Computing, Suppl. 1, 65—79 (1977)

Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung der Ordnungs- und Verbandsstrukturen

E. Kaucher, Karlsruhe

Zusammenfassung

Es werden allgemeine Einbettungssätze von geordneten, verbandsgeordneten und bedingt vollständigen verbandsgeordneten, kommutativen Halbgruppen, die isoton regulär (bzw. teilweise isoton regulär) sind, in entsprechende isoton geordnete Gruppen angegeben. Die Voraussetzungen an die zugrunde gelegten Halbgruppen werden in allen Räumen der Intervallrechnung bezüglich der Addition stets erfüllt. Schließlich wird ein Einbettungssatz für assoziative Ringoide angegeben, in dem die erweiterte (nicht notwendig kommutative) Multiplikation ebenfalls isoton bleibt und die additiven Halbgruppen der Ringoide, wie oben dargestellt, in isotone Gruppen eingebettet sind.

Einleitung

Die in der Intervallrechnung (I.R.) auftretenden Räume {1} {7} $(\mathbb{IR}, +, *, \subseteq)$, $(V_n\,\mathbb{IR}, +, \subseteq)$, $(\mathbb{IC}, +, *, \subseteq)$, $(\mathbb{KC}, +, *, \subseteq)$ usw. sind algebraisch unvollkommene Räume in dem Sinne, daß z. B. in $(\mathbb{IR}, +)$ im allgemeinen keine Inversen existieren und deshalb schon die einfachste Gleichung $A + X = B$ nur in besonderen Fällen auflösbar ist {10}. Betrachtet man jedoch die in den einzelnen Räumen der I.R. gegebenen Eigenschaften, so liegen stets reguläre, kommutative, additive Halbgruppen vor, die sich bekanntlich stets in Gruppen einbetten lassen {2}. Besonderes Problem in bezug auf die I.R. jedoch ist die wichtige Einschließungs- oder Isotonieeigenschaft, die natürlich in den Einbettungen erhalten bleiben soll. Aus diesem Grunde ist der Rådströmsche Einbettungssatz {11} nur bedingt auf die I.R. anwendbar. Die im folgenden skizzierten Einbettungssätze geordneter Halbgruppen stellen daher eine Ergänzung zum Rådströmschen Einbettungssatz und zu den topologischen Einbettungssätzen {8}, {12} dar.

1.

Im folgenden werden Gruppoide $(M, \circ)$ mit einer in der Grundmenge M gegebenen Ordnungsstruktur betrachtet. Gewisse Verträglichkeitseigenschaften, die in der I.R. der Einschließungseigenschaft entsprechen, werden zugrunde gelegt.

Definition 1: Ist $(M, \circ)$ ein kommutatives Gruppoid, $(M, \leq)$ geordnete Menge, so ist das Gruppoid

(a) *isoton*, wenn $\bigwedge_{a,b,x\in M} a \leqq b \Rightarrow a\circ x \leqq b\circ x$,

(b) *teilweise isoton regulär*, wenn eine Teilmenge $N \subseteq M$, $N \neq M$ existiert, so daß die isotone Kürzungsregel

$$\bigwedge_{a,b,x\in M} \{(a\circ x \leqq b\circ x \Rightarrow a \geqq b) \Leftrightarrow x \notin N\} \tag{K}$$

gilt. N heißt *Ausnahmemenge* des Gruppoides.

(c) Ist $N=\emptyset$, so ist das Gruppoid *isoton regulär*.

Die Ausnahmemenge besitzt bezüglich der induzierten Verknüpfung folgende Eigenschaften:

Lemma 1: *Ist $(M,N,\circ,\leqq)$ isotone, teilweise isoton reguläre, kommutative Halbgruppe, so gilt:*

(a) *$(N,\circ)$ ist abgeschlossen und absorbierend in $(M,\circ)$, d. h. aus $a\circ b \notin N$ folgt $a\notin N$ und $b\notin N$ und umgekehrt.*

(b) *$(M\backslash N,\circ)$ ist abgeschlossen, d. h. aus $a,b\in M\backslash N$ folgt $a\circ b\in M\backslash N$.*

Beweis: (a) (b) folgen unmittelbar aus der Eigenschaft (K).

