура F_1, то нейната обратна хомотетия ще изобрази F_1 в F; затова фигурите F и F_1 се наричат хомотетични.

Основни свойства на хомотетията

Нека h е хомотетия с център O и коефициент k. Тогава са в сила следните свойства:

1. h изобразява O в O и всяка точка M, различна от O в точка M_1 от правата OM; тъй като $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$, то O дели отсечката MM_1 в отношение $-k$.

2. h изобразява права ℓ в успоредна на нея права; когато ℓ минава през O, тя се изобразява в себе си.

3. h изобразява лъч в успореден на него лъч.

4. h изобразява отсечка в успоредна на нея отсечка.

5. Ако точките A, B $(A \neq B)$ и X са колинеарни, $A_1 = h(A)$, $B_1 = h(B)$ и $X_1 = h(X)$, то
$$\frac{\overline{A_1X_1}}{\overline{X_1B_1}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}.$$

6. Ако отсечка с дължина a се изобразява при хомотетия в отсечка с дължина b, то $b = |k|a$.

7. h изобразява окръжност Γ с радиус r в окръжност Γ_1 с радиус $r_1 = |k|r$ и центъра на Γ се изобразява в центъра на Γ_1.

8. h изобразява многоъгълник M в подобен на него многоъгълник, чиито страни са съответно успоредни на страните на M.

9. h изобразява ъгъл δ в друг ъгъл (равен на δ), чиито рамена са успоредни на рамената на δ.

10. h изобразява допиращи се криви (окръжности, прави и т.н.) в допиращи се криви.

Някои от формулираните по-горе свойства са частни случаи на следния по-общ

11. **Принцип на съответствие** при хомотетия: образът на всеки елемент (точка, права, отсечка и т.н.) от фигура F е съответния елемент от образа F_1 на F, т.е. при хомотетия h медианата на триъгълник се изобразява в съответната и медиана от образа на този триъгълник, медицентърът на триъгълник се изобразява в медицентъра на образа на този триъгълник, центърът на вписаната окръжност на триъгълник се изобразява в центъра на вписаната окръжност на образа на триъгълника и т.н.

Принципът на съответствието е в основата на най-важните приложения на хомотетията.

12. h изобразява равнина в успоредна на нея равнина.

13. h изобразява сфера Σ с радиус r в сфера Σ_1 с радиус $r_1 = |k|r$ и центърът на Σ се изобразява в центъра на Σ_1.

14. h изобразява тяло M в друго, подобно на M тяло, чиито стени са успоредни на съответните им стени от M.

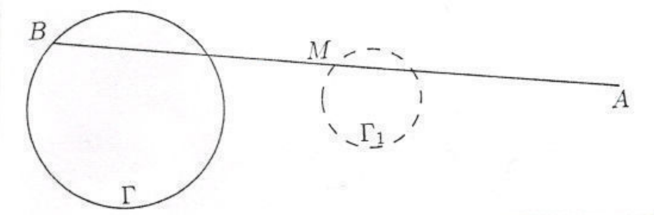
15. h изобразява допиращи се повърхнини (равнини, сфери и т.н.) в допиращи се повърхнини.

Следващите две свойства показват връзката между лицата (обемите) на фигурите (телата) и техните образи при хомотетия.

16. Ако S е лицето на фигура F и S_1 е лицето на нейния образ F_1, то $S_1 = |k|^2 S$.

17. Ако V е обемът на тяло F и V_1 е обемът на неговия образ F_1, то $V_1 = |k|^3 V$.

Пример 1. Дадени са окръжност Γ и точка A. Да се определи геометричното място на средата на отсечката AB, когато B описва Γ.
Решение 1. Нека M е среда на AB (вж. Фиг.1).

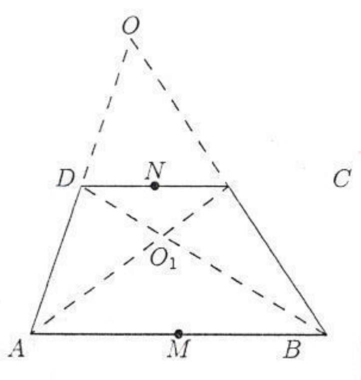


Фигура 1

Да разгледаме хомотетия h с център A и коефициент $\frac{1}{2}$. При тази хомотетия образът на B е M, т.е. $M = h(B)$. Следователно, когато B описва Γ, M описва $\Gamma_1 = h(\Gamma)$, т.е. хомотетичната на Γ окръжност при h.
Забележка. Навярно опитният читател е забелязал, че решението на Пример 1 се различава от традиционните решения на задачи с геометрични места на точки. Това решение не съдържа двете обичайни части, с които доказваме, че описаното в условието множество от точки съвпада с полученото от нас. Така решението на Пример 1 показва едно от предимствата при използване на свойствата на хомотетията (особено 1-4, 7-9 и 11-14). В пример 1 ние използвахме свойство 7.

Разбира се, строгото доказателство на всяко от горните свойства съдържа двете традиционни при решаване на задачи за ГМТ части.

Пример 2. Да се докаже, че във всеки трапец средите на основите, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продълженията на бедрата (Фиг. 2) лежат на една права (Теорема на Щайнер).



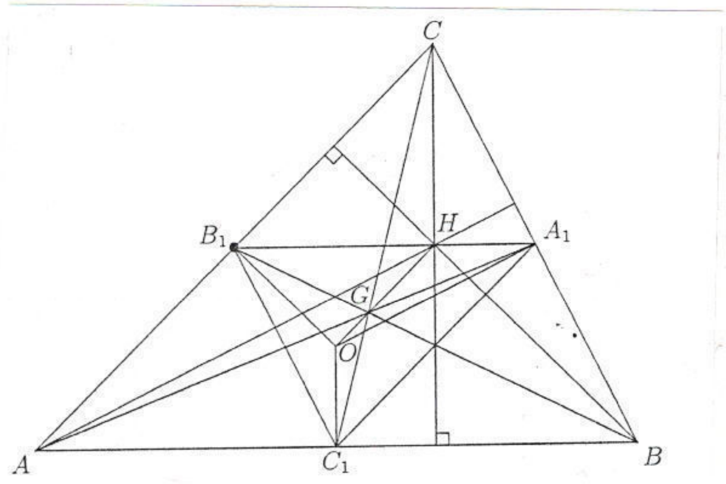
Фигура 2

Решение 2. Нека O е пресечната точка на продълженията на бедрата BC и DA, а O_1 е пресечна точка на диагоналите. Тъй като O_1 е център на хомотетия за отсечките AB и CD, то от Принципа на съответствие следва, че тази хомотетия на средата на едната отсечка съпоставя средата на другата. Следователно M, N и O_1 лежат на една права. Аналогично, O лежи на MN, с което доказателството е завършено.

Пример 3. (Теорема за правата на Ойлер) Да се докаже, че във всеки триъгълник ортоцентърът H, медицентърът G и центърът на описаната окръжност O лежат на една права и

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}.$$

Решение 3. Нека ABC е триъгълник с медицентър G, ортоцентър H и център на описаната окръжност O и нека A_1, B_1 и C_1 са средите на страните BC, CA и AB съответно (Фигура 3).



Фигура 3

От свойствата на медицентъра следва, че хомотетия h с център G и коефициент $-\frac{1}{2}$ изобразява A в A_1, B в B_1 и C в C_1, т.е. триъгълникът $A_1B_1C_1$ е хомотетичен на триъгълника ABC при хомотетия h.

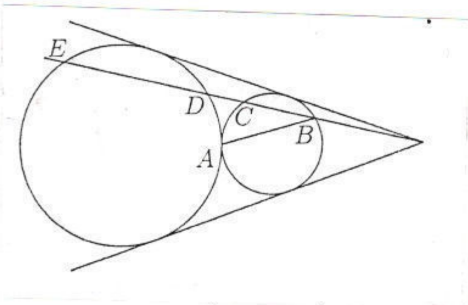
Центърът на описаната окръжност O е пресечна точка на симетралите на страните на триъгълника, които са също и височини в триъгълника $A_1B_1C_1$. Следователно O е ортоцентър на $A_1B_1C_1$ и следователно H се изобразява в O при h. Следователно

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH},$$

с което доказателството е завършено.

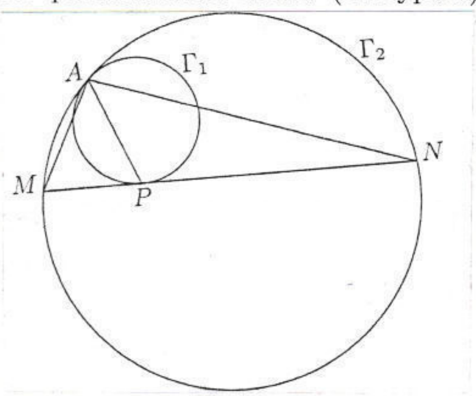
ЗАДАЧИ

Задача 1. Две окръжности се допират външно в точка A. Права през пресечната точка на общите им външни допирателни пресича двете окъжности в точките B, C, D и E в този ред (виж Фигура 4). Да се докаже, че $\angle BAD = 90°$.



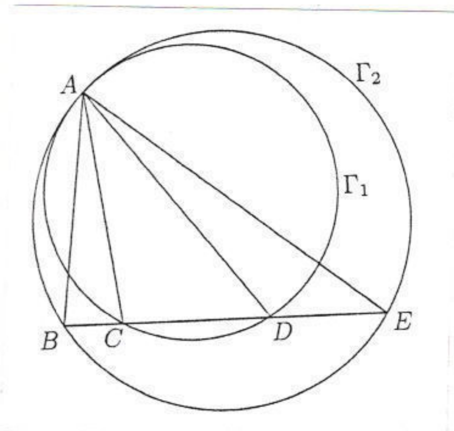
Фигура 4

Задача 2. Две окръжности се допират вътрешно в точка A. Хордата MN на по-голямата окръжност допира по-малката окръжност в точка P. Да се докаже, че правата AP разполовява $\angle MAN$ (Фигура 5).



Фигура 5

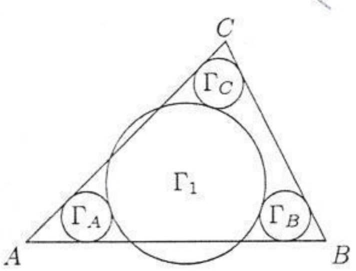
Задача 3. Две окръжности се допират вътрешно в точка A. Права пресича тези окръжности в точките B, C, D и E в този ред (Фигура 6). Да се докаже, че $\angle BAD = \angle CAE$.



Фигура 6

Задача 4. Даден е трапец с основи $AB = a$ и $CD = b$. Да се определи дължината на отсечка, успоредна на AB, която разделя трапеца на равнолицеви части.

Задача 5. В ъглите A, B и C на триъгълник ABC са вписани еднакви окръжности Γ_A, Γ_B и Γ_C съответно. Окръжността Γ_1 се допира външно до Γ_A, Γ_B и Γ_C (Фигура 7). Да се докаже, че центърът на Γ_1 лежи на правата, определена от центровете на вписаната и описаната за триъгълника ABC окръжности.



Фигура 7

Задача 6. Окръжност се допира вътрешно до описаната около равнобедрен триъгълник ABC окръжност и се допира до бедрата му AB и AC в точки P и Q съответно. Да се докаже, че средата на отсечката PQ съвпада с центъра на вписаната в риъгълника ABC окръжност.

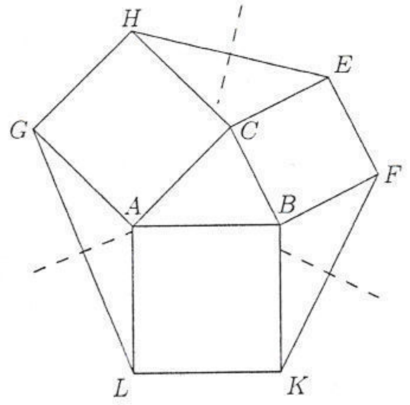
Задача 7. Даден е неравнобедрен триъгълник $A_1A_2A_3$ със страни a_1, a_2, a_3 (страната a_i лежи срещу върха A_i, $i = 1, 2, 3$). За всяко i с M_i е означена средата на a_i, T_i е допирната точка на вписаната в триъгълника окръжност със страната a_i, а S_i е симетричната на T_i точка относно ъглополовящата на ъгъла при върха A_i. Да се докаже, че правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се пресичат в една точка.

Задача 8. Нека Γ_1 е едната от дъгите, на които хордата AB разделя окръжността Γ и нека C е средата на Γ_1. Отсечката CM е нанесена на лъча $\overrightarrow{CP}$ така, че

$$CM = \frac{1}{2}|PA - PB|.$$

Определете геометричното място на M, когато P описва Γ_1.

Задача 9. Квадратите $BCEF$, $CAGH$ и $ABKL$ са построени външно на страните на триъгълник ABC (Фигура 8). Да се докаже, че симетралите на отсечките EH, GL и KF се пресичат в една точка.



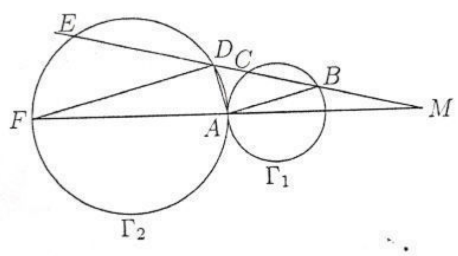
Фигура 8

Задача 10. Лицето на околната повърхнина на пресечена триъгълна пирамида с лица на основите B_1 и B_2 е равно на S. Да се докаже, че ако съществува успоредно на основите на пирамидата сечение, което я разделя на две пресечени пирамиди, във всяка от които може да се впише сфера, то

$$S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2.$$

РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ

Задача 1. Нека Γ_1 и Γ_2 са двете дадени окръжности и нека M е пресечната точка на общите им външни допирателни (M е външният център на хомотетия за Γ_1 и Γ_2). Нека B и C лежат на Γ_1, а D и E лежат на Γ_2 (Фигура 9).

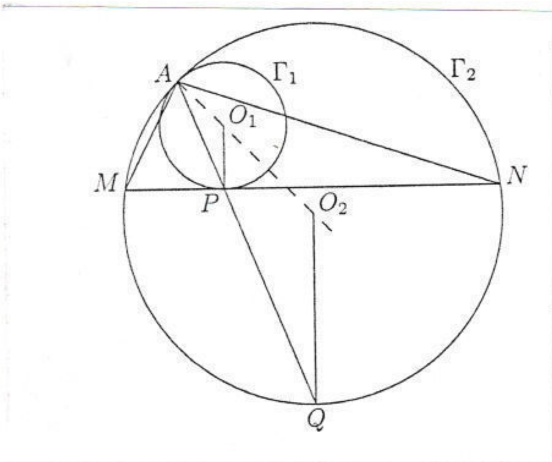


Фигура 9

Нека h е хомотетията с център M, която изобразява Γ_1 в Γ_2. Тогава $h(B) = D$ и $F = h(A)$ е диаметрално противоположната на A точка върху Γ_2 (M, A и центровете на Γ_1 и Γ_2 са колинеарни). Тъй като AF е диаметър на Γ_2, то $\angle ADF = 90°$.

От $h(B) = D$ и $h(A) = F$ следва, че FD се изобразява в AB при разглежданата хомотетия h и следователно $FD \parallel AB$. Но тогава ъглите ADF и BAD са равни, т.е. $\angle BAD = 90°$.

Задача 2. Нека Γ_1 и Γ_2 са съответно по-малката и по-голямата окръжности с центрове O_1 и O_2. Разглеждаме хомотетия h с център A, която изобразява Γ_1 в Γ_2. Нека $h(P) = Q$ (Фигура 10).

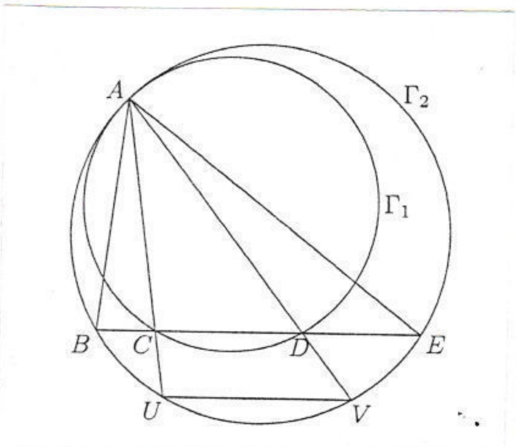


Фигура 10

Тогава $Q = \Gamma_2 \cap AP$. Освен това, $h : O_1 \to O_2$. Тъй като правата O_2Q е образ на O_1P при h, то $O_2Q \parallel O_1P$. Но $O_1P \perp MN$ (P е допирната точка на Γ_1 и MN) и следователно $O_2Q \perp MN$.