Satz 1: *Jede isotone, teilweise isoton reguläre, kommutative Halbgruppe läßt sich stets (bis auf Isomorphien) eindeutig einbetten in eine kleinste isotone, teilweise isoton reguläre, kommutative Halbgruppe $(Q,QN,\circ,\leqq)$, so daß die isotone, isoton reguläre, kommutative Halbgruppe $(M\backslash N,\circ,\leqq)$ in der isotonen, kommutativen Gruppe $(Q\backslash QN,\circ,\leqq)$ eingebettet ist.*

Beweis: In Anlehnung an {2} (S. 88) definiert man im Produktraum $\Delta := M\times(M\backslash N) = \{(a,b)\mid a\in M,\ b\in M\backslash N\}$ zwischen Elementen $(a,b)\in\Delta$ und $(c,d)\in\Delta$ die Relation.

$$(a,b)\sim(c,d) :\Leftrightarrow a\circ d = b\circ c. \tag{1}$$

Diese Relation ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

Mit Hilfe der so definierten Äquivalenzrelation $\sim$ bildet man den Quotientenraum $QM := \Delta/_\sim = (M\times M\backslash N)/_\sim$. In QM kann nun eine Ordnungsrelation und eine algebraische Verknüpfung definiert werden, die sich dann als geeignete Fortsetzung der ursprünglichen Relation und Verknüpfung erweisen.

Ist $A\in QM$ eine Äquivalenzklasse und $(a,b)\in A$ ein Repräsentant, so sei $A=\langle a,b\rangle$ gekennzeichnet. Gemäß

$$\langle a,b\rangle\circ\langle c,d\rangle := \langle a\circ c, b\circ d\rangle \tag{2}$$

ist eine Verknüpfung in QM definiert. Mit $b,d\in M\backslash N$ ist nach Lemma 1(a) stets $b\circ d\in M\backslash N$, so daß $\circ$ in Q stabil ist.

Sie ist unabhängig vom Repräsentanten, d. h. aus

$$(a,b)\sim(x,y) \text{ folgt } (a,b)\circ(c,d)\sim(x,y)\circ(c,d).$$

Die Relation

$$\langle a,b\rangle \leqq \langle c,d\rangle :\Leftrightarrow a\circ d \leqq b\circ c \tag{3}$$

definiert eine Ordnungsrelation in QM. Die Reflexität und Antisymmetrie, Transitivität und Unabhängigkeit vom Repräsentanten sind unmittelbar wie in {2} einzusehen.

$(QM,\circ)$ ist nach denselben Überlegungen wie in {2} kommutativ, assoziativ und besitzt das Neutralelement $E=\langle h,h\rangle$ mit $h\in M\backslash N$.

$(QM,\circ)$ ist daher eine abelsche Halbgruppe mit Neutralelement E.

$(QM,\circ,\leqq)$ ist darüberhinaus eine isotone Halbgruppe. Es gilt:

$$\langle a,b\rangle \leqq \langle c,d\rangle \overset{(3)}{\Leftrightarrow} a\circ d \leqq b\circ c \Rightarrow a\circ d\circ(x\circ y) \leqq b\circ c\circ(x\circ y)$$

$$\Leftrightarrow a\circ x\circ d\circ y \leqq b\circ y\circ c\circ x \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \langle a\circ x, b\circ y\rangle \leqq \langle c\circ x, d\circ y\rangle$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \langle a,b\rangle\circ\langle x,y\rangle \leqq \langle c,d\rangle\circ\langle x,y\rangle.$$

Zum Nachweis der weiteren algebraischen Eigenschaften von $(QM,\circ,\leqq)$ braucht man folgende unmittelbare Folgerungen aus Lemma 1.

Lemma 2:

(a) *Die Teilmenge $QN := \{\langle a,b\rangle \mid a\in N,\ b\in M\backslash N \subset QM\}$ ist absorbierend bezüglich $(QM,\circ)$.*

(b) *Die Struktur $(QM\backslash QN,\circ)$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Nach diesem Lemma 2 ist $(QM\backslash QN,\circ)$ eine Teilstruktur von $(QM,\circ)$. Es kann daher gezeigt werden, daß $(QM\backslash QN,\circ)$ eine isotone Gruppe ist. Es ist für beliebiges $a,b\in QM\backslash QN$

$$\langle a,b\rangle\circ\langle b,a\rangle = \langle a\circ b, b\circ a\rangle = \langle h,h\rangle = E$$

mit $h=a\circ b\in M\backslash N$, d. h. es existieren inverse Elemente. Da $(QM,\circ,\leqq)$ isoton ist, wird somit $(QM\backslash QN,\circ,\leqq)$ zu einer isotonen Gruppe.

Ferner ist $(M,N,\circ,\leqq)$ in $(QM,QN,\circ,\leqq)$ und $(M\backslash N,\circ,\leqq)$ in die Gruppe $(QM\backslash QM,\circ,\leqq)$ eingebettet. Entsprechend wie in {2} wird die Abbildung $\phi: M\to QM$

$$\bigwedge_{a\in M} \phi(a) := \langle a\circ k, k\rangle, \text{ mit festgewähltem } k\in M\backslash N, \tag{4}$$

definiert. ϕ ist dann ein injektiver isotoner Homomorphismus.

Die Abbildung ϕ bewerkstelligt daher die behauptete Einbettung von $(M,N,\circ,\leqq)$ in $(QM,QN,\circ,\leqq)$. Die gleichzeitige Einbettung von $(M\backslash N,\circ,\leqq)$ in die Gruppe $(QM\backslash QN,\circ,\leqq)$ ergibt sich aus der Tatsache, daß mit $a\notin N$ stets $\phi(a)\notin QN$ folgt und ϕ injektiv ist. Nach Lemma 1(1) ist mit $a\notin N$ und $k\notin N$ stets $a\circ k\notin N$, d. h. $\langle a\circ k,k\rangle\notin QN$ womit sich $\phi(a)\notin QN$ bestätigt.

Zum Abschluß des Beweises von Satz 1 muß noch gezeigt werden, daß die angegebene Einbettung QM die kleinste und bis auf Isomorphien eindeutig ist, d. h. für jede andere Einbettung $Q'M$ gilt $QM \subset Q'M$ oder $(QM, \circ, \leqq) \cong (Q'M, \circ', \leqq')$.

Sei $X = \langle a,b\rangle \in QM$ mit $b \notin N$, d. h. es ist $(a,b) \in X$. Ferner sei $A = \langle a \circ l, l\rangle$ und $B = \langle b \circ l, l\rangle$ mit $l \notin N$, dann ist $(a,b) \sim (a \circ l, l) \circ (l, b \circ l)$, d. h. es gilt stets die Darstellung:

$$X = A \circ B^{-1}, \text{ wobei } B^{-1} \text{ das inverse Element zu } B \text{ darstellt,} \tag{5}$$

das stets existiert, denn es ist $b \notin N$, also liegt B in der Gruppe $QM \backslash QN$.

Nun sind $A \in \phi(M)$, $B \in \phi(M \backslash N) \subset \phi(M)$, und da stets $\phi(M) \subset Q'M$ gelten soll, ist $A \in Q'M$ als auch $B \in Q'M$. Mit $B \in \phi(M \backslash N)$ aber muß in der Einbettung $Q'M$ eine Teilmenge $Q'M \backslash Q'N$ existieren, die als Gruppe die Teilmenge $\phi(M \backslash N)$ enthält, d. h. es existiert $B^{-1} \in Q'M \backslash Q'N \subset Q'M$, und damit ist stets $X = A \circ B^{-1} \in Q'M$. Somit ist $QM \subset Q'M$.

Ist $QM = Q'M$, so ist $(QM, \circ) \cong (Q'M, \circ')$ und sei ψ: $QM \to Q'M$ mit $\psi(A \circ B) = \psi(A) \circ' \psi(B)$ der vermittelnde Isomorphismus, so bleibt zu zeigen, daß ψ auch ein Ordnungsisomorphismus ist, d. h.

$$A \leqq B \Rightarrow \psi(A) \leqq' \psi(B),$$

womit sich die Isomorphie von $(QM, \circ, \leqq)$ und $(Q'M, \circ', \leqq')$ erweist.