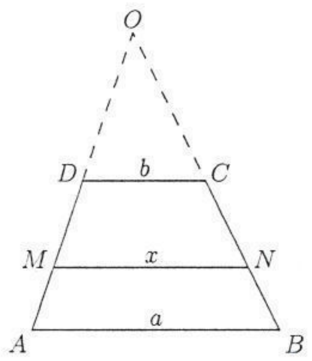
Този резултат води до заключението, че Q е средата на дъгата MN, т.е.правата APQ разполовява $\angle MAN$.

Задача 3. *Упътване:* Разгледайте хомотетия h с център A, която изобразява една от дадените окръжности – например, тази, която минава през C и D – в другата. Нека $h(C) = U$, $h(D) = V$. Тогава U и V са пресечните точки на другата окръжност с правите AC и AD (Фигура 11). Сега използвайте успоредността на BE и UV.



Фигура 11

Задача 4. Нека $AB = a$, $CD = b$, където $a > b$ и $MN = x$ (Фигура 12) е успоредна на AB и разделя трапеца $ABCD$ на равнолицеви части. Нека $O = BC \cap DA$. Триъгълниците ABO, MNO и CDO са хомотетични с център на хомотетия O.



Фигура 12

Следователно, ако означим с F_1, F_2 и F_3 съответно техните лица, имаме

$$F_2 = \frac{x^2}{a^2}F_1 \qquad F_3 = \frac{b^2}{a^2}F_1.$$

Тъй като MN разделя $ABCD$ на равнолицеви части, то

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(F_1 + F_3\right).$$

От горните две равенства получаваме

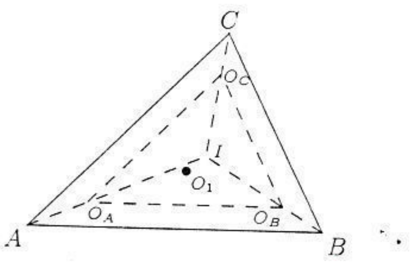
$$\frac{x^2}{a^2}F_1 = \frac{1}{2}\left(F_1 + \frac{b^2}{a^2}F_1\right).$$

Оттук за x намираме

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

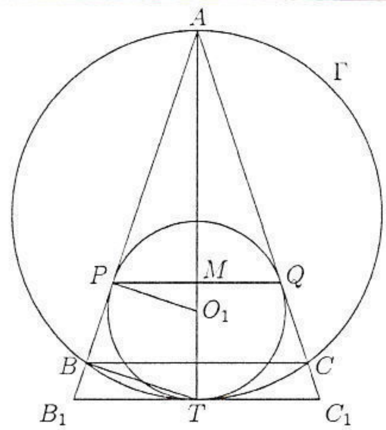
Задача 5. *Упътване:* Нека Γ и Γ_0 са съответно описаната и вписаната окръжност в триъгълника ABC и O, I, O_1, O_A, O_B и O_C са центровете на Γ, Γ_0, Γ_1, Γ_A, Γ_B и Γ_C съответно (Фигура 13).

Забелязваме, че страните на $\triangle O_AO_BO_C$ са успоредни на съответните им страни в $\triangle ABC$. Следователно съществува хомотетия h, изобразяваща $\triangle ABC$ в $\triangle O_AO_BO_C$. Центърът на h е точка I и h изобразява центъра O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ в центъра O' на описаната около $\triangle O_AO_BO_C$ окръжност. Остана да отбележим, че Γ_1 и Γ са концентрични, т.е. $O' \equiv O$.



Фигура 13

Задача 6. Нека Γ е описаната около $\triangle ABC$ окръжност и T е диаметрално противоположната на A точка в Γ (Фигура 14). От равенството $AB = AC$ следва, че триъгълникът ABC и окръжностите са симетрични относно диаметъра AT на Γ. Следователно BC и PQ са перпендикулярни на AT и средата на отсечката PQ, центърът на Γ и центърът O_1 на окръжността Γ_1, която се допира до Γ, AB и AC, лежат върху AT.



Фигура 14

Нека B_1 и C_1 са пресечните точки на допирателната към Γ в T с правите AB и AC съответно. Тъй като $BC \perp AT$ и $B_1C_1 \perp AT$, то $BC \parallel B_1C_1$ и следователо ABC и AB_1C_1 са хомотетични при хомотетия h с център A. Тъй като Γ_1 е вписаната в $\triangle AB_1C_1$ окръжност, то $I = h(O_1)$ е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Нека $\angle BAT = \alpha$. От правоъгълните триъгълници B_1TA и BTA имаме

$$AB = AT\cos\alpha = AB_1\cos^2\alpha.$$

Следователно коефициентът на хомотетията h е равен на $\cos^2\alpha$ и оттук

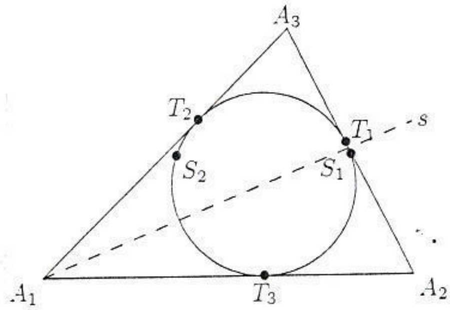
$$AI = AO_1\cos^2\alpha.$$

От правоъгълните триъгълници PO_1A и PMA получаваме

$$AM = AP\cos\alpha = AO_1\cos^2 2\alpha.$$

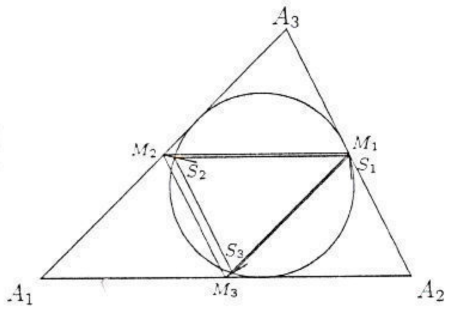
Като сравним последните два резултата заключаваме, че $AM = AI$. Точките M и I лежат на отсечката AT, следователно $M = I$.

Задача 7. Вписаната в $\triangle A_1A_2A_3$ окръжност и $\angle A_3A_1A_2$ са симетрични относно ъглополовящата s на $\angle A_3A_1A_2$. По условие S_1 и T_1 също са симетрични относно s. Следователно дъгите $\widehat{T_3S_1}$ и $\widehat{T_1T_2}$ са равни (Фигура 15). Аналогично, $\widehat{T_3S_2} = \widehat{T_1T_2}$. Следователно T_3 е среда на дъгата $S_1\widehat{T_3}S_2$, откъдето следва, че $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ и така $S_1S_2 \parallel M_1M_2$.



Фигура 15

По същия начин получаваме, че $S_2S_3 \parallel M_2M_3$ и $S_3S_1 \parallel M_3M_1$. Това означава, че триъгълниците $S_1S_2S_3$ и $M_1M_2M_3$ имат съответно успоредни страни, т.е. са хомотетични (Фигура 16). Всяка от правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 минава през центъра на тази хомотетия.



Фигура 16

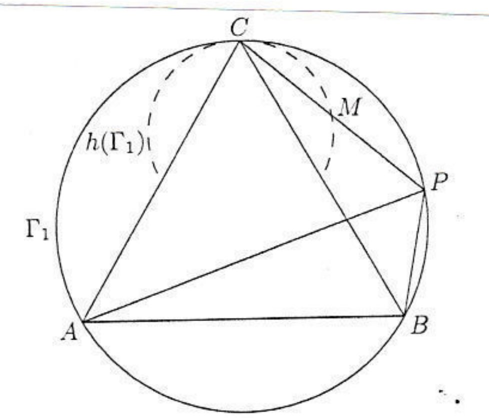
Задача 8. Нека $P \in \widehat{BC}$ (Фигура 17). По теоремата на Птоломей за вписания четириъгълник $ABPC$ получаваме

$$PA.BC = AB.PC + AC.PB.$$

Тъй като $AC = BC$, горното равенство се записва във вида

$$PA - PB = \frac{AB}{BC}PC.$$

Следователно, $CM = \frac{1}{2}|PA - PB| = \frac{AB}{2BC}CP$. (1). Същият резултат се получава и при $P \in \widehat{AC}$.



Фигура 17

Тъй като $AB/2BC$ не зависи от P, равенството (1) означава, че M е хомотетичният образ на P при хомотетия h с център C и коефициент

$$k = \frac{AB}{2BC}.$$

Слеователно, когато P описва Γ_1, точката M описва дъгата $h(\Gamma_1)$, хомотетична на Γ при хомотетия с център C и коефициент k.

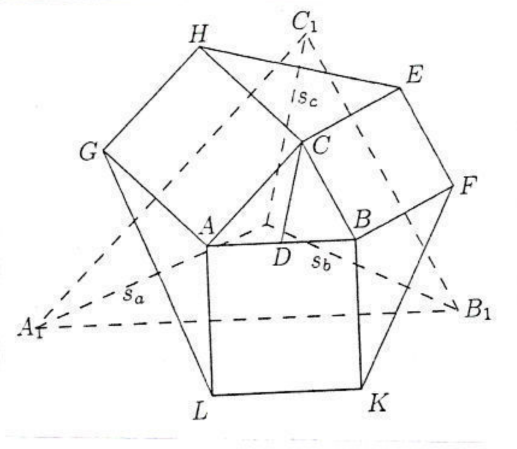
Задача 9. Нека s_a, s_b и s_c са симетралите на отсечките GL, KF и EH съответно (Фигура 18). Разглеждаме триъгълника $A_1B_1C_1$, образуван от симетралите B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 на отсечките CE, AG и BK съответно. Тъй като A_1 е пресечната точка на симетралите на страните AG и AL на $\triangle AGL$, то симералата s_a на третата страна GL на този триъгълник минава през A_1. Аналогично, s_b минава през B_1 и s_c минава през C_1.

Ключът за решаването на тази задача се съдържа във факта, че триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са хомотетични (тъй като страните BC, CA и AB са съответно успоредни на B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1).

Нека CD е медиана в $\triangle ABC$ (Фигура 18). Ще покажем ,че $s_c \parallel CD$, т.е. $CD \perp EH$. Имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EH} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CE}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}\right)\end{aligned}$$

(използвахме, че $CA \perp CH$ и $CB \perp CE$). Триъгълниците AEC и HBC са еднакви и следователно $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CH}$, откъдето $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EH} = 0$. Получихме, че $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{EH}$.



Фигура 18

Следователно $s_c \parallel CD$, т.е. s_c е успоредна на медианата в $\triangle ABC$. Аналогично, s_a и s_b са успоредни на медиани в този триъгълник. Тъй като ABC и $A_1B_1C_1$ са хомотетични, оттук следва, че върху правите s_a, s_b и s_c лежат медианите на $\triangle A_1B_1C_1$. Следователно s_a s_b и s_c се пресичат в една точка.

Задача 10. Ще покажем,че за описана около сфера пресечена триъгълна пирамида с лица на основите B_1 и B_2 и лице на околната повърхнина S, е в сила равенството

$$S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)^2. \tag{1}$$

Наистина ,нека r е радиусът на сферата. Тогава обемът V на пресечената пирамида е равен на $V = \dfrac{1}{3}(B_1 + B_2 + S)\,r$, и в същото време, на $V = \dfrac{1}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1B_2}\right)2r$. Следователно

$$B_1 + B_2 + S = 2\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1B_2}\right),$$

което е еквивалентно на (1).

Нека O е пресечната точка на продълженията на околните ръбове и B_1, B и B_2 са лицата на триъгълниците $A_1C_1E_1$, ACE и $A_2C_2E_2$ съответно. Хомотетията h с център O, която изобразява A_1 в A, изобразява равнината $A_1C_1E_1$ в равнината ACE. Следователно, образът на вписаната в пирамидата $A_1C_1E_1ACE$ сфера е вписаната в пирамидата $ACEA_2C_2E_2$ сфера. Оттук, $h(\triangle ACE) = \triangle A_2C_2E_2$. Тогава

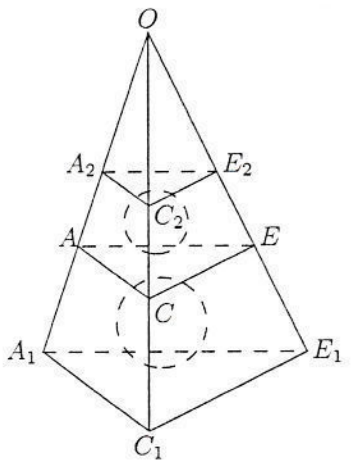
$$\frac{B_1}{B} = \frac{B}{B_2}. \tag{2}$$

Ако S_1 и S_2 са лицата на околната повърхнина на пирамидите $A_1C_1E_1ACE$ и $ACEA_2C_2E_2$ съответно, от формула (1) получаваме

$$S_1 = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B}\right)^2 \qquad S_2 = \left(\sqrt{B} + \sqrt{B_2}\right)^2. \tag{3}$$

От (2) и (3) следва, че

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt[4]{B_1 B_2}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{B_1 B_2} + \sqrt{B_2}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2. \end{aligned}$$



Фигура 19

Подбраните десет задачи и техните решения са насочени за постигане на определени конкретни цели.

Преди всичко те не упражняват самото понятие хомотетия, нито пък детайли около прилагането му. Всичко това трябва да бъде известно на ученика, който ползва пособието МОПС. Той трябва да е добре запознат с всичко онова, което се изучава по планиметрия в училище (и по стереометрия, към която спада последната задача). Трите примера в началото имат за цел да опреснят знанията му и да обърнат внимание върху важни и типични технически детайли.

Важна особеност на тези задачи е, че във формулировките им не става дума за хомотетия. Възможностите за нейното прилагане трябва да бъдат "открити" от ученика. Въпреки че в конкретния случай темата, към която са отнесени задачите, предполага използването на хомотетия, как да стане това и каква именно хомотетия да бъде приложена, е въпрос на нетривиално досещане. Всъщност именно върху това досещане пада ударението във всяка една от десетте задачи, и то ги прави доста трудни, особено последните шест.

И в подборката от задачи, и в техните решения последователно се прокарва идеята, че макар и дефинирана за отделни точки, хомотетията се прилага като трансформация на геометрични фигури. Така се подготвя и почвата за работа на ИУ и с други, по-сложни трансформации, като инверсия и полярни трансформации.

Подборката от задачи осигурява разнообразие от най-често срещаните в приложенията на хомотетията геометрични конфигурации. Така например хомотетията на допиращи се окръжности е застъпена в първите три задачи, а хомотетията на основите на трапец – в четвъртата и в десетата, където хомотетията на основите на пресечена пирамида може да се разглежда като обобщение на случая с основите на трапеца.

Всичко това би следвало да осигури добра подготовка на ИУ, който ползва пособието. Интересът към МОПС служи за потвърждение на тази констатация.

3-6. Дискретна оптимизация: методически проблеми

В пособието MOPS има и още един важен нов елемент. По-точно става дума за ***тематиката с название "дискретна оптимизация"***, която обединява бързо "набъбваща" през последните години група от "олимпиадни задачи". Идеите, върху които са построени задачите от тази група, са типични за съвременната математика, а и изобщо за съвременния научен интерес към ***"оптимални" стратегии, "най-правилно" поведение, "най-добри" решения и др.п***. Успоредно с това в повечето случаи те се формулират с достатъчно прости термини и като постановка са достъпни за учениците. Решаването им изисква доста специфично "досещане" и култивирана интуиция.

Обособяването и третирането им като отделна група от задачи поставя ред методически проблеми.

Най-важният е породен от факта, че самото понятие "дискретно оптимиране" е условно. То обединява идеи и методи, подчинени на – най-общо казано – избор на "оптимален вариант", "оптимална ситуация", оптимална стратегия". За тях е типично комбинирането на понятия и идеи от различни "класически" раздели на математиката: геометрия, теория на числата и др., така че в този случай прилаганият общ подход има разнообразни разновидности и специфики, които са понякога практически уникални. По тези причини съществуващата теория – или по-скоро теории – в тази област са фрагментарни. Затова при задачите от тази област ***формулирането на "универсална рецепта" на този етап изглежда невъзможно; налага се*** в много голяма степен ***да апелираме към аналогии и интуиция.***

Друг важен проблем е породен от факта, че понякога най-съществената част от решението на задача за "дискретно оптимиране" представлява "доказателство чрез пример". Подобни разсъждения са рядкост въобще в практиката на математиците, и още повече са рядкост в "училищната" и "олимпиадната" математика. Затова разделът "Дискретна оптимизация" в MOPS трябваше да бъде построен така, че именно "доказателството чрез пример" да е ясно и отчетливо откроено, читателите не само да го забележат, но и да почувстват важността му, да си изяснят ролята му и да схванат механизмите на конструкцията му. Всичко това трябва да ги доведе до умение да преодоляват други подобни препятствия в решаването на задачи от този тип.

Принципите за подбор на задачите са същите, както при метода на хомотетията, затова не се спираме на тях, а преминаваме направо към реализацията на намерените конкретни решения на описаните по-горе проблеми в цялостното представяне на разработката на темата в MOPS, която привеждаме по-надолу.