Sind $A, B \in \phi(M) \subset QM$ und $A \leqq B$, so folgt trivialerweise auf Grund der Einbettungseigenschaft, daß stets mit $\psi(A), \psi(B) \in \phi'(M) \subset Q'M$ auch $\psi(A) \leqq' \psi(B)$ (wegen $\psi|_{\phi(M)} = \phi' \{\phi|^{-1}_{\phi(M)}\}$) gilt.

Sind im allgemeinen Falle $X, Y \in QM$ und $X \leqq Y$, so folgt auf Grund von (5):

$$X \leqq Y \Leftrightarrow A \circ B^{-1} \leqq C \circ D^{-1} \Leftrightarrow A \circ D \leqq B \circ C \tag{*}$$

mit $A, B, C, D \in \phi(M)$. Somit gilt $A \circ D$, $B \circ C \in \phi(M)$, so daß nach dem bereits behandelten Fall aus (*) weiter folgt:

$$\begin{aligned} \psi(A \circ D) \leqq' \psi(B \circ C) &\Leftrightarrow \psi(A) \circ' \psi(D) \leqq' \psi(B) \circ' \psi(C) \\ &\Leftrightarrow \psi(A) \circ' \{\psi(B)\}^{-1} \leqq \psi(C) \circ' \{\psi(D)\}^{-1}. \end{aligned}$$

Da ψ ein $\circ$-Isomorphismus ist, gilt $\{\psi(X)\}^{-1} = \psi(X^{-1})$, womit

$$\begin{aligned} \psi(A) \circ' \psi(B^{-1}) &\leqq' \psi(C) \circ' \psi(D^{-1}) \Leftrightarrow \\ \psi(A \circ B^{-1}) &\leqq' \psi(C \circ D^{-1}) \Leftrightarrow \\ \psi(X) &\leqq' \psi(Y) \end{aligned}$$

nachgewiesen ist. □

Ist die in Satz 1 zugrunde gelegte Ordnungsstruktur $(M, \leqq)$ ein Verband oder gar ein bedingt vollständiger Verband, so ist nach dem angegebenen Einbettungssatz nicht gesichert, daß die Einbettung $(QM, \leqq)$ wieder ein entsprechender Verband ist. In folgenden beiden Sätzen wird diese Frage näher untersucht. Dazu folgende

Definition 2:

(a) Sei $(M, \circ)$ ein kommutatives Gruppoid und $(M, \sqcup)$ ein sup-Verband bzw. bedingt vollständiger sup-Verband (b. v. sup-Verband), so heißt $(M, \circ, \sqcup)$ *distributiv*, wenn gilt:

$$\bigwedge_{a,b,x \in M} (a \sqcup b) \circ x = a \circ x \sqcup b \circ x \quad \text{bzw.} \tag{6}$$

$$\bigwedge_{\substack{T \subset M \\ T \text{ beschr.}}} \bigwedge_{x \in M} (\sup T) \circ x = \sup (T \circ x). \tag{7}$$

T ist beschränkt, wenn für zwei $a, b \in M$ stets für alle $t \in T$ $a \leqq t \leqq b$ gilt. Der Komplex $T \circ x$ ist definiert als $T \circ x = \{t \circ x \mid t \in T\}$.

(b) $(G, \circ, \sqcap, \sqcup)$ heißt eine *verbandsgeordnete Gruppe* (bzw. b. v. verbandsgeordnete Gruppe), wenn die Gruppe $(G, \circ)$ und der Verband (bzw. b. v. Verband) $(G, \sqcap, \sqcup)$ distributiv sind, d. h. $(G, \circ, \sqcap)$ sind gemäß (6) bzw. (7) distributiv.

Die Verbandsoperationen sind in solchen Gruppen jedoch nicht unabhängig. Dies zeigt folgendes

Lemma 3:

a) *Ist* (a) $(G, \circ)$ *eine Gruppe mit Neutralelement e,*

(b) $(G, \sqcup)$ *bedingt vollständiger $\sqcup$-Verband und*

(c) $(G, \circ, \sqcup)$ *distributiv,*

so ist G eine bedingt vollständige verbandsgeordnete Gruppe $(G, \circ, \sqcap, \sqcup)$ *und* $(G, \circ, \leqq)$ *ist isotone Gruppe. Insbesondere gilt mit* $a \circ a^{-1} = e$:

$$(\inf T)^{-1} = \sup (T^{-1}) \text{ mit } T^{-1} := \{t^{-1} \mid t \in T\}.$$

b) *Natürlich gilt diese Aussage unter* (a) *auch entsprechend für $\sqcup$-Verbände unter Weglassung von „bedingt vollständig".*

Beweis: Der Beweis erfolgt mit geringfügiger Verallgemeinerung aus Theorem 5.23 in {2} S. 194.