3-7. Дискретна оптимизация в пособието MOPS

Споменаването на понятията ***максимизиране и минимизиране*** ще наведе много ученици на мисълта за диференциално смятане, където подходът към екстремумите на функциите с реален аргумент е стандартен. Много оптимизационни задачи обаче са от дискретно естество и при тях подходите са доста различни. В една такава задача, където диференциалното смятане е неуместно, намирането на максимум и минимум може да включва многообразие от методи. Но общата логическа структура на решението най-често е една и съща. За да се докаже минимум или максимум, обикновено се правят следните две стъпки:

1. Прави се и се доказва предположение за горна или долна граница (ограниченост) на дадена функция, след което
2. Намира се стойност на аргумента на функцията (съществуване), за която последната достига граничната стойност от т. 1.

Изказано формално, алгоритъмът за намиране на екстремална стойност на една функция f, дефинирана в дискретното множество S, е следният:

1. Посочва се някаква стойност *M* на f.
2. Доказва се, че *M* е горна (долна) граница на множеството от стойности на f.
3. Показва се, че в S f достига *M*. Т.е. конструира се или се описва точно елемент s от S, такъв, че $f(s)=M$.

Тук S не е непременно числово множество.

Понякога се изисква значително по обем експериментиране и анализиране на задачата, преди да ***бъде разпознат търсеният екстремум***, и след това да се конструира частта от ***доказателството за екстремум***. Тази част от доказателството в някои случаи може да изисква знания и умения от различни клонове на математиката, като теория на числата или теория на графите. Това обикновено е най-трудната част от доказателството. На този етап обикновено е вече известен онзи елемент s от S, за който $f(s)=M$. Да илюстрираме всичко това с решенията на няколко задачи от "Турнира на градовете", направени от Анди Лю в официалната документация на турнира.

Пример 1. В едно кралство живели 32 рицари. Някои от тях са васали на други. Всеки васал има точно един сюзерен и всеки сюзерен е по-богат от всеки свой васал. Рицар, който има поне 4 васали, се нарича барон. Колко най-много барони има в кралството, ако то се управлява по закона: "Васалът на мой васал не е мой васал."?

(Алексей Толпиго, Киев)

Бележка. Задачата не е много трудна. Но е подходяща за илюстриране на случаи, в които същността на задачата може да бъде изяснена с дървовидна диаграма. Читателят скоро ще открие, че търсеният максимум е 7, но тогава идва трудната част: да се опише решението по убедителен начин. Ето го и него:

Решение: *Ограниченост:* Най-богатият рицар не може да бъде васал. Затова най-много 31 рицари могат да бъдат васали. Всеки има най-много един сюзерен. Следователно бароните могат да бъдат най-много 7.

Съществуване: Ще покажем, че може да има 7 барона. Нека 32-та рицари имат различно материално състояние. Да ги номерираме според тяхното състояние от 1 до 32 в намаляващ ред. При $n = 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$ нека рицарят n да е сюзерен на рицарите $n+1, n+2, n+3, n+4$. Хипотезата е изпълнена, тези 7 рицари са барони.

Бележка. Тук практически не се изискват технически умения при "ограничаващата" част от решението. Читателят ще е в състояние да намери и други решения в частта съществуване.

Да разгледаме още една задача, за чиято гранична част ще са нужни някои умения от теория на графите.

Пример 2. Село е построено с формата на квадрат от 9 (3×3) блока, всеки с дължина l. Всеки блок е ограден с асфалтиран път. Какво най-късо разстояние трябва да изминем, ако трябва да тръгнем от единия ъгъл на селото, да преминем по всеки участък от асфалтирания път поне веднъж и да се върнем накрая в същия ъгъл.

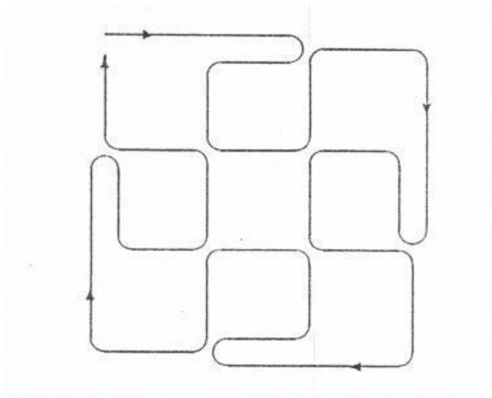
(Московски "математически фолклор")

Бележка. Тук читателят бързо открива, че участъците от асфалтираните пътища са 24 (12 вертикални и 12 хоризонтални), свързващи 16 върха (пресечни точки). Всички опити за намиране на път от 24 части пропадат. Читателят евентуално преоткрива онова, което е открил Ойлер през 18 век, решавайки задачата за седемте моста на Кьонигсберг.

Забелязваме, че има 4 външни възела, във всеки от които завършват по два пътни участъка. Те могат да бъдат посетени по веднъж. Има 4 вътрешни върха, в които завършват по четири пътни участъка, които могат да бъдат посетени двукратно. Но има и 8 възела с по три (нечетен брой) прилежащи пътни участъка. Който влезе в тях, трябва и да излезе. В резултат от нечетния брой пътища се получава загуба на минималност. В най-лошия случай четирите външни пътя, свързващи двойките такива възли, трябва да бъдат преминати двукратно и читателят вероятно ще намери затворен маршрут, удовлетворяващ условието.

Решение. *Ограниченост:* Всеки ъгъл е "край" на два пътни участъка и изисква поне едно посещение. Всеки от оставащите 12 възела е "край" на три или четири пътни участъка и изисква поне две посещения. Затова минимумът на дължината на маршрута е поне $\left(4+12\times 2\right)l=28l$.

Съществуване: Чертежът показва затворен маршрут с точно 28 участъка с дължина l .



Задачи за самостоятелна работа

1. В една държава системата от аеролиниите е такава, че всеки голям град е свързан с най-много три големи града чрез аеролиния и от кой да е голям град може да се стигне до кой да е друг такъв с максимум една смяна на полета. Какъв е максималния възможен брой на големите градове в тази страна? (Всесъюзна МО 1969)

2. Двама играчи A и B играят следната игра: A поставя кръстчета в *n* полета на таблица 4×4(на чертеж 2 е показан пример при *n=7*). После B изтрива кръстчетата от два реда и две колони. Целта му е да изтрие колкото може повече от тях. Намерете най-голямото *n*, за което B може да изтрие всичките кръстчета.

X			
	X	X	
	X		X
		X	X

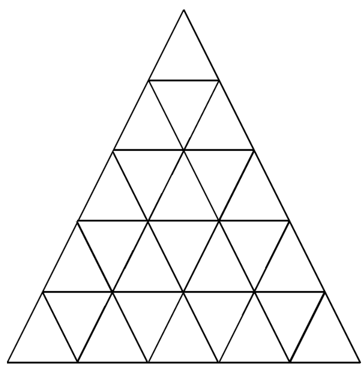
Чертеж 2

3. Намерете минималния брой елементи, които трябва да бъдат премахнати от множеството {2, 3, ..., 1993}, за да може произведението на всеки два елемента от новополученото множество S да не е елемент на S. (Турнир "Черноризец Храбър" 1993)

4. Намерете максималното естествено число n, такова, че измежду някои n последователни естествени числа да няма число, сумата от цифрите на което да се дели на 11. (Московска МО 1961)

5. 20 отбора участват в шампионат. Намерете минималния брой мачове, които трябва да бъдат изиграни за определено време, така че измежду всеки три от тези отбори да има два, които вече са играли един срещу друг. (Всесъюзна МО 1969)

6. Замък има форма на равностранен триъгълник със страна 100 м. Разделен е на 100 триъгълни зали, всяка със страни 10 м. Карта на четвъртина от замъка е показана на чертеж 6. По средата на стената между всеки две съседни зали има врата. Ако посетителите нямат право да минават през никоя зала повторно, намерете максималния брой зали, през които един посетител може да премине. (Всесъюзна МО 1970)



Чертеж 6

7. Шест музиканта участвали в камерен музикален фестивал. На всеки запланувван концерт някои от тези музиканти свирели, докато другите ги слушали като част от публиката. Какъв е минималният брой от такива концерти, които трябва да бъдат запланувани, така че всеки музикант да има възможност да прослуша всички други музиканти като част от публиката. (А. Лю, Канадска МО 1981)

8. Всеки от К приятели научава едновременно с другите една различна новина. Те започнали да си телефонират и да си разказват един на друг всичките новини, които са научили. Всеки разговор продължава точно един час. Какъв е минималният брой часове, които са необходими, за да може всеки от приятелите да научи всичките новини, ако К= А) 64 Б) 55 В) 100.
(А. Анджанс, Рига, Турнир на градовете 1981)

9. Множеството $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ е съставено от естествени числа, не непременно различни, така че $a_1+a_2+\cdots+a_n=100$ и сумата на всеки седем от тях е по-малка от 15. Намерете минималната стойност на *n*, за която такова S съществува. (Московска МО 1972)

10. Намерете максималния възможен обем на правоъгълен паралелепипед с дължина на телесния диагонал $\sqrt{73}$ и квадрати на дължините на ръбовете цели числа. (Н Хаджииванов, Българска МО 1980)

11. (a) на всяко квадратче върху лист с размер 20×20 има войник. Ваня си избира число d и Петя мести войниците на нови квадратчета, така че всеки войник да е преместен на разстояние поне d и на всяко квадратче да има точно един войник. Разстоянието се мери от център до център на квадратче.

За какви d е възможно това? (Определете максималното d измежду тях. Докажете, че е възможно войниците да бъдат преместени на разстояние, не по-малко от d и докажете, че по-голямо такова d няма.)

(b) Отговорете на същия въпрос като в (a) за лист с размери 21×21.
(С. С. Кротов, Москва, Турнир на градовете 1984)

12. Квадрат е разделен на K^2 еднакви квадратчета. Начупена линия, която може да се самопресича, минава през центровете на всички тях. Намерете минималния брой отсечки, съставящи начупената линия. (А. Анджанс, Рига, Турнир на градовете 1982)

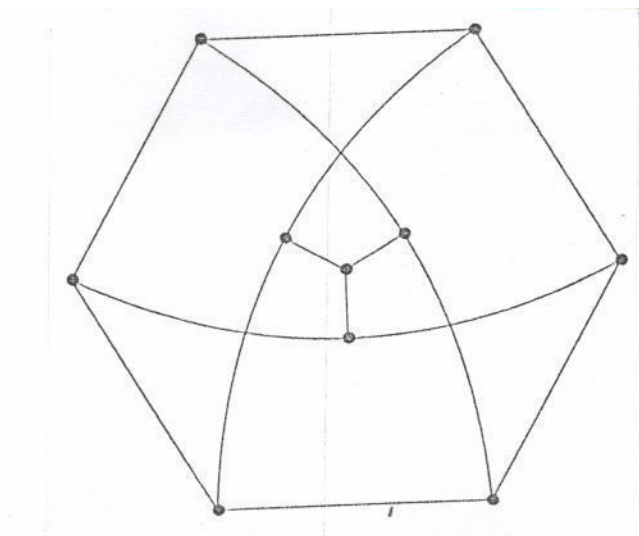
Решения на задачите за самостоятелна работа по темата "Дискретна оптимизация"

1. Ще докажем, че търсеният брой големи градове е 10.

От град А можем да достигнем най-много три други града. От всеки от тях можем да достигнем най-много до два града, различни от А. Затова броят на големите градове в тази страна не надминава 1+3+3.2=10.

Десет би било търсеното число, ако покажем, че в страна с 10 града аеролиниите могат да бъдат организирани по описания в условието на задачата начин.

На чертеж 1 е показано как може да бъде направено това. Градовете са означени с точки.



Чертеж 1.

2. Ще докажем, че 6 е търсената стойност на *n*.

С непосредствена проверка се вижда, че седемте кръстчета от примера не могат да бъдат изтрити от В с един ход по указания начин в условието на задачата. Следователно търсената стойност за *n* е най-много 6. Остава да докажем, че В винаги може да изтрие с един ход 6 кръстчета от таблицата.

Да разгледаме произволно разпределение на 6 кръстчета в таблицата.

Нека a_1, a_2, a_3 и a_4 да бъдат бройките на кръстчетата съответно в първия, втория, третия и четвъртия ред на таблицата.

Нека $a_i \geq a_j \geq a_k \geq a_l$, където (i,j,k,l) е пермутация на (1,2,3,4). Ще покажем, че $a_i + a_j \geq 4$.

Да разгледаме следните три случая за a_k:

Случай 1: $a_k = 0$. Тогава $a_l = 0$ и следователно $a_i + a_j = 6$.

Случай 2: $a_k = 1$. Тогава $a_l \leq 1$ и следователно $a_i + a_j \geq 4$.

Случай 3: $a_k \geq 2$. Тогава $a_i \geq a_j \geq a_k \geq 2$. Следователно $a_i \geq 2$ и $a_j \geq 2$, откъдето $a_i + a_j \geq 4$.

Полученият резултат ($a_i + a_j \geq 4$) подсказва стратегията на B, а именно първо да изтрие редовете с номера a_i и a_j, оставяйки най-много две кръстчета в таблицата, а после, изтривайки две колони, той ще изтрие и тези кръстчета.

Това доказва търсения резултат.

3. Ще докажем, че търсеният минимален брой елементи е 43.

Първо ще покажем, че ако премахнем не повече от 42 елемента от S, множеството $\overline{S}$, което се получава, ще съдържа три елемента, единият от които е равен на произведението на другите два.

Да разгледаме 43 тройки от вида $(n;89-n;n(89-n))$ за $n = 2,3,\ldots 44$, а именно $(2;87;2.87)$,$(3;86;3.86)$,...,$(44;45;44.45)$.

Понеже функцията $f(x) = x(89-x)$ нараства в интервала $[2;44]$, то стойностите на израза $x(89-x);\ x = 2,3,\ldots,44$ са различни и не превишават $44.45 = 1980 < 1993$.

Следователно, ако премахнем не повече от 42 елемента от S, поне една от горните тройки ще остане в $\overline{S}$, а един от елементите ѝ е произведение от другите два. Затова $\overline{S}$ няма да притежава описаното свойство.

Тогава минималния брой елементи, които трябва да бъдат отстранени, е по-голям от 42.

Остава да покажем как да премахнем 43 елемента от S, така че $\overline{S}$ да не съдържа произведението на никои два свои елемента. Да премахнем числата 2,3,…,44. Тогава произведението на всеки две числа от $\overline{S}$ е не по-малко от $45.45 = 2025 > 1993$ и затова не принадлежи на $\overline{S}$.

Следователно минималния брой на елементите за отстраняване е 43 и доказателството е пълно.

4. Ще покажем, че максималната възможна стойност на n е 39.

Тривиална проверка показва, че сумата от цифрите на всяко едно от 38-те последователни цели числа 999981, 999982,..., 1000018 е число, което не се дели на 11. Следователно търсената стойност за n е поне 39.

Остава да покажем, че измежду които и да е 39 последователни естествени числа има поне едно, сборът от цифрите на което се дели на 11. За да постигнем това, достатъчно е да покажем, че ако m е произволно естествено число, сумата от цифрите на което се дели на 11, то измежду следващите след него 39 естествени числа $m+1, m+2, \ldots, m+39$ има поне едно със същото свойство.

Ще разгледаме четири случая:

Случай 1: Ако последната цифра на m не е 0 и предпоследната не е 9, тогава сумата от цифрите на $m+9$ е равна на сумата от цифрите на m и следователно се дели на 11.

Случай 2: Ако последната цифра на m е 0 и предпоследната не е по-голяма от 7, то m и $m+29$ имат една и съща сума на цифрите и затова сумата от цифрите на $m+29$ се дели на 11.

Случай 3: Нека предпоследната цифра на m е 9. Тогава последните две цифри на едно от числата $m_1 = m+1, m_2 = m+2, \ldots, m_{10} = m+10$ са нули. Нека това да е числото $m_k = m+k$; тук $1 \le k \le 10$. Нека M_k да е сумата от цифрите на $m_k = m+k$. Тогава сумите от цифрите на 20-те последователни естествени числа

$$\begin{gathered} m+k, m+k+1, \ldots, m+k+9, \\ m+k+10, m+k+11, \ldots, m+k+19 \end{gathered}$$

са съответно

$$\begin{gathered} M_k, M_k+1, M_k+2, \ldots, M_k+9, \\ M_k+1, M_k+2, \ldots, M_k+9, M_k+10 \end{gathered}.$$

Измежду последните има 11 последователни числа, а именно

$$M_k, M_k+1, M_k+2, \ldots, M_k+10,$$

и затова едно от тях се дели на 11. Тъй като $20+(k-1)<39$, получаваме желания резултат.

<u>Случай 4:</u> Ако последните две цифри на m са 8 и 0, т.е. m завършва на 80, то последните две цифри на $m+20$ са нули. Прилагайки разсъжденията от случай 3 за последователните числа

$$m+20, m+21, \ldots, m+39,$$

заключаваме, че сумата на цифрите на някое от тях се дели на 11.

С това доказателството е завършено.

<u>5.</u> Да предположим, че в даден момент от шампионата измежду всеки три отбора има по два, които вече са играли помежду си. Нека измежду всичките 20 отбора А да е този отбор, който е изиграл минимален брой мачове, който означаваме с *к*.

Да разгледаме множеството S от всичките *к* отбора, с които отбора А е играл, и множеството Σ от останалите $19-k$ отбора, с които А не е играл.

Всеки отбор, в частност и от множеството S, е изиграл поне *к* на брой мачове. Затова отборите от S са изиграли общо поне k^2 на брой мачове.

Да разгледаме мачовете между отборите от множеството Σ. Ако В и С са отбори от Σ, то В трябва да е играл с С, защото иначе нямаше да има нито един мач между отборите А, В и С. Затова всеки отбор от Σ е изиграл мач с всеки друг отбор от Σ (с $18-k$ отбора).

Да припомним, че А, който не принадлежи нито на А, нито на Σ, е изиграл *к* мача.

Затова удвоеният брой на мачовете, изиграни до дадения момент в шампионата, е

$$\begin{aligned} k^2+(19-k)(18-k)+k &= 2k^2-3k+18.19 \\ &= 2(k-9)^2+180 \\ &\geq 180 \end{aligned}$$

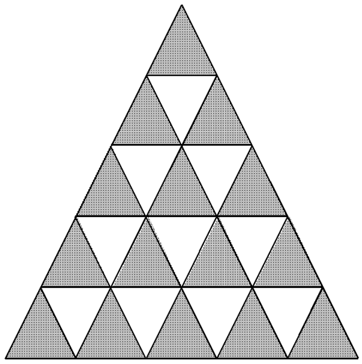
Следователно търсеният брой мачове е не по-малък от 90. За да покажем, че той е точно 90, достатъчно е да вземем предвид следващия пример.

Нека S_1 и S_2 да бъдат две групи от по 10 отбора, участващи в шампионата. Да предположим, че всеки отбор е играл с всички отбори от своята група, и че други мачове не са играни. Тогава общият брой мачове е точно $\frac{1}{2}(10.9+10.9)=90$.

6. Ще решим по-общата задача, когато броят на залите е k^2 вместо *100* $\left(k=1;2;3;\ldots\right)$.

На чертеж 6.2 залите са оцветени в черно и бяло. Черните зали са $1+2+3+\ldots+k=\frac{1}{2}\left(k^2+k\right)$ на брой и тогава броят на белите зали е

$$k^2-\frac{1}{2}\left(k^2+k\right)=\frac{1}{2}\left(k^2-k\right).$$

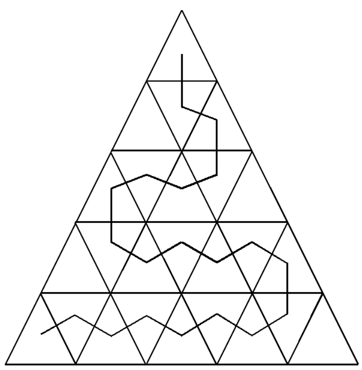


Чертеж 6.2

Вървейки през замъка, посетителите преминават от зала от единия цвят в зала от другия цвят. Посетител не може да влезе в повече от $\frac{1}{2}\left(k^2-k\right)$ бели зали. Следователно не може да премине през повече от $\frac{1}{2}\left(k^2-k\right)+1$ черни зали, или общо зали максимум

$$\frac{1}{2}\left(k^2-k\right)+\frac{1}{2}\left(k^2-k\right)+1=k^2-k+1.$$

Представяме чертеж 6.3, показващ маршрут с точно k^2-k+1 зали при $k=5$, където посетените зали са *25-5+1=21* от общо *25*. Следователно търсеният брой посетени зали е k^2-k+1. В случая за $k=10$ от условието на задачата това прави *91*.



Чертеж 6.3

7. **Решението е съставено от Анди Лю.**

Нека означим музикантите с A, B, C, D, E и F. Да предположим, че концертите са три. Тъй като всеки от шестимата музиканти трябва да свири поне веднъж, трябва поне в един концерт да участват двама или повече музиканта. Например A и B свирят в първия концерт. Но те трябва да свирят отделно един за друг. Например A свири за B на втория концерт, а на третия - B свири за A. На втория концерт трябва C, D, E и F да свирят всичките, защото само тогава B е в публиката. Аналогично всички те трябва да свирят и на третия концерт. Първият концерт не дава възможност на C, D, E и F да се слушат един друг като част от публиката. Затова имаме нужда от поне четири концерта.

Това е достатъчно, ако A, B и C участват в първия концерт; A, D, и E – във втория; B, D и F – в третия, а C, E и F – в четвъртия.

Решение по идея на Асен Велчев (не е включено в МОПС)

Ще покажем, че три концерта не могат да бъдат достатъчни за целта. С наредената двойка (A,B) означаваме, че A слуша B от публиката, защото релацията им е несиметрична. Първия музикант можем да изберем по шест начина, а втория – по пет, или общо по 30 начина можем да избираме наредена двойка. Т.е. общо 30 пъти трябва някои музикант да слуша свой колега. Ако в един концерт участват k музиканта, слушателите-музиканти са $6-k$. Т.е. $k\left(6-k\right)$ пъти музикант е слушал свой колега. Аналогично на втория концерт това се случва $l\left(6-l\right)$ пъти, на третия - $m\left(6-m\right)$ пъти, а сумарно

$$S=k\left(6-k\right)+l\left(6-l\right)+m\left(6-m\right)$$

пъти, и то ако не се случи така, че някой да слуша някого в два концерта. Максимумът на сумата S се достига при максимум на всяко от трите й събираеми. С проверки установяваме, че това става при $k=l=m=3$. Тогава

$$S_{\max}=3\left(6-3\right)+3\left(6-3\right)+3\left(6-3\right)=27.$$

Но 27<30, така че три концерта биха били недостатъчни, т.е. търсения минимален брой концерти е поне четири. По-нататък продължаваме както в предишното решение.

8. Да означим броя на приятелите с m, а минималния брой обмени на информация между тях – с $f\left(m\right)$.

Теорема 1: Ако $m=2^n$, то $f\left(m\right)=n$.

Доказателство: След n рунда може всеки да научи най-много 2^n новини. Затова са необходими поне n рунда. С индукция по n ще докажем, че тези n рунда са и достатъчни. За $n=1$ това е тривиално. Ако е вярно за всяко $k \le n-1$, където $n \ge 2$, ще покажем, че е вярно и за n. За целта ще разгледаме 2^n приятели. В първия рунд те ще си разказват новини по двойки. Да ги разделим за по-нататък в две групи, всяка от които съдържа по един член от всяка от двойките, обменяли новини. Всяка група е от по 2^{n-1} приятели, знаещи всичките новини. Тогава за $n-1$ рунда приятелите от всяка от групите според индукционното допускане ще могат да се запознаят с всичките новини. С това доказателството е завършено.

Теорема 2: Ако $2^n < m < 2^{n+1}$ и m е нечетно, то $f(m) = n+2$.

Доказателство: След n рунда може всеки да научи най-много 2^n новини. Следователно никой не знае всичко. В $(n+1)-$я рунд поне един приятел няма да има с кого да говори, т.к. m е нечетно. Нужен е още поне един рунд, за да научи този приятел всичко. Следователно $f(m) \ge n+2$. Да означим хората с

$$A(1), A(2), \dots, A(2^n), B(1), B(2), \dots, B(m-2^n).$$

Нека $1 \le i \le m-2^n$. В първия рунд $B(i)$ се обажда на $A(i)$. След това $A(1), A(2), \dots, A(2^n)$ знаят всичките новини (състоящи се от m части).

По Теорема 1 n рунда са достатъчни за това всеки от тях да научи всичко. В последния рунд $B(i)$ се обажда на $A(i)$ отново и от него научава всичко. Следователно $f(m) = n+2$.

Теорема 3: Ако $2^n < m < 2^{n+1}$ и m е четно, то $f(m) = n+1$.

Доказателство: След n рунда може всеки да научи най-много 2^n новини. Следователно $f(m) \ge n+1$. Нека $m = 2k$ и $1 \le i \le k$. Да разделим приятелите на две групи от по *к* човека, като ги означим с $A(i)$ и $B(i)$ съответно. За $1 \le j \le n$ нека $A(i)$ се обажда на $B(i+2^{j-1}-1)$. В последния рунд $B(i)$ се обажда на $A(i)$. Ще докажем, че така всеки ще научи всичките m части от новините. Да означим с $g(i)$ двете части новини, произлизащи от $A(i)$ и $B(i)$. Понеже в първия рунд $B(i)$ се обажда на $A(i)$, можем да отъждествим тези два информационни потока.

Твърдим, че след j тура, $1 \le j \le n$, $A(i)$ и $B\left(i+2^{j-1}-1\right)$ ще знаят

$$g(i), g(i+1), .., g\left(i+2^{j-1}-1\right).$$

Ще проведем индукция по j. За $j=1 \Rightarrow i+2^{j-1}-1=i$, а $A(i)$ и $B(i)$ знаят $g(i)$ след първия рунд по дефиниция. Да предположим, че твърдението е в сила за $j-1$ за някое $j: 2 \le j \le n$. Тогава $A(i)$ знае

$$g(i), g(i+1), .., g\left(i+2^{j-1}-1\right),$$

а $A\left(i+2^{j-2}\right)$ знае

$$g\left(i+2^{j-2}\right), g\left(i+2^{j-1}-1\right), .., g\left(i+2^{j-1}-1\right)$$

след $j-1$ рунда. В $(j-1)$-ия рунд $A\left(i+2^{j-2}\right)$ се обажда на $B\left(i+2^{j-1}-1\right)$. Понеже $A(i)$ се обажда на $B\left(i+2^{j-1}-1\right)$ в $j-$тия рунд, двамата ще знаят

$$g(i), g(i+1), .., g\left(i+2^{j-1}-1\right),$$

както твърдяхме.

Следва, че след n-тия рунд $A(i)$ ще знае

$$g(i), g(i+1), .., g\left(i+2^{n-1}-1\right)$$

и $A\left(i-2^{n-1}+1\right)$ знае

$$g\left(i-2^{n-1}+1\right), g\left(i-2^{n-1}+2\right), ..., g(i).$$

Това са 2^n-1 стойности на g с последователни индекси и представят m части новини. Понеже в n-тия рунд $A\left(i-2^{n-1}+1\right)$ се обажда на $B(i)$, то $A(i)$ и $B(i)$ ще знаят помежду си всичко до момента. Тъй като $A(i)$ търси $B(i)$ в последния рунд, имаме $f(m)=n+1$. Следователно:

1. За $m=64,\ n=6:\quad f(64)=6$ по Теорема 1.
2. За $m=55,\ n=5:\quad f(55)=7$ по Теорема 2.
3. За $m=100,\ n=6:\quad f(100)=7$ по Теорема 3.

9. Ще докажем, че търсената стойност на n е 50.

Първо ще покажем, че ако $n \le 49$ и е изпълнено второто условие, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 100,$$

което противоречи на първото условие.

Нека $n = 49$. Тогава

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \ldots + a_7 \le 14 \\ & a_8 + a_9 + \ldots + a_{14} \le 14 \\ & \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \\ & a_{43} + a_{44} + \ldots + a_{49} \le 14. \end{aligned}$$

Сумирайки почленно, получаваме

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} \le 98,$$

което трябваше да докажем.

За $n < 49$ постъпваме аналогично. Тогава търсеното $n \ge 50$ и за да докажем, че $n = 50$, остава да означим с S множеството от числата $a_1 = a_2 = \ldots = a_{50} = 2$. Очевидно така са удовлетворени и двете изисквания от условието. Следователно $n = 50$ е решението на задачата.

10. Нека P е правоъгълен паралелепипед с максимален обем, удовлетворяващ следните две условия:

1. Дължината на телесния му диагонал е $\sqrt{73}$.
2. Квадратите от дължините на диагоналите му са цели числа.

Да означим ръбовете на P с x, y, z, обема му – с V, а x^2, y^2, z^2 - съответно с u, v, w. Тогава

$$\left| \begin{aligned} & u + v + w = x^2 + y^2 + z^2 = 73 \\ & uvw = x^2 y^2 z^2 = V^2 \end{aligned} \right.$$

Без ограничение на общността приемаме, че $w \le v \le u.$ Ще докажем, че $u - w = 1$.

Да допуснем, че $u - w \ge 2$. Означаваме

$$u_1 = u - 1,\ v_1 = v,\ w_1 = w + 1.$$

Да разгледаме правоъгълен паралелепипед P_1 с ръбове

$$x_1 = \sqrt{u_1},\ y_1 = \sqrt{v_1},\ z_1 = \sqrt{w_1}.$$

Но тогава

$$x_1^2 = u-1,\ y_1^2 = v,\ z_1^2 = w+1,$$

а x_1^2, y_1^2, z_1^2 са цели числа и следователно P_1 удовлетворява условие 2. Също

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= u_1 + v_1 + w_1 \\ &= (u-1) + v + (w+1) \\ &= u + v + w \\ &= 73, \end{aligned}$$

т.е. P_1 удовлетворява и условие 1. Ако обемът на P_1 е V_1, то

$$V_1 \le V \ \Rightarrow\ V_1^2 \le V^2;$$

оттук

$$\begin{aligned} uvw \ge u_1 v_1 w_1 &= (u-1)v(w+1) \\ &= uvw + uv - vw - v, \end{aligned}$$

т.е. $u \le w+1$, което противоречи на допускането. Следователно

$$u \le w+1 \text{ и } w \le u.$$

Понеже u, v, w са цели числа, то $u = w$ или $u = w+1$. Но $u = v = w = \dfrac{73}{3}$ не са цели числа. Следователно $u = w+1$.

Остава да разгледаме два случая: $v = w$ или $v = w+1$.

1. $v = w$. Тогава $73 = u + v + w = w + 1 + w + w = 3w + 1$, откъдето $v = w = 24, u = 25$. В този случай $V = \sqrt{25.24.24} = 120$.

2. $v = w+1$. Това води до $73 = 3w + 2$, което няма цяло решение. Следователно търсеният обем е 120.

11. **Решение на Анди Лю.**

(a) Нека центровете на квадратчетата да са $(i, j), 1 \le i, j \le 20$. Войникът от (11,11) може да отиде най-далече до (1,1). Следователно максималната стойност на $d_{\max} = 10\sqrt{2}$. Ще покажем, че това е постижимо. Дефинираме $\bar{i} = \begin{cases} i+10, & ako\ i \le 10 \\ i-10, & ako\ i \ge 11 \end{cases}$ и аналогично $\bar{j}$. Тогава $\bar{i}, \bar{j}$ са определени еднозначно и $1 \le \bar{i}, \bar{j} \le 20$. Преместваме войника от (i, j) на $(\bar{i}, \bar{j})$. Тогава на всяко квадратче ще има войник и всеки ще бъде преместен точно на разстояние $10\sqrt{2}$.

(b) Нека центровете на квадратчетата да са $(i,j), 1 \le i,j \le 21$ и отново $d_{\max} = 10\sqrt{2}$. Войниците вътре в квадратчетата 20×20 местим по същия начин като в (a).

Войника от (1,21) местим на (21,21), този от (21,1) – на (1,21). Всяко такова движение е на разстояние $20 > 10\sqrt{2}$.

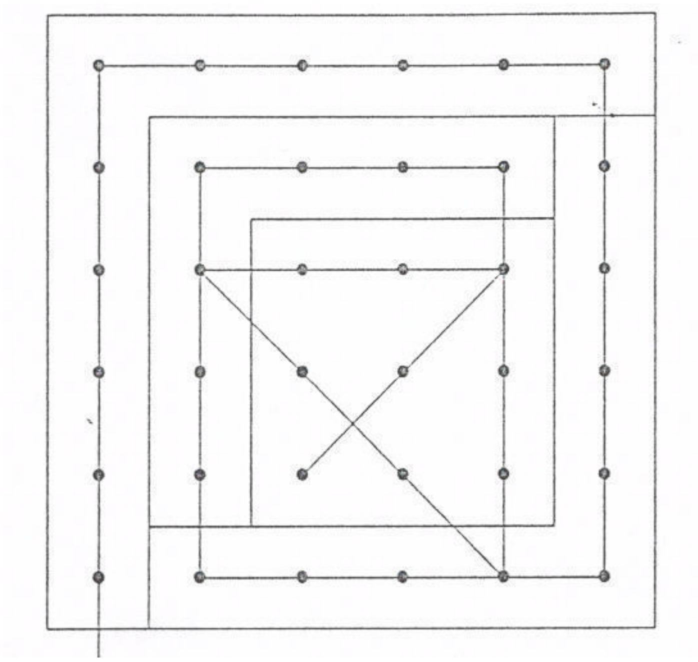
Накрая, нека за $2 \le k \le 20$ войниците от (*к*,21) и (21,22-*к*) да си разменят местата. Всяко такова движение е на разстояние

$$\sqrt{(21-k)^2 + (1-k)^2} = \sqrt{2(22-k)^2 - 42}$$
$$\ge \sqrt{2.11^2 - 42} = 10\sqrt{2}.$$

12. **Решение на Анди Лю.**

Случаите за $k = 1; 2$ са тривиални. Те изискват съответно 1 и 3 отсечки. Твърдим, че за $k \ge 3$ са необходими и достатъчни $2k - 2$ отсечки.