Satz 2:

Vor: Sei (a) $(M, \circ)$ *reguläre kommutative Halbgruppe,*

(b) $(M, \sqcup)$ *$\sqcup$-Verband,*

(c) $(M, \circ, \sqcup)$ *distributiv,*

Beh.: *so existiert eine (bis auf Isomorphien) eindeutige Einbettung in eine kleinste verbandsgeordnete Gruppe* $(Q, \circ, \sqcap, \sqcup)$ *und* $(Q, \sqcap, \sqcup)$ *ist darüberhinaus ein distributiver Verband.*

Beweis: Aus Voraussetzung (a) und (c) folgt, daß $(M, \circ, \leqq)$ isotone, isoton reguläre, kommutative Halbgruppe ist. Nach Satz 1 ist somit $(M, \circ, \leqq)$ einbettbar in eine isotone Gruppe $(Q, \circ, \leqq)$. Unabhängig von der eingeführten Ordnungsstruktur wird eine Operation „$\sqcup$" in Q definiert, die sich dann als geeignete Fortsetzung der $\sqcup$-Operation aus $(M, \sqcup)$ erweist und Q zu einer verbandsgeordneten Gruppe macht.

$$\bigwedge_{\substack{\langle a,b\rangle \in Q\\ \langle c,d\rangle \in Q}} \langle a,b\rangle \sqcup \langle c,d\rangle := \langle a \circ d \sqcup b \circ c, b \circ d\rangle. \tag{8}$$

Der Beweis verläuft ganz analog wie in Satz 1, nur daß statt der Relation (3) jetzt die Verknüpfung (8) überprüft wird. Die Operation $\sqcup$ ist unabhängig vom Repräsentanten in Q und erfüllt alle Eigenschaften eines $\sqcup$-Verbandes ([2], S. 169), wie Idempotenz, Kommutativität und Assoziativität. Ferner zeigt sich in analoger Weise, daß $(Q, \circ, \sqcup)$ distributiv ist und daß der in (4) definierte Homomorphismus auch ein Verbandshomomorphismus ist. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt. Dieselben Überlegungen wie in Satz 1 beweisen die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphien) der Einbettung. □

Ist der $\sqcup$-Verband jedoch bedingt vollständig (b. v.), so bedarf es weiterer Voraussetzungen. Dazu folgende

Definition 3: Eine isotone, kommutative Halbgruppe $(M, N, \circ, \leqq)$ mit Neutralelement e heißt

(a) *stark isoton regulär*, wenn zusätzlich zu (K) gilt:

$$\bigwedge_{a,b \in M} a \leqq b \Leftrightarrow a | b. \tag{T}$$

(b) *atomar*, wenn die Menge der minimalen Elemente $m(M)$ eine Gruppe $(m(M), \circ)$ bezüglich der induzierten algebraischen Verknüpfung bildet.

Die Einbettung isotoner, stark isoton regulärer und (oder) atomarer kommutativer Halbgruppen mit Neutralelement e, die sich stets nach Satz 1 einbetten lassen, besitzen einige grundlegende Eigenschaften, die in folgendem Lemma festgehalten seien:

Lemma 4:

(a) *$\phi(M)$ läßt sich darstellen als* $\phi(M) = \{\langle a, e\rangle \mid a \in M\}$.

(b) $\bigwedge_{\substack{A \in Q\\ B \in \phi(M)}} (B \leqq A \Rightarrow A \in \phi(M))$,

(c) $\bigwedge_{a,b \in M} \bigvee_{x \in M} a \leqq b \circ x$,

(d) *In $M \backslash m(M)$ existieren keine inverse Elemente, es gilt vielmehr*

$$\bigwedge_{a,b \in M} (a \circ b = e \Rightarrow a, b \in m(M)).$$

Beweis:

Es folgt (a) aus (4) mit $k = e$; (b) aus (K), (T) und (4); (c) und (d) aus der Eigenschaft, daß $(M, \circ, \leqq)$ atomar ist.