Достатъчността се вижда от чертеж 12, който може да бъде продължен стъпаловидно. За $k = 3$ и 9 центъра съответно отсечките са 4. Когато *к* расте с 1, към начупената линия се добавят още по две отсечки.



Чертеж 12.

Сега ще докажем необходимостта.

Да разгледаме начупена линия с минимален брой отсечки, минаваща през всички центрове на масива $k \times k$. Да предположим, че има h хоризонтални отсечки. Не може $h = k$, защото са нужни още поне *k-1* съединителни отсечки. Не може и $h = k - 1$, защото ще останат *к* непокрити центъра на квадратчета, за които са ни нужни *к* вертикални отсечки да ги покрием. Следователно $h \le k - 2$.

Изпъкналата обвивка на центровете, непокрити с хоризонтални отсечки, съдържа точно $2k + 2(k - h - 2)$такива центрове по своя контур. Всяка нехоризонтална отсечка може да покрие най-много два центъра, така че са нужни $2k - h - 2$ такива отсечки. Следователно трябват поне $2k - 2$ отсечки, което искахме да докажем.

По начало в темата "дискретна оптимизация" присъства един елемент, който е чужд на идеите и методите, представени в училищния курс по математика. Докато в училище се разглеждат и изучават максимуми и минимуми на функции, дефинирани в някакво множество (интервал) от числа, тук функциите, които се използват за моделиране на конкретни ситуации, са дефинирани върху друго – "дискретно" – множество. Например в задача 6 това е множество от "маршрути", преминаващи през залите на описания в условието хипотетичен "замък". Ясно е, че в тази ситуация всички стандартни методи, които учениците знаят за минимум и максимум на числови функции, "не работят".

Подбраните задачи (12 на брой) преди всичко илюстрират (но не изчерпват) разнообразието на възможните дефиниционни множества на "моделиращите функции".

Решенията в МОПС насочват ИУ към двата елемента, съставящи логическата структура на "типичното решение" на задача от дискретно оптимиране: 1) ограничаване с неравенство (фактически посочване на евентуалния екстремум), и 2) доказателство (чрез пример) на достигане на равенство в неравенството.

Тази структура е много обща, но ИУ трябва да изработят у себе си навик да не "пропускат" никой от тези два елемента, или пък да оставят неизяснени детайли.

Задачите от темата "дискретна оптимизация" понякога подвеждат. Те изглеждат чудновати, едновременно елементарни и като че ли "невъзможни" за решаване с математически методи. Всъщност обаче именно тази особеност е характерна за много от съвременните клонове на математиката, затова като цяло темата е и актуална, и перспективна от гледна точка на "учебното съдържание" на обучението на изявените ученици.

§ 4. Изводи, експерименти и оценки

В § 2 на тази глава бяха анализирани два аспекта от работата на Кореспондентния кръжок, които според мен имат много важно значение за за мотивацията на изявените ученици при подготовката им по математика: ***"диалоговият режим на работа"*** и ***насоката към обобщения***.

Първият вече е широко разпространен в практиката. Вторият обаче е все още актуален.

Поставяйки ученика в ***типична за професионалния математик ситуация, когато той трябва да "открие" нова теорема***, ние откриваме пред него нови хоризонти, а с това и нов тип предизвикателства, нови, много по-широки възможности за творчество.

Подобни елементи наблюдаваме при работата с реферати, и там те също дават добри резултати. Изводите от анализа в § 2 са, че се препоръчва съзнателно ***култивиране у изявените ученици на стремеж за обобщения*** и използването му за засилване на тяхната мотивация.

Във връзка с методическата концепция в пособието МОПС и реализацията й възниква логичният въпрос за тяхната целесъобразност, по-точно казано, доколко те имат някакви предимства пред други сходни пособия за изявени ученици, изградени на други принципи?

Основа за такава преценка служи използването на пособието в практическото обучение на изявените ученици, което играе ролята на непосредствен експеримент. Пособието е издадено от частно сдружение на австралийски математици, така че търсенето му се диктува главно от качествата му, в зависимост от ползата, която имат от него ученици, учители и специалисти. Англоезичната литература с подобна тематика е доста богата и затова конкуренцията в тази област е силна. При тези обстоятелства издадената през 1996 г. първа част на пособието бързо се изчерпи, направена беше допечатка, която също свърши, а през 2002 г. се осъществи и второ издание, с някои допълнения. МОПС е едно от най-печелившите издания на сдружението. Мисля, че това е добра експериментална проверка на концепцията и реализацията на МОПС.

Косвена оценка за теоретичните качества на МОПС има в привличането ми в Редакционната колегия на серията за извънкласна работа на австралийското математическо сдружение "Australian Mathematics Trust".

Четвърта глава

Задачите за състезания като инструмент за изследвания

По ред причини досега в България сравнително малко се е писало за изследванията в математическото образование, а това е тема, която засяга важни и от съвременна гледна точка мирогледни въпроси. В същото време в чужбина има обширна литература, която третира проблематиката на изследванията и която отразява продължителната и целенасочена работа, творчески постижения и неудачи, истински научни „находки“.

Азбучна истина е, че познаването на детайли и аспекти от работата на учениците е необходимо условие за усъвършенстване на процеса на обучение. И тъй като изявените ученици имат ред специфични особености в сравнение с “обикновените”, те трябва да бъдат обект на отделни, специализирани изследвания.

Но и в България, и в чужбина *изследванията в обучението на изявените ученици са изолирани и фрагментарни*. В светлината на тази констатация важни стъпки са направени от С. Гроздев (*Гроздев* 2002). Получените от него резултати обогатяват теоретичните основи на методиката на подготовката на ученици за математически състезания и отварят път за създаване на приложни разработки.

В тази глава са представени концепцията, провеждането и резултатите от едно изследване на съвкупността от изявените ученици в България. То се базира на резултатите от проведено състезание – турнира “Черноризец Храбър”.

В предишните глави подробно е аргументирана тезата, че задачите за състезания фокусират и отразяват практически всички проблеми от обучението на ИУ. Затова е естествено чрез решенията на задачите да получим представа за личностните характеристики на самите ИУ.

Математическите състезания чрез представените от участниците решения дават добра база данни, от която при прилагане на подходяща методика може да се извлече разнообразна информация. А именно събирането на обективна информация е ключов момент в провеждането на всяко изследване.

Участниците в математическите състезания са мотивирани да положат максимум усилия за решаване на задачите. Те дават всичко, на което са способни. Практически не се срещат случаи на несериозно отношение. Затова техните решения са обективен източник на информация, и главно от концепцията и методиката на изследването зависи доколко точни са направените изводи.

Изследването, или "*измерването на рисковото поведение*" на ИУ, което е представено в тази глава, стъпва на традициите на световната практика на изследванията в математическото образование. Имаме основание да считаме, че неговата концепция, начин на провеждане, осмисляне на детайлите и обосновка на изводите са на най-високо съвременно ниво.

§ 1. Изследвания в математическото образование

Комитетът по изследвания в образованието към Националната академия по образование в САЩ определя изследването като *„стройно и систематично събиране на сведения за дадено събитие или събития с цел подпомагане или потвърждаване на научна информация*", (*Gronbach, Suppes*, 69). Именно стремежът към стройност и систематичност е водещ принцип за представеното по-долу измерване.

Изследванията в математическото образование имат своята специфика във формулирането на проблемите, в методите на провеждането и в интерпретирането на резултатите. В известен смисъл те могат да се възприемат като серии от опити в химията и биологията. За разлика от "чистата математика" в тях присъстват приблизителност, нееднозначност при интерпретирането на резултатите, а понякога и в самите формулировки. В повечето случаи получените резултати имат приблизително същата степен на адекватност с действителната ситуация, каквато е характерна, например, за социологическите проучвания, изследванията на общественото мнение и т.н.

За да отговори на поставените цели, изследването трябва да има широка теоретична основа. Това необходимо условие е разбираемо. Първо, теорията е средство за обяснение на наблюдаваните процеси и явления. Второ, тя дава възможност на изследователя да направи изводи относно съществуващи връзки между субектите и процесите, в които те участват. Трето, теорията осигурява структуриране на изследването — формулиране на хипотези, избор на вида, методите и средствата на изследване, определяне на съществените характеристики и отношения. Изборът на подходящ пример може да покаже дали изследването е правилно теоретично ориентирано.

Изследванията създават *уместни и приложими теории*, които увеличават възможностите на изследователи и учители да открият реални решения, отнасящи се до преподаването и усвояването на учебния материал.

Както трябва да се очаква, *теориите се модифицират*, променят и даже отхвърлят въз основа на постоянно променящото се познание и опит. Серия от проучвания може да доведе до разработване на нова теория или обучаваща стратегия, която в началото на практическото си приложение е много ефективна. Но допълнителните проучвания могат да разкрият непълнота в направените изследвания, а опитът да покаже, че продължителното ѝ прилагане не е уместно (*Shulman & Elstein* 1975).

Приема се, че предмет на изследването в обучението по математика са преподаването и усвояването на математически знания, отношенията между тях и математическото познание, дидактическите ситуации, социалната роля на математиката и обучението по математика, системата на обучение сама по себе си и др.

Балачев, Хаусън, Сфард, Стейнбринг, Килпатрик и Серпинска (*Balacheff, Howson, Sfard, Steinbring & Sierpinska* 1993) предлагат класификация на възможните цели на едно изследване в математическото образование в две основни направления: практически цели и фундаментални научни цели. Към практическите цели се отнасят преподавателският опит, качественото усвояване на математически знания и тяхното прилагане от обучаемите. Фундаментална научна цел е например развитието на обучението по математика като една широка област за изследване. От тази гледна точка изследването на рисковото поведение на изявените ученици, представено тук, следва да бъде отнесено към второто направление.

Съобразно с училищните нужди и лични теоретични стремежи Бигъл и Уилсън (*Begle & Wilson* 1970) предлагат целите на изследването да са групирани около следните общи *стратегически линии*:

а) създаване на *обща теория* на обучението по математика;

б) разработване на *модели за вземане на решения* при наличие на алтернативи;

в) разработване на *образователни програми, учебни материали, тестове за проверка* на усвоените знания (*Bauersfeld* 1979);

г) оценяване на обучаващи процедури, програми и материали от гледна точка на тяхната образователна полза;

д) *разработване и усъвършенстване на средствата за извършване на нови изследвания*.

В рамките на тази класификация изследването на С. Гроздев в (*Гроздев* 2003) може да се характеризира като насочено към създаване на *модел за вземане на решения* при подготовката на изявените ученици, а изложените тук в трета глава изследвания по своята обща стратегическа линия може да бъдат отнесени към разработване на *образователни програми, учебни материали, тестове за проверка* на усвоените знания.

За разлика от тях изследването на корелацията на задачите в тест, представено във втора глава, представлява пример за *разработване и усъвършенстване на инструментариума за извършване на нови изследвания* – и по-специално на изследвания, свързани с дискриминационния фактор на задачи в тест. Елементи на разработване и усъвършенстване на средствата за изследване присъстват и в изложеното измерване на трудността на задачите в Турнира "Черноризец Храбър", а също така и в измерването на рисковото поведение, към което пристъпваме. Необходимо е да отбележим обаче, че това по своите стратегически измерения това изследване надхвърля очертаните по-горе рамки, тъй като се отнася не само за връзките на изявените ученици с обучението им, а донякъде има отношение и към цялостното им поведение като своеобразна "*социална група*".

Според Комитета по изследвания в образованието към Националната академия по образование в САЩ *най-значимата характеристика на едно изследване е неговото качество* (*Gronbach, Suppes*, 69). С оглед на тази оценка именно осигуряването на качеството на измерването на рисковото поведение, представено в тази глава, е обект на специално внимание.

§ 2. Рискът при учениците с математически способности

В този параграф е представено изследване на "поемането на риск" от учениците с математически способности. Резултатите от него са описани в предстояща публикация на Д. Павлов, Е. Келеведжиев и Й. Табов.

С навлизането в новото столетие все по-ясно се очертават контурите на т.нар. "информационно общество". Най-различни са характеристиките, с които се определя неговата специфика. От информационна пренаситеност например, до рязко повишаване на възможностите на отделния човек. Не случайно се твърди, че ако отминалия век е време на масите, то сегашното е "век на личността". От тук произтичат цяла поредица от проблеми, свързани с подготовката за живот, формирането и развитието на нова система от личностно ценни качества, с образованието като цяло.

Ключовите думи на прехода се свързват със: самостоятелност, действеност, инициативност, ориентация в сложна многофакторна среда, устойчивост в хаоса, бързина на реакциите, умения за взимане на решения, стратегии на поведение в конфликтни ситуации, ясно дефиниране на целите, системи за измерване, умения за анализ и синтез, чувство за лична отговорност, умения за риск, за личностна изява, конкуретноспособност, услужливост на мисълта, бърза концентрация, преход от една област в друга, нестандартно мислене, оригинално хрумване и т.н.

2-1. Избор, риск и рисково поведение

Етимологично думата "риск" произлиза от френски (risque), което означава: възможна опасност; действие наслуки с очакване на успех; възможна загуба при търговска сделка; опасност срещу която може да става застраховане. Глаголът "рискувам" (Фр.- risquer) се свързва с: подхвърлям на опасност; подхвърлям се на опасност от неуспех; пробвам; опитвам (Милев, А. и др., 1958).

Поемането на риск се определя още като: "1. Спонтанно действие, извършено от индивида без предварително обмисляне или 2. Действие, предизвикано от увереност, че вероятността индивидът да остане здрав и да е в безопасност е твърде висока" (Keinan,1984).

В общественото мнение е прието убеждението, че мъжете имат рисково поведение в по-голяма степен от жените. Най-често това се обяснява с традиционното приписваните склонности на мъжете към смелост, самоувереност, независимост, решителност, твърдост, състезателност, упорство и т.н.

С развитието на демократичните процеси у нас, непрекъснато нарастват възможностите за избор пред човека. Действително свободен е този, който има правото и възможността да избира. Не всеки личен избор в една или друга степен е специфичен риск. От една страна са необходими достатъчно основания и гаранции за правилния, верния, търсения, желания избор. От друга страна всеки личен избор е в пряка зависимост от развитието на чувството за отговорност. От трета стана е цената на възможната, вероятната, очакваната грешка и породения на тази основа, страх от нея.

Рискът е сложно обусловено явление. То зависи от практически неограничен брой фактори. Много често рискът се свързва с умението за допускане на компромиси в един свят, в една действителност с прогресивно намаляваща сигурност, където всяко решение е относително точно или неточно, правилно или неправилно. Тоталната неопределеност най-елементарно се характеризира с това, че никога не знаем когато постигаме нещо, какво пропускаме в своя ограничен във времето живот.

2-2. Тестове и риск

Педагогическите възможности и ограничения на тестовете "с избираем отговор" са многостранно изследвани и подробно описани в педагогическата литература. До сега много малко внимание е отделено на проблема за риска и неговото формиращо въздействие върху ученици, студенти, специализанти, докторанти при всякакви изпити и като частен случай, при работа с тестове с избираем отговор.

При някои ученически състезания (по математика, химия, физика) се използват именно такива тестове. Съществуват правила, по които се формулират въпросите и възможните отговори в зависимост от мисията, целите, ценностите, оценяването, както и как се оценява, какъв е модела на оценяване (формиращо, сумативно, критерийно, нормативно, сортиращо и т.н.), какви са очакваните, желаните последици от оценяването и т.н.

Много често възникват дискусии около това как да се оценява пропуснатия и избора на неверен, грешен отговор. Когато те се отчитат по един и същи начин практически се стимулира отгатването, случайния избор, хазартното поведение. То особено ярко проличава при недостатъчно добре развитото чувство за отговорност и слаба мотивация. Затова в практиката се прилага оценяване, при което се дават наказателни точки за всеки неверно посочен отговор, а въздържанието от отговор не се наказва. Този подход има за цел да повиши точността на оценяването чрез премахване до голяма степен на случайния елемент, получаван от опитите да се отгатва. Предполага се, че участникът, който знае верния отговор без колебание ще го посочи еднозначно. Този, кото няма необходимата подготовка – ще се въздържи от поведение както в игра за отгатване. (Rowley and Leder, 1989)

При приемането на всяка подобна теза не могат да се пренебрегват поне две съществено важни обстоятелства:

Хората са различни. Персоналните особености влияят върху факта, дали наистина участниците ще прилагат отгатването, когато оценяването по точки показва че така не бива да се постъпва (Gronlung 1976, Mehrens and Lehmann 1991)

Изключването на възможността за отгатване изцяло, в крайна сметка ограничава участниците да използват отгатването като метод за решаване на някои от задачите. Плътното затваряне на вратата за всяка грешка елиминира и възможността да се стигне до истината.