Satz 3: *Sei*

(a) $(M, \sqcup)$ *b. v. $\sqcup$-Verband,*

(b) $(M, \circ, \sqcup)$ *stark isoton reguläre, isotone kommutative Halbgruppe,*

(c) $(M, \circ, \sqcup)$ *distributiv,*

(d) $(M, \circ, \leqq)$ *atomar,*

so existiert eine Einbettung in eine b. v. verbandsgeordnete Gruppe $(Q, \circ, \sqcap, \sqcup)$.

Beweis: Sei $(Q, \circ, \sqcup)$ die nach Satz 2 gegebene Einbettung von $(M, \circ, \sqcup)$ bezüglich der Verbandsstruktur. Unabhängig von der so eingeführten Verbandsstruktur in $(Q, \sqcup)$ werde zunächst ein Operator $\sigma: Q \times Q \to Q$ definiert, der sich dann als eine geeignete Fortsetzung der $\sqcup$-Operation erweist.

Ist $T \subset Q$ eine beschränkte Teilmenge mit

$$\bigwedge_{\langle x,y\rangle \in T} \langle a,b\rangle \leqq \langle x,y\rangle \leqq \langle c,d\rangle, \text{ so gilt}$$

Fall 1: Ist $\langle a,b\rangle \in \phi(M)$, so ist nach Lemma 4 (b) $T \subset M$ und somit eine in M beschränkte Teilmenge. Nach (4) aus Satz 2 ist der Einbettungshomomorphismus ϕ ordnungshomomorph auf $\phi(M)$, so daß aufgrund der Identifizierung von $\phi(M)$ mit M $\sup_Q T = (\sup_M \phi^{-1}(T)) = \sup_M T$ gilt.

Fall 2: Ist $\langle a,b\rangle \notin \phi(M)$, so ist die Menge

$$T_{\langle a,b\rangle} := \langle b,a\rangle \circ T = \{\langle b,a\rangle \circ t \mid t \in T\}$$

mit $E = \langle h,h\rangle$ nach unten beschränkt, denn nach Konstruktion ist $(Q, \circ, \leqq)$ isotone Gruppe, so daß aus $\langle a,b\rangle = \langle x,y\rangle \in T$ stets

$$E = \langle a,b\rangle \circ \langle b,a\rangle \leqq \langle a,b\rangle \circ \langle x,y\rangle \in T_{\langle a,b\rangle}$$

folgt.

Nach Lemma 4 (b) liegt somit $T_{\langle a,b\rangle}$ in $\phi(M)$ und ist dort mit $\langle b,a\rangle \circ \langle c,d\rangle \in \phi(M)$ nach oben beschränkt. Es existiert daher nach Fall 1 die Größe $\sup_M(T_{\langle a,b\rangle}) = \sup_M(\langle b,a\rangle \circ T) \in \phi(M)$.

Der Operator

$$\sigma(T) = \sigma_{\langle a,b\rangle}(T) := \langle a,b\rangle \circ \sup_M(\langle b,a\rangle \circ T) \tag{9}$$

ist daher wohldefiniert. Es wird gezeigt, daß $\sigma(T) = \sup_Q(T)$ eine geeignete Fortsetzung von $\sqcup$ auf ganz Q darstellt und daß $(Q, \circ, \sqcup)$ distributiv ist. Im folgenden ist $A = \langle a,b\rangle$.

$\sigma(T)$ ist obere Schranke von T, denn für ein $X \in T$ ist

$$\sigma(T) = A^{-1} \circ \sup_M(A \circ T) \geqq A^{-1} \circ (A \circ X) = X.$$

$\sigma(T)$ ist kleinste obere Schranke von T. Sei $Y \in Q$ eine beliebige obere Schranke von T. Nach Satz 2 ist $(Q, \circ, \leqq)$ isotone Gruppe, so daß für $T_A \subseteq \phi(M)$ gilt:

$$\bigwedge_{A^{-1} \circ X \in T_A} (A^{-1} \circ X \leqq A^{-1} \circ Y \wedge A^{-1} \circ Y \in \phi(M))$$

und somit ist $\sup_M(T_A) \leqq A^{-1} \circ Y$, d.h.

$$\sigma_A(T) = A \circ \sup_M(T_A) \leqq A \circ A^{-1} \circ Y = Y.$$

Da aber Y eine beliebige obere Schranke von T ist, folgt, daß

$$\sup_Q T := \sigma(T) \tag{10}$$

die kleinste obere Schranke von T bestimmt.