2-3. Специфика на изследваната съвкупност от ученици

Ще напомним, че турнирът "Черноризец Храбър" е българско математическо състезание за ученици, което се провежда във формата на тест, състоящ се от въпроси (задачи) с избираем отговор. През 2002 г. участниците бяха разделени на 5 възрастови групи: 3–4 клас, 5–6 клас, 7–8 клас, 9–10 клас и 11–12 клас. За всяка от тях имаше отделен тест и в него задачите бяха подбрани (по учебен материал и трудност) в съответствие с възрастта на участниците. Броят им варираше от 15 за най-малките до 30 за най-големите. Времето за работа на всички беше еднакво - 90 минути.

В "Черноризец Храбър" участват голяма част от учениците в България, които бихме могли да определим като "носители на повишени математически способности" и от статистическа гледна точка може да бъдат разглеждани като представителна извадка, която е поне 15-20 % от цялата изследвана съвкупност.

Състезателите са мотивирани за участие. За много от тях това е отлична възможност за лична интелектуална изява. Освен това фактът, че всеки участник в Турнира трябва да внесе такса за правоучастие (понякога осигурявана от училището или спонсор, но в повечето случаи от родителите) повишава тяхното чувство за отговорност. Ясно е, че при липса на интерес у учениците е по-лесно и по-просто те да пропуснат Турнира.

По дългогодишна традиция в България състезателите работят старателно и правят каквото е по силите им, за да постигнат по-висок резултат. Поради това в много голяма степен те не проявяват небрежно отношение или безотговорност. Тази особеност прави резултатите от тестовете ценен източник на информация, от която при задълбочен анализ могат да се извличат изводи с голяма достоверност.

Основният обект на настоящото изследване е "поемането на риск" от учениците с математически способности (за тази група ученици състезателите в Турнира играят ролята на представителна извадка). Резултатите от него са описани в предстояща публикация на Д. Павлов, Е. Келеведжиев и Й. Табов.

Разбира се, тук не става дума за въвеждане на някаква количествена скала, която да отчита това действие в отделни (индивидуални) случаи, а за възможност да се направи сравнение на средното "поемане на риск", характерно за момичета, с това на момчетата, в отделните възрастови групи.

2-4. Специфика на тестовете в Турнира "Черноризец Храбър"

Използва се една важна особеност на тестовете, прилагани в Турнира: принцип за оценяването им е "присъждане на глоба" за грешен отговор. Казано по-точно, при оценяването се прави разлика между посочването на грешен отговор и непосочването на отговор. Според практиката на Турнира за грешен отговор по дадена задача се присъждат 0 точки, а за въздържане от отговор ("празен" отговор) участникът получава три точки.

За информация може да се добави, че задачите са разделени в три групи по трудност (в теста за 11–12 клас например обикновено има около 10 "леки", 10 "средни" и 10 "трудни" задачи) и за всеки верен отговор на задача участникът получава съответно по 5, 7 или 9 точки в зависимост от трудността. "Наказанието" от три точки е подбрано така, че систематичното използване на "отгатването" води до губеща стратегия за получаване на повече точки. Затова като по правило участниците в Турнира се придържат към стратегията да нанасят само отговори на решени задачи, когато са убедени във верността им.

2-5. Анализ на риска при тестовете

Статистически погледнато, белег за "поемането на риск" се приема преди всичко посочването на грешни отговори и до известна степен по-малкия брой оставени без отговор задачи. Основание за това служи следният аргумент:

Когато участникът в състезанието реши дадена задача, той посочва верния отговор. Когато обаче не може да се справи с нея, пред него се изправя дилема: дали да посочи някой отговор, за който той предполага, че вероятно е верен, или да се въздържи от отговор? Ако избере да нанесе отговор, участникът рискува при грешка да бъде "наказан" с 3 точки, които той губи в сравнение с "въздържане" от отговор. Веднага трябва да се отбележи, че посочването на грешен отговор може да бъде резултат от поемане на риск с различен характер. То може да бъде предизвикано от някой от следните фактори:

Поемане на риск при неувереност или колебание.

Поемане на риск при чисто "отгатване" на отговора.

Грешка в решението на задачата (например в резултат на несигурни знания и/или лоша концентрация); труден тест, при който е естествено да се направят повече грешки.

Изследването е насочено предимно към първите две от посочените хипотези. За целта се анализират внимателно влиянието на всеки от горните фактори при конкретните резултати от теста, проведен на 1 ноември 2002 г.

Като се има предвид изследваната група от ученици, към която спадат участниците в Турнира – учениците с повишени математически способности, почти без изключение силни и амбициозни, и като отчетем мотивацията им – желанието да се представят колкото е възможно по-добре, можем да считаме, че "чистото отгатване" на отговора е сравнително по-рядко явление, отколкото отгатването при неувереност или колебание. Освен това, може да се предполага, че честотата на появата му е приблизително пропорционална на честотата на появата на отгатване при неувереност или колебание.

Затова може да се обединят първите два фактора, приемайки, че първият е водещ и по-ясно изразен. Типичната ситуация, в която той се проявява, е когато участникът е елиминирал 2 или 3 от възможните 5 отговора като неверни, и е ограничил избора си до 2 или 3 възможности. Тогава той приема съблазънта да отгатне, ентусиазиран и от това, че с отхвърлянето на няколко възможни отговора фактически е постигнал известен прогрес в решаването на задачата и че е справедливо да получи "награда" за този прогрес.

Допускането на грешка в решението също не е често явление в изследваната група от ученици Те са с добра математическа подготовка и солидни знания. Условията, при които се провежда тестът, са добри и предразполагат към пълна концентрация: обикновено учениците са около 10–15 в стая, дисциплината е добра, практически по време на състезанието цари тишина и всички са съсредоточени в решаването на задачите. Това, което би могло да повлияе за увеличаване броя на грешките при решаването, е трудността на теста и наличието на повече задачи с голям обем технически детайли, при които се увеличава възможността за механична грешка. Затова в конкретния случай трябва да се обърне внимание на трудността на тестовете.

2-6. Резултати и изводи

Таблица 1

Среден брой точки за задача спрямо максималния

клас	**момчета**	**момичета**	**всички**
3-4	0,4974	0,4834	0,4913
5-6	0,5014	0,5034	0,5022
7-8	0,4179	0,4105	0,4149
9-10	0,4524	0,4172	0,4399
11-12	0,5062	0,4719	0,4920

Таблицата 1 показва, че въпросите от тестовете са били с подходящо подбрана трудност: средните резултати в отделните възрастови групи варират от 41% до 50% от максимално възможния брой точки. Още тук е любопитно да отбележим, че в първите три възрастови групи средните резултати на момичетата и момчетата са практически еднакви, и само при учениците над 15 г. се наблюдава превес на момчетата над момичетата с около 3 %. За сравнение може да се добави, че Curran (1995) изследва тестовото представяне на ученици на 11–12 годишна възраст от Нова Зеландия. Данните са за голяма група от ученици, около 22 000, което за мащабите на тази страна означава, че са обхванати и ученици без особено изявени математически способности. Резултатите сочат, че момчетата имат по-добри резултати от момичетата. Разгледани са и примери на задачи, за които представянето на момчетата е значително по-добро от това на момичетата, както и задачи, за които е по-слабо.

Най-приемливото обяснение за констатираната разлика между новозеландското изследване и резултатите в българския Турнир може да се търси във факта, че в нашето състезание обект на изследване са само учениците с повишени математически способности. Друг фактор, който би могъл да окаже влияние за появата на подобна разлика, е порационалната българска образователна система, която въобще дава по-добра подготовка по математика от новозеландската и с това дава повече шансове и на момичетата при старание да компенсират известна (хипотетична) разлика в способностите.

Поради това, че трудността на задачите в Турнира е била подходяща и при това приблизително относително еднаква във всички възрастови групи, следва да се очаква, че процентът на посочените грешни отговори в резултат на допуснати от участниците грешки не е прекалено голям и не е доминиращ. Той е приблизително еднакъв за всички възрастови групи. Именно благодарение на последното заключение може да се направи извода, че разликите в средния брой грешни отговори за различните възрастови групи са резултат от други фактори, а не от грешно решаване.

Показателите "среден брой грешни отговори на участник за задача" и "среден брой въздържания на участник за задача" за отделните възрастови групи, са дадени в последните колони съответно на таблици № 2 и №3. При сравнение те дават основание за следните изводи:

Таблица 2

Среден брой грешни отговори за задача

клас	**момчета**	**момичета**	**всички**
3-4	0,4525	0,4530	0,4527
5-6	0,3132	0,2933	0,3054
7-8	0,3281	0,3408	0,3332
9-10	0,2040	0,2307	0,2134
11-12	0,2022	0,2063	0,2039

Таблица 3

Среден брой непосочени отговори за задача

клас	**момчета**	**момичета**	**всички**
3-4	0,0752	0,0954	0,0841
5-6	0,3284	0,3551	0,3388
7-8	0,4111	0,4009	0,4070
9-10	0,5420	0,5669	0,5508
11-12	0,4794	0,5333	0,5017

Най-висок процент грешни отговори – около 45%, и съответно най-нисък процент оставени без отговор задачи – 8%, има в групата на най-малките, 3–4 клас. Данните в тази възрастова група сравнително рязко се различават от данните за по-големите състезатели. Те говорят за това, че най-малките участници в Турнира са склонни да поемат риск почти без задръжки. Всъщност вероятно те може би даже не съзнават адекватно степента на риска, който поемат, и негативното отражение, което такава стратегия на "отгатване" може да има върху крайния им резултат и оттам на класирането им. В тази възрастова група силата на мотивировката е на относително ниско равнище. На тях им е подсказано:

колко е хубаво да се решат задачите, но ползата, ефекта, смисълът от всичко това стоят размити в тяхното съзнание;

че те могат, имат дадености да се занимават с решаването на задачи. Някой от състезателите приемат подобни твърдения като достатъчно основание за високо самочувствие и подхождат към задачата с прекалена самоувереност – "фасулска работа".;

как трябва да се държат по време на състезания. Много родители ръководени от собствения си опит в образованието съветват да не се оставя въпрос без отговор – "може пък и да налучкаш верния";

Към тези потенциални причини за повишено рисково поведение на учениците от 3-4 клас заслужава да се помисли още веднъж и върху някои обективно съществуващи фактори. Така например недостатъчното време за възприемане, осмисляне и решение на задачите със сигурност подтиква към налучкване. Какво става когато на детето са отделени 6 мин, за да завърши едно аритметично действие с 3 числа? През първите 2 мин. детето решава задачата. Останалите 4 мин. то започва да проверява, да се връща към нея, да мисли дали не е допуснало грешка. И в колебанието си при проверката взима друго, погрешно решение. Освен това възможностите за концентрация на деца от тази възрастова група (9-10 год.) са все още твърде ограничени. Един период от 90 мин. за тях е твърде продължителен. Логично е умореното, изтощеното, разконцентрираното дете да потърси облекчение като превърне състезанието в игра на отгатване.

В следващата група – на учениците от 5–6 клас, данните сочат скокообразно спадане на поемането на риск. Тук процентът на грешните отговори спада на 30%, а на оставените без отговор задачи се повишава на 34%. Не случайно Scherrifs and Boomer (1954) намират, че учениците на които им липсва самоувереност са силно затруднени при наличие на наказателни точки за грешен отговор. При тях се наблюдава въздържане от отговор даже и при въпроси, на които те знаят вече отговора. Очевиден е "скокът" в посока на намаляване на рисковото поведение на участниците. Защо? От една страна мотивировката е много по-ясна, силна, разбираема. "От това как ще се представиш, зависи до голяма степен къде ще продължиш да учиш!". Детето е амбицирано. То внимателно пресмята получените и загубените точки. То вече не си разрешава да рискува, защото се стреми да постигне конкретно поставената цел.

Наблюдаваната тенденция на спад в рисковото поведение продължава и в следващите възрастови групи, но тя вече е по-плавна. При прехода от 9–10 клас към 11–12 клас се наблюдава почти пълна стабилизация. Даже на пръв поглед данните за "въздържане" сочат като че ли "връщане назад" с 5%.Този ефект е фиктивен, защото според таблица №1 точно с около 5% тестът за 11–12 клас е "по-труден" от този за 9–10 клас, и точно с около 5% според таблица №4 са повече верните отговори за групата 11–12 клас в сравнение с тези на 9–10 клас. С други думи, въздържането при 11–12 клас е намаляло не за сметка на поемане на риск, а за сметка на повече решени задачи. Освен непрекъснатото нарастване на мотивировката и чувството за лична отговорност причините за намаляване на рисковото поведение могат да се търсят още:

в нарастване на аналитико-синтетичните възможности на мислене и оценка на всяка конкретна ситуация, в която попада младия човек;

ясно разбиране на причинно-следствените връзки;

повишените възможности за преценка и самооценка;

половото съзряване и утвърждаване на Аз-а;

Като цяло става въпрос за добре ориентирани млади хора, които знаят своите потребности и пътя, по който могат да бъдат удовлетворени те.

Състезанието "Черноризец Храбър" обхваща ученици от пълния курс на средното образование у нас. От тази гледна точка интерес представляват различията между момичета и момчета в две основни посоки – математически възможности и склонности към рисково поведение.

От данните в таблица 1 за постигнат среден брой точки от съответните групи, с които е проведено настоящето изследване могат да се направят следните изводи:

- В групите 3-4, 5-6- и 7-8 клас представянето (постиженията) на момичетата и момчетата са практически еднакви – 50% и 48% при най-малките, 50% и 50% при 5-6 клас и 42% и 41% при 7-8 клас. Това означава, че математическото познание е еднакво достъпно за всички.

- В групите 9-10 клас и 11-12 клас момчетата показват по-добри резултати от момичетата – съответно 45% и 41% при 9-10 клас и 50% и 47% при най-големите. Половата диференциация е вече реален факт. Настъпилите промени в младите хора не са само биологически. Те формират и различия в целите, ценностите, постъпките, поведението на младежа и девойката. Рационалното мислене на момчетата прави математическото познание по-лесно достъпно за тях, отколкото за емоционално наситената психика на девойката. И все пак различията са само в границите на няколко процента (3-4%). Това е така защото изследването е проведено с подбрани ученици с изявени математически възможности. За това тези изводи са в корелация и с други наблюдения върху представянето на учениците в математически състезания. Те очертават една възрастова граница (около 15-16 години), когато момчетата "дръпват напред" в сравнение с момичетата. Разбира се, тези изводи се отнасят за средното състояние и не изключват възможността победителите в конкретно състезание да са и момичета.

На този фон Swineford (1941) изследва тенденциите за отгатване или рисково поведение при ученици от 9 клас. Той установява, че при момчетата има значително по-голяма тенденция за отгатване отколкото при момичетата. Тази тенденция се засилва при тестове съдържащи по-малко позната учебна материя.

Това е напълно естествено. Момичетата от тази възрастова група се преминали пуберитета. Те имат много по-различно отношение към себе си, към своите постъпки и поведение. Те са много по-внимателни и отговорни. Те инстинктивно ненавиждат риска, включително и при своите изяви в образованието.

Техните съученици (момчетата) в същата възрастова група, още носят детското у себе си. То е примесено с началото на пуберитетните промени и най-често се изразява в изяви, които утвърждават техният стремеж към самостоятелност към утвърждаването на Аз-а. Идеята "Аз мисля така!" ги прави много по-податливи на риск. Формирането и утвърждаване на собственото мнение, дори и тогава, когато то е моментно, недостатъчно обмислено, ситуативно, случайно, за тях е много по-значимо от евентуалните последици от риска. Много често за него въобще не се мисли.

Някои автори като (Hardings (1981), Murphy (1978), Anderson (1989)) отбелязват, че разлика между резултатите в полза на момчетата се наблюдава точно при тестове с наказателни точки за грешни отговори, докато при друг вид изпитване (например когато се изисква кратно описание по даден въпрос) такава разлика между резултатите на момчета и момичета не се открива.

Заплахата от наказателните точки се отчита от момичетата. Тя при тях има силно задържащо въздействие.

При момчетата се забелязва точно обратното явление. Всякакви забрани, наказания, ограничения стимулират желанието им да бъдат преодолени. И колкото по-голема са опасностите, толкова по-голямо удовлетворение носи пренебрегването им. Основната мисъл на момчетата в подобна ситуация е: "Мен нищо не може да ме уплаши!"

Резултатите получени при изследването проведено в рамките на турнира "Черноризец Храбър" 2002 в общи линии потвърждават основните тенденции. Средният брой грешни и верни отговори (виж таблици 2 и 4), както и количеството непосочени отговори (таблица 3) при момичета и момчета от първите три групи (3-4; 5-6 и 7-8 клас) са в толеранса от 0,01% до 0,02%. Тези незначителни ограничения показват:

склонността към рисково поведение от учениците от началната и средната училищна степени намалява с увеличаването на възрастта;

наличието на наказателни точки за случайно подадени отговори, чрез налучкване дава резултат след 7-8 клас. Тогава то започва да се осъзнава и отчита от учениците (виж таблица 3);

по-значими различия в поведението на момчета и момчета се забелязват в следващите възрастови групи.

От таблица 3 при възрастова група 9-10 клас са отчетени среден брой непосочени отговори с 3% повече при момичетата. Тази разлика се увеличава на 5% в следващата възрастова група (11-12 клас). Тези различия са със сравнително малки абсолютни стойности поради факта, че изследването е проведено с ученици с повишени математически способности, т.е. и момичетата, които участват в изследването са подбрани и ориентирани към особеностите на математическото знание. Независимо от това пуберитета при момичетата ги прави по-отговорни и по-малко склонни към рисково поведение. Резултатите показват още, че количеството от момчетата, които са се въздържали от случайно посочване на отговор в следващата възрастова група (11-12 кл) нараства с 6%. Това е свързано от една страна с половото съзряване и при момчетата. От друга – нарастването на чувството им за отговорност и по-добре осъзнатата мотивираност свързана с бъдещето им развитие и място в живота.

Таблица 4

Среден брой верни отговори за задача

клас	**момчета**	**момичета**	**всички**
3-4	0,4723	0,4516	0,4633
5-6	0,4080	0,4013	0,4054
7-8	0,2607	0,2583	0,2598
9-10	0,2540	0,2023	0,2357
11-12	0,3184	0,2603	0,2944

В таблица 4 двете последни възрастови групи се проявяват със значими различия. Така например разликата между брой на верните отговори за задача при момчета и момичета (9-10 кл.) е 5%, а в следващата група (11-12 кл.) 6% в полза на момчетата. Изводът е, че рационалното мислене на момчетата по-добре съответства на спецификата и особеностите на математиката. При момичетата (даже и при тези, които са с определени математически наклонности и интереси) все пак водеща, определяща роля и значение има емоционалността. Иначе успеваемостта, напредъка както на едните, така и на другите в последните две възрастови групи е значим (за момчетата 7%, за момичетата 6%) и почти идентичен. Това показва качеството на работата за подготовка на учениците и от двата пола дава своите очаквани добри резултати. Преднината на момчетата не може да бъде стопена и различията породени от психо-физиологичните характеристики си остават непроменени. При внимателния анализ на фиксираните верни отговори в таблица 4 не е трудно да се забележи, че различията се проявяват още в първата възрастова група (3-4 кл.) в следващите две групи (5-6 кл и 7-8 кл.) момичетата се доближават до резултатите на момчетата благодарение на своето ускорено развитие. След това когато и момчетата навлезат в пубeритета (9-10 кл.) различията отново се проявяват и запазват относителна устойчивост.

Идеята, че с всяко дете при определени условия можем да постигнем всичко не се потвърждава в реалността. Да, известни са случаи, при които отделни представители и от двата пола реагират нестандартно. Така както има момчета, за които математиката е непосилно тежко изпитание, има момичета, чийто резултати далеч превъзхождат и най-добрите момчета. Но, от подобни отделни случаи не могат да се правят обобщаващи заключения. Всяко дете (момче или момиче) е неповторима индивидуалност и всички, които работят с подрастващите следва да изследват, анализират, изучават, уважават неповторимата индивидуалност. Важно е да се познават общите тенденции, но уникалността на всяко дете има определяща решаваща роля и значение. Турнирът "Черноризец Храбър" дава прекрасни възможности за подобна диференцирана дейност.

Умението да се поема риск и най-вече да се управлява риска има изключително важна роля във формирането и развитието на ученковата личност. Проведеното изследване поставя само ограничено скромно начало в тази насока. Освен възможността да избира и заплахата от наказателни точки рисковото поведение на учениците зависи и от много други фактори:

Кой посреща учениците в деня на състезанието. Дали той е познат или непознат за децата дали е усмихнат, ведър, добронамерен човек, който носи позитивна нагласа или е студен, напрегнат, нервен, припрян, зареден с подозрителност и негативизъм.

При учениците от последните две групи (9-10 кл. и 11-12 кл.) много съществено значение има полът на квестора, който присъства в класната стая по време на състезанието. Едни ученици възприемат по-добре думите и поясненията от мъжки глас - други – обратно – предпочитат женския;

Нарушаването на параметрите на ергономичния конфорт (топлина, светлина, шум, свеж въздух и т.н.) предизвиква много ученици към риск само и само да излязат от критична, в отделни случаи непоносима обстановка.

Много съществено влияние указва насочеността на оценяването обявено пряко или индиректно чрез конкретни индикатори. Поведението на учениците при формиращо сумативно оценяване е едно, при критериално и нормативно оценяване – друго, при традиционно или алтернативно оценяване – трето.

Тази поредица може да продължи. Тя показва колко сложен е проблема за рисковото поведение на учениците и колко значимо е поставеното начало на неговото изследване въз основа на опита натрупан от турнира по математика "Черноризец Храбър"

Заключение

В увода и четирите глави на настоящия дисертационен труд са разгледани важни проблеми, свързани с мястото и ролята на задачите в обучението на изявените ученици и в изследването на методически и педагогически проблеми, свързани с този кръг ученици. Подходите, които използвам за анализа и търсенето на решения, са различни: от интуитивно-практически до статистико-математически. Базата, на която стъпвам, са общи теоретични постановки и решения на психологията и педагогиката за таланта и мотивацията. Старал съм се да ги възприемам и прилагам в най-широк смисъл творчески, за да съм в състояние да взимам под внимание особеностите на специфичната съвкупност от ученици – именно изявените по математика.

За фокус на изследванията в дисертацията избрах "задачите за олимпиади"; както обясних по-горе, в тях са отразени болшинството най-важни проблеми от обучението на споменатите ученици.

Основна теза в дисертацията е, че задачите са основна методическа единица в обучението на изявените ученици и могат и трябва да се използват по подходящ начин за създаване на инструментариум за различни изследвания и за засилване на стимулите и мотивацията на учениците за работа.

В нейна подкрепа анализирах възможностите за засилване на мотивацията на учениците и предложих две идеи за практически решения чрез

А) използване на "хуманитарни" елементи във формулировките на задачите, и

Б) акценти върху търсенето на обобщения на задачи.

Предложих и специализиран подход за оптимизиране на "финалната" подготовка на изявени ученици за математически състезания, както и негова практическа реализация (пособието MOPS).

Особено внимание отделих на оценяването на задачите при състезателни тестове (с избираем отговор) и използването му за изграждане на инструментариум за изследвания. Една от важните ми цели беше да не се ограничавам с интуитивно, описателно ниво, или само с анализ на факторите, които влияят на даден процес или явление, а да доведа анализа до количествен (числов) модел, до числови оценки, които да служат за обективна база за изводи.

Стремежът качествените изследвания (и съответно модели) на процеси и явления да бъдат развити до количествени е естествен; той е обусловен както от възможностите за обективизиране на изводите, така и за прилагане на съвременни информационни технологии. От тази гледна точка изследванията на трудността на задачите, на корелациите на резултатите на учениците "по области на математиката" и на риска са на ниво, съответстващо на световните научни тенденции.

Конкретни приноси в дисертацията:

1. Направен е анализ на принципните разлики на двата основни вида тестове с избираем отговор (в зависимост от начина на оценяване на грешните и "празните" отговори): диагностични и състезателни.
2. Представен е анализ на възможни подходи за избор на дистрактори при задачи с избираем отговор.
3. Изследвана е възможността стремежът към обобщения да бъде използван за творчески стимул при работата с изявени ученици.
4. Изградена е концепция за специализирано пособие за изявени ученици, обслужващо финалния етап от подготовката им за състезания от висок ранг.
5. Изградена е концепция за оценяване на трудността на задачите в тест от задачи с избираем отговор.
6. Изградена е концепция за изследване на корелацията между резултатите на изявени ученици в отделни области на математиката.
7. Изградена е концепция за изследване на рисковото поведение на изявени ученици в зависимост от пола и възрастта им.
8. Представена е разработка на темата "Хомотетия" в два варианта с различно предназначение.
9. Представена е разработка на темата "Дискретна оптимизация" за пособие за финална подготовка на изявени ученици.
10. Проведено е измерване на трудността на задачите в състезателния тест на Турнира "Черноризец Храбър" през 1994 г., базирано на разработената нова концепция.
11. Проведено е изследване на корелацията между постиженията на участниците в Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. по отделни области на математиката (аритметика, алгебра, геометрия, информатика), на базата на разработената

концепция; такова изследване е новост в световната практика. Изследвани са и особеностите на стандартния софтуер, приложен за това изследване.

12. Проведено е изследване на склонността към риск у състезателите от Турнира "Черноризец Храбър" през 2002 г. в зависимост от пол и възраст на базата на разработената нова концепция

Към формулировката на основната цитирана по-горе теза, която съм се старал да обосновa в дисертацията, бих искал да добавя и следните изводи:

Математическото обучение на изявените (по математика) ученици, чиято важност се осъзнава все по-отчетливо, има своите специфични особености. Те трябва да бъдат обект на специални изследвания, в които немалка роля се пада на задачите. Успоредно с това трябва да се търсят непосредствено приложими елементи на обучението, основани на опита и интуицията, и да се работи за тяхната научна обосновка, защото изграждането на адекватни модели и научни теории е залог за по-нататъшното развитие не само на педагогиката, психологията и методиката на обучението по математика, но и преди всичко на самото обучение на изявените ученици.

Библиография

(Александров 1986) Александров, П. С. Математическите открития и възприемането им. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 65-69.

(Александров 1975) Александров, П. Индивидуализацията в учебния процес. сп. Народна просвета, кн. 6, 1975.

(Андреев 1996) Андреев, М. Процесът на обучението: Дидактика. С., УИ "Св. Климент Охридски", 1996.

(Бижков 1995) Бижков, Г. Методология и методи на педагогическите изследвания. Аскони –издат, София, 1995.

(Ван дер Варден 1986) Ван дер Варден Б. Л. Хрумване и разсъждение в математиката. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 126-136.

(Василева 1995) Василева, А. Трети есенен математически турнир "Черноризец Храбър". Математика и информатика, 1995, №2, 77-80.

(Васильев и др. 1986) Васильев Н., В. Гутенмахер, Ж. Раббот, А. Тоом. Заочные математические олимпиады. Наука, Москва, 1986.

(Великова 2002) Великова, Е. Стимулиране на математическото творчество ва ученици в IX-XII клас. Дисертация. В. Търново, 2002.

(Великова и Табов 1995) Великова, Е. и Й. Табов. Из американския и западноевропейския опит в изследванията в математическото образование. Матем. и информ.1995, № 4, 22-33.

(Величков 1989) Величков, А. Личност и вътрешна мотивация. Психология на личния контрол. С., БАН, Централна лаборатория по психология, 1989. 170 с.

(Выготский 1984) Выготский, Л.С. Собранные сочинения. т.6. М., 1984. 396с.

(Ганчев (1976)) Ганчев, И. За математическите задачи. Нар. Просвета, София, 1976.

(Ганчев и др. 1996) Ганчев, И., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров, Методика на обучението по математика от VIII до XI клас, Модул, София, 1996.

(Ганчев 1999) Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика (синтез на резултати от различни изследвания). С., Модул-96, 1999. 198 с.

(Гиппенрейтер 1988) Гиппенрейтер, Ю.Б. Введение в общую псигологию. М., Московского университета, 1988. 320с.

(Гординг 1986) Гординг Л. Социологията, психологията и обучението по математика. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 137-146.

(Гроздев 1998) Гроздев, С. Бъдещето на математическите състезания в България. Математика и математическо образование. 27 пролетна конференция на СМБ, Плевен, 9--11 април 1998, 342--343.

(Гроздев 2002) Гроздев, С. Теория и практика на подготовката на изявени ученици за участие в олимпиади по математика. Дисертация. Институт по математика и информатика и Институт по механика на БАН, 2002.

(Гутенмахер 1977) Гутенмахер В. Основные аспекты анализа математических задач. В: Заочное обучение школьников 8-10 классов. Москва 1977, с. 22-25.

(Де Боно 2001) Де Боно, Е. Научете детето си да мисли. С., Кибеа. 2001. 375 с.

(Ден 1986) Ден М. Духовното своеобразие на математика. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 51-64.

(Десев 1999) Десев, Л. Речник по психология /Над 2000 термина/. Четвърто преработено издание. С., Булгарика, 1999. 720 с.

(Дорофеев 1983) Дорофеев Г. О составлении циклов взаимосвязанных задач. Математика в школе, № 6, 34-39.

(Кендеров и Табов 1990) Кендеров, П. и Й. Табов. Български олимпиади по математика. Народна просвета, София, 1990.

(Йорданов и др. 1986) Йорданов, Д., С. Жекова, К. Крумов. Педагогическа психология. Наука и изкуство, София, 1986.

(Кликс 1983) Кликс, Ф. Изследване на надареността - нов път в диагностиката на интелигентността. - Психология, , С. 1983, № 4 , с.206-214.

(Колягин 1977-1) Колягин Ю. Задачи в обучении математике. Ч. I. Просвещение, Москва, 1977.

(Колягин 1977-2) Колягин Ю. Задачи в обучении математике. Ч. II. Просвещение, Москва, 1977.

(Крумов 1985) Крумов, К., Творческият потенциал на личността и нейната реализация. - Психология, 1985, №1 , с.2-8.

(Крупич 1995) Крупич В. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. Прометей, Москва, 1995.

(Крутецкий 1968) Крутецкий, В. Психология математических способностей школьников, Москва, 1968.

(Крыско 1999) Крысько, В. Г. Психология и педагогика в схемах и таблицах. Минск, Харвест, 1999. 384 с.

(Кудрявцев 1982) Кудрявцев, Л. Мисли за съвременната математика и нейното изучаване. Техника, София, 1982.

(Купер 2000) Купер, К. Индивидуальные различия. М., Аспент Пресс, 2000. 526 с.

(Кьюршак и др. 1976) Кьюршак Й., Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. Венгерские математические олимпиады. Мир, Москва, 1976.

(Кънчев и Кънчев 1993) Кънчев Е., И. Кънчев. 140 години от рождението на Иван Салабашев. Съюз на математиците в България, Стара Загора, 1993.

(Лазаров 1997) Лазаров, Б. Количествен модел и дидактически технологии за ефективно използване на извънкласна и извънурочна дейност по математика. Дисертация. ИМИ – БАН, 997.

(Лазаров, Банков и Табов 1992) Лазаров, Б., К. Банков и Й. Табов.Математически тестове 6 - 8 клас. Моранг, София, 1992.

(Лазаров, Банков и Табов 1999) Лазаров, Б., К. Банков и Й. Табов. Математически тестове за 6 – 11 клас. ЛИК, София, 1999.

(Лазаров и Василева 1996) Лазаров, Б. и А. Василева. Изследване върху активността на учениците. В: Доклади на Пролетната конференция на СМБ, 1996.

(Лазаров и Табов 1991) Лазаров, Б. и Й. Табов. Какво да включим в решението на една задача. Обуч. по матем. и информ. 1991, № 5, 4-8.

(Лазаров и Табов 1991) Лазаров, Б. и Й. Табов. Задачи и тестове по математика за 6 клас. Труд, София, 1999.

(Лазаров, Табов и Василева 1991) Лазаров, Б., Й. Табов и А. Василева. Тестове по математика за 9.-11. клас. Просвета, София, 2001.

(Лазаров и Табов 1993) Лазаров Б., Й. Табов. Базисни учебни тестове по математика за 10 и 11 клас. Желев и Гегов, София, 1993.

(Леман 1965) Леман А. (составитель) Сборник задач Московских математических олимпиад. Просвещение, Москва, 1965.

(Леонтиев 1978) Леонтиев, А. Дейност. Съзнание. Личност. С., Партиздат, 1978. 262с.

(Литълуд 1986) Литълуд Дж. Е. Как работи математикът. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 114-125).

(Марев и Иванов 1995) Марев И. и И. Иванов. Хуманизацията на образованието в духовното развитие на обществото. Педагогика, 1995, № 8, 3-18.

(Маслоу 2001) Маслоу, Е. Мотивация и лочност. С., Кибеа, 2001. 462с..

(Матеев и др. 2001) Матеев, П., Е. Стоименова. Надеждност и точност на оценките от изпити и тестове, Математика и математическо образование, XXX Пролетна конференция на СМБ, Боровец, 8--11 април, 2001, 95--102.

(Мерджанова 1999) Мерджанова, Я. Управлението в обучението. С., УИ"Св. Климент Охридски", 1999. 189 с .

(Милев и др. 1958) Милев, А., Й. Братков, Б. Николов. Речник на чуждите думи в българския език. Наука и изкуство, София, 1958.

(Милков и Тонов 1989) Милков, Д., Ив. Тонов. Дидактически тестове по математика. Обучението по математика и информатика. бр.1, 1989.

(Павлов и др. 1996) Павлов, Д., В. Поплилова, Място, роля и значение на ИНТЕРНЕТ, Педагогика, 6, 1996.

(Петков 1988) Петков, Ц. Очерк за творческото образование. - Известия НИИО, направление Надареност и творчество. МНКП, 1988, с.25-31.

(Петров 1995) Петров, П., Дидактика, София, 1995.

(Петров 1995-1) Петров П. Хуманизацията на образованието в духовното развитие на обществото. Педагогика, 1995, № 8, 19-37.

(Пирьов 1975) Пирьов, Г. Способности и талант. Проблеми на таланта. Статии и интервюта. С.,Партиздат, 1975а. 200 с.

(Пойа 1961) Пойа, Д. Как решать задачу. Учпедгиз, Москва, 1961.

(Пойа 1976-1) Пойа, Д. Математическое открытие. Наука, Москва, 1976.

(Пойа 1976-2) Пойа, Д. Математиката и правдоподобните разсъждения, Том 2 - Схеми на правдоподобни заключения. Народна просвета, София, 1976.

(Рубинштейн 1976) Рубинштейн, С. Л. Проблемы общей психологии. М., Педагогика, 1976.416с.

(Рубинштейн 1990) Рубинщейн, С.Л. Основый общей психологии. С.-Петербург, Питър, 1999. 710с.

(Сборник 1962) Подготвителни задачи за математически задачи. Народна просвета, София, 1962.

(Сергеев 1987) Сергеев И. (редактор) Зарубежные математические олимпиады. Наука, Москва, 1987.

(Сорос 1995) Соросовская олимпиада школьников. МЦНМО, Москва, 1995.

(Стамболиев 1994) Стамболиев, Ст. Мотивацията и нейното формиране в учебната дейност.сп. Образование и квалификация, бр. 6, 1994 г.

(Стоименова 2000) Стоименова, Е. Измерителни качества на тестове, София, 2000.

(Страшевич и Бровкин 1978) Страшевич С. И Е. Бровкин. Польские математические олимпиады. Мир, Москва, 1978.

(Табов 1983) Табов, Й. Първите три британски олимпиади (Брошура). МНП 1983.

(Табов и О. Трифонов1984) Табов, Й., О. Трифонов. Задачи от първите две украински олимпиади по математика и от британските олимпиади по математика през 1968 и 1969 г. (Брошура). МНП 1984.

(Табов, Балиганд и Раковска 1985) Табов, Й., В. Балиганд и Д. Раковска. Задачи от олимпиадите по математика на ГДР и Белгия (Брошура). МНП 1985.

(Табов и Банков 1986) Табов, Й. и К. Банков,Полски математически олимпиади (Брошура). МНП 1986.

(Табов 1989) Табов, Й. Хомотетията в задачи. Народна просвета, София, 1989.

(Табов и Велев 1996) Табов, Й. и С. Велев. За трудността на задачите от турнира "Черноризец Храбър" 94. Матем. и мат. образование. Докл. на XXV Пролетна конф. на СМБ, 1996, 357-362.

(Томас 1999) Томас. Д. Тайни и техники на творческото мислене. С., Аратрон, 1999. 312с.

(Фридман 1977) Фридман Л. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. Педагогика, Москва, 1977.

(Фройденталь 1982) Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача. Москва, 1982.

(Халмош 1986) Халмош, П. Р. Математиката като творчество. В кн. Математически миниатюри. Наука и изкуство, София 1986, с. 96-113.

(Христов 1999) Христов, И. Мотивация. Теоретични и практически въпроси. Б., Меценатиздат, 1999. 136 с.

(Христов и др. 1994) Христов, С. и др. Мотивация. Мениджмънт. В., СИТА-МБ, 1994. 40 с.

(Шаригин 1992) Шаригин, И. Как се раждат задачите. Обучението по математика и информатика, бр. 5, 1992, 7-12.

(Шклярский и др. 1967) Шклярский Д. О., Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы планиметрии. Наука, Москва, 1967.

(Шклярский и др. 1974) Шклярский Д. О., Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом. Геометрические оценки и задачи комбинаторной геометрии. Наука, Москва, 1974.

(Шклярский и др. 1978) Шклярский Д. О., Н. Н. Ченцов и И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. Наука, Москва, 1978.

(Anderson 1989) Anderson, J. Sex-related differences on objective tests among undergraduates. Educational Studies in Mathematics, Vol. 20, 1989, p. 165-177.

(Arslanagic 2001) Arslanagic, S. Aspekti nastave matematike za nadarene ucenike srednjoskolskog uzrasta. Sarajevo, 2001.

(Bauersfeld 1979) Bauersfeld, H. Research related to the mathematical learning process. In: B. Christiansen & H. G. Steiner (Eds.). New trends in mathematics teaching (Vol.4), Paris:UNESCO, 1979.

(Begle & Wilson 1970) Begle, E. G. & J. W. Wilson. Evaluation of Mathematics programs, In E. G. Begle (Ed), Mathematics equation, Sixty-ninth. Yearbook of National Society for the Study of Education, 367 – 404, Chicago University of Chicago Press, 1970.

(Berlinghoff 1989) Berlinghoff W. Locally original mathematics through writing. In: Writing to learn mathematics and science. Teachers College Press, N.Y & London, 1989.

(Berlinghoff & Grant 1988) Berlinghoff W. & Grant K. A mathematics sampler. Ardsley House, New York, 1988.

(Berzhenyi 1990) Berzhenyi, G. USA mathematical talent search. Consortium, 35, 9.

(Curran 1995) Curran, J. Gender differences in primary school problem solving. Mathematics Competitions, Vol. 8, No. 2, 1995, p. 48-59.

(Clark 1988) Clark, B. Growing up gifted. (3rd ed.), Columbus, OH: Merrill Punlishing Company, 1988. p.398.

(Csikszentmihalyi & others 1993) Csikszentmihalyi, M. & others Talented Teenagers: The Roots of Success and Failure, Cambridge. England: Cambridge University Press, 1993. p.348.

(Delisle & Renzulli 1982) Delisle, J.R. & J.S.Renzulli The Revolving Door Identification and Programming Model: Correlates of Creative Production. Gifted Child Quarterly, 26, No2, Spring, 1982. pp. 89-95.

(Dorsch 1994) Dorsch Psychologisches Wörterbuch. Bern, Hans Huber Verl., 1994. P.1068.

(Forgasz and Leder 1991). Forgasz, H., G. Leder. To Guess or no to Guess: a Question of Risk. Mathematics Competitions, Vol. 4, No. 2, 1991, p. 58.

(Goldin 1996) Goldin, G. Theories of mathematical learning. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1996, 303--306.

(Gronbach & Suppes 1969) Gronbach, L. J. & P. Suppes. (Eds.) Research for tomorrow's schools: Disciplined inquiry for education. New York: Macmillan, 1969.

(Gronlung 1976). Gronlung, N. Measurement and evaluation in teaching (3-rd ed.) New York, Macmillan Publ. Co. , 1976.

(Hardings 1981) Hardings, J. Sex differences in science examination. In: The Missing Half: Girls and Science Edication, (Ed.: A. Kelly), Manchester University Press, 1981.

(Harman & al 1993) Harman, T., B. Reiter, H. Reiter, N. Schoes. Measuring Difficulty and Diagnosticity in AHSME Multiple Choice Exam. Mathematics Competitions, December 1993, 16, No 2, 64-85.

(Helson & Crutchfield 1970) Helson, R. & R.S.Crutchfield Mathematicians: The Creative Research and the Average Ph.D.. Journal of Consulting and Clinical Psychology, 34, 1970. pp.250-257.

(Johnson 1980) Johnson, D. The research process. In: R. Shumway (ed.). Research in Mathematics Education. NCMT, Washington, 1980.

(Keinan 1984) Keinan, G. Measurement of risk takers' personality. Psychological Reports, Vol. 55, p. 163.

(Kelevedzhiev & Tabov 2003) E. Kelevedzhiev, E., J. Tabov. Searching for correlations in multiple choice mathematics competitions. In: "Creativity in mathematics education and the education of gifted students", Proc. of the 3-rd International Conference, Bulgaria, Rousse, August 3-9, 2003, 174-181.

(Kenderov & Tabov 1990) Kenderov, P. & J. Tabov. Mathematics Competitions: giving marks and comparison of the results. Math. Competitions 3(1990), 57-60.

(Klamkin 1994) Klamkin, M., Mathematical creativity in problem solving and problem proposing, Mathematics Competitions, vol. 7, 2, 1994, 39-66.

(Kulm 1980) Kulm, G. Research on mathematics attitudes. In: R. Shumway (ed.) Research in Mathematics Education. NCMT, Washington, 1980.

(Lazarov & Tabov 1995) Lazarov, B. & J. Tabov. Dialigue in Mathematical Correspondence by School Students. School Science and Mathematics, 95 (Oct. 1995), 6, 327-329.

(Lazarov & Tabov (2000)) Lazarov, B. & J. Tabov 201. Differences between multiple choice questions for competitions and for diagnostics. Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков (Всероссийская конференция, Дубна, 2000). МЦНМО, Москва, 2000.

(Lovecky 1992) Lovecky, D.V. Exploring Social and Emotional Aspects of Giftedness in Children, Roeper Review: A Journal on Gifted Education, vol.15, No 1, 1992. pp.18-25.

(MacKinnon 1962) MacKinnon, D.W. The Nature and Nature of Creative Talent. American Psychologist, 17, 1962. pp. 484-495.

(MacKinnon 1965) MacKinnon, D.W. Personality and the Realization of Creative Potential. American Psychologist, 20, 1965. pp.273-281.

(Mehrens and Lehmann 1991). Mehrens, W. and I. Lehmann. Measurement and Evaluation in Education and Psychology (4th. ed) Holt, Rinehart and Winston Inc., 1991.

(Monthly 1977) Алексеев В. (редактор) Избранные задачи из журнала "American Mathematical Monthly". Мир, Москва, 1977.

(Murphy 1978). Murphy, R. Sex differences in examination performance: do these reflect differences in ability or sex-role stereotypes? Educational Review, Vol. 30 (3), 1978, p. 259-263.

(New Scientist 1988) Girls 'less willing' to guess answers. New Scientist, Vol. 118, May 26, 1988, p. 34

(O'Halloran 1992) O'Halloran, P. (ed.). World compendium of mathematics competitions. Australian Math. Foundation, 1992.

(Passow 1981) Passow, A.H. The Nature of Giftedness and Talent. Gifted Child Quarterly, 25, No. 1, Winter, 1981, 5-10.

(Patton 1992) Patton, J.M. Assessment and Identification of African American Learners with Gifted and Talented. Exceptional Children, 59, No2, 1992, pp.21-34.

(Perleth 1993) Perleth, C. & others Selected Results of the Munich Longitudinal Study of Giftedness: The Multidimentional/Typological Giftedness Model. Roeper Review: A Journal on Gifted Education, 15, No3, 1993. pp.149-155.

(Polya 1945) Polya G. How to solve it. Princeton Univ. Press, NJ, 1945.

(Reis & Small 1995) Reis, S. & M.A.Small Gifted and Talented Learners: Many, Varied, Unique and Diverse, Conn., The National Center of the Gifted and Talented, 1995. p.41.

(Renzulli 1986) Renzulli, J.S. The Three-Ring Conceptions of Giftedness: A Developmental Model for Creative Productivity. In Conceptions of Giftedness, R.J.Sternberg & J.E.Davidson (Eds.), Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, Cambridge University Press, 1986. pp.53-92.

(Renzulli 1988) Renzulli, J.S. The Multiple Menu Model for Developing Differentiated Curriculum for the Gifted and Talented. Gifted Child Quarterly, 32, No3, Summer, 1988a.pp.298-309.

(Renzulli 1988) Renzulli, J.S. A Decade of Dialogue on the Three-Ring Conception of Giftedness. Roeper Review: A Journal on Gifted Education,11, No1, October, 1988b.pp.19-25.

(Renzulli 1992) Renzulli, J.S. A General Theory for the Development of Creative Productivity Through the Pursuit of Ideal Acts of Learning. Gifted Child Quarterly, 36, No1,Winter, 1992. pp.170-82.

(Renzulli & Reis 1985) Renzulli, J.S. & S.M.Reis Scope and Sequence Approach to Process Developmen. The Gifted Child Today, Mart-April, 1985b. pp.2-6.

(Rose 1989) Rose, B. Writing and mathematics: theory and practice. In: Connoly, P., T.Vilardi, ed. Writing to Learn Mathematics and Science. Teachers Colledge Press, N.Y. 1989

(Rowley and Leder 1989). Rowley, G. and G. C. Leder. Mathematics competitions and the problems of not guessing. Mathematics Competitions, Vol. 2, No. 1, 1989, p. 22.

(Saul 1999) Saul, M. A Community of Scholars: Working With Students of High Ability in the High School. In Developing Mathematically Promising Students, L Sheffield (Ed.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 1999. pp.81-92.

(Sewerin 1982) Sewerin, H. Mathematische Schuelerwettbewerbe. Manz Verlag, Munchen, 1982.

(Sherrifs and Boomer 1954). Sherrifs, A. and D. Boomer. Who is penalized by the penalty for guessing? Journal of Educational Psychology, Vol. 45, 1954, p. 81-90.

(Shulman & Elstein 1975) Shulman, L. S. & H. S. Elstein. Studies of problem solving, judgement and decision making: Implications for educational research. (Vol.3), 1975.

(Swineford 1941). Swineford, F. Analysis of a personality trait. Journal of Educational Psychology, Vol. 32, 1941, p. 438-444.

(Stein 1968) Stein, M.I. Creativity. In Handbook of Personality Theory and Research, E.Borgatta & W.W.Lambert (Eds.), Chicago: Rand McNally, 1968. pp.232-257.

(Sternberg & Davidson 1986) Sternberg, R.J. & J.E.Davidson Conceptions of Giftedness. Cambridge, England, Cambridge University Press, 1986. pp.3-50.

(Sternberg & Lubart) Sternberg, R.J. & T.I.Lubart Creative Giftedness: A Multivariate Investment Approach. Gifted Child Quarterly, 37, No1, Winter, 1993. pp.7-15.
(Tabov & Taylor (1996)) Tabov, J. & P. Taylor. Methods of problem solving. Vol. 1. Australian Math. Trust, Belconnen, 1996.

(Tabov 1998) Tabov, J. Homothety and its applications. In: Geometry and Math. Competitions. Third WFNMC Congress 1998, 97-98.

(Tabov & Taylor 1996) Tabov, J. & P. Taylor. Methods of problem solving. Vol. 1. Australian Math. Trust, Belconnen, 1996.

(Tabov & Taylor 2002) Tabov, J. & P. Taylor. Methods of problem solving. Vol. 2. Australian Math. Trust, Belconnen, 2002.

(Terman 1926) Terman, L.M. Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Vol.I: Genetic Studies of Genious. Standford, CA: Standford University Press, 1926. pp.11-32.

(Terman 1954) Terman, L.M. The Discovery and Encouragement of Exceptional Talent. American Psychologist, 9, 1954. pp.221-230.

(Terman & Oden 1959) Terman, L.M. & M.H.Oden Genetic Stidies of Genius: The Gifted Group at Mid-Life. Standford, California: Standford University Press, 1959.p.344.

(Torrance 1975) Torrance, E.P. Creative Research in Education: Still Alive. In Perspectives in Creativity, I.A.Taylor and J.W.Getzels (Eds.), Chicago:Aldine, 1975. pp.278-296.

(Toscano 1956) Toscano, L. Confronto degli angoli di un triangolo con quelli del triangolo delle sue Mediane, Archimede, 8, 1956.pp.278-279.

(Vrba & Burjan) Vrba, A. & V. Burjan. Mathematics competitions, 2 (1989), 2, 64-65.

(Vroom 1964) Vroom, V. Work and Motivation. Wiley, N. Y., 1964.

(Wallace & Pierce 1992) Wallace, B. & J. Pierce The Changing Nature of Giftedness: An Examination of Various Strategies for Provision. Gifted Education International,8, 1992. pp.4-9.

(Wallach 1976) Wallach, M.A. Tests Tell Us Little About Talent. American Psychologists, 64, 1976. pp.57-63

(Wortman 1985) Wortman, C. & others Psycholgy. 2ed. New York, Alfred A. Knopf, 1985 632p.

Съдържание