Aus dem oben Bewiesenen folgt sofort die Unabhängigkeit von $\sigma_A(T)$ von der gewählten unteren Schranke A oder B von T, denn es ist sowohl $\sigma_A(T) \leqq \sigma_B(T)$ als auch $\sigma_B(T) \leqq \sigma_A(T)$, woraus stets $\sigma_A(T) = \sigma_B(T)$ folgt.

Die in (10) definierte sup-Operation in Q ist distributiv mit $\circ$ gemäß (7). Es gilt:

$$X \circ \sup_Q(T) = X \circ \sigma(T) = X \circ A \circ \sup_M(A^{-1} \circ T)$$

und mit der Darstellung $X = C \circ D^{-1}$ gemäß (5) folgt weiter:

$$= C \circ D^{-1} \circ A \circ \sup_M(A^{-1} \circ D \circ D^{-1} \circ T).$$

Da $\sup_M$ distributiv bezüglich $C, D \in \phi(M)$ gilt:

$$= D^{-1} \circ D \circ A \sup_M(A^{-1} \circ C \circ D^{-1} \circ T)$$
$$= A \circ \sup_M(A^{-1} \circ (X \circ T)).$$

Dieser Ausdruck ist jedoch im allgemeinen nicht gleich $\sigma(X \circ T)$, da im allgemeinen $A \nleqq X \circ T$ gelten kann. Jedoch folgt aus $A \leqq T$ und aus Lemma 4(c), daß ein $\langle e, z\rangle$ existiert mit $\langle e, z\rangle \leqq X$, so daß

$$A \circ \langle e, z\rangle \leqq X \circ T \tag{*}$$

gilt. Damit folgt weiter:

$$= A \circ \langle e, z\rangle \circ \langle z, e\rangle \circ \sup_M(A^{-1} \circ X \circ T)$$
$$\overset{(c)}{=} A \circ \langle e, z\rangle \circ \sup_M(A^{-1} \circ \langle z, e\rangle \circ X \circ T)$$
$$= B \circ \sup_M(B^{-1} \circ X \circ T)$$

mit $B := A \circ \langle e, z\rangle \leqq X \circ T$ nach (*), so daß schließlich weiter folgt:

$$= \sigma(X \circ T) = \sup_Q(X \circ T).$$

Zusammenfassend ist $(Q, \circ)$ eine abelsche Gruppe, $(Q, \sup)$ bedingt vollständiger sup-Verband und $(Q, \circ, \sup)$ distributiv.

Nach Lemma 3(a) ist daher $(Q, \circ, \sup, \inf)$ eine bedingt vollständige verbandsgeordnete Gruppe.

Zur Eindeutigkeit der Einbettung genügt wie in Satz 2 der Nachweis, daß der Isomorphismus ψ von $(Q, \circ)$ nach $(Q', \circ')$ zugleich ein Verbandsisomorphismus von $(Q, \circ, \sup)$ nach $(Q', \circ', \sup')$ ist.

Wegen $\psi|_{\phi(M)} = \phi'\{\phi|^{-1}_{\phi(M)}\}$ sind natürlich sup und sup' auf $\phi(M)$ bzw. auf $\phi'(M)$ identisch. Es gilt daher:

$$\psi(\sup_Q(T)) = \psi(A \circ \sup_M(A^{-1} \circ T)) = \psi(A) \circ' \psi(\sup_M(A^{-1} \circ T). \tag{*}$$

Es ist $\sup_M(A^{-1} \circ T) \in \phi(M)$, so daß nach (*) folgt:

$$\psi(\sup_M(A^{-1} \circ T)) = \sup'_M(\psi(A^{-1} \circ T))$$

und insgesamt

$$\psi(\sup_Q T = \psi(A) \circ' \sup'_M(\psi(A^{-1}) \circ' \psi(T)) = B \circ' \sup'_M(B^{-1} \circ' \psi(T)).$$

Wegen $A \leqq T$ folgt $B = \psi(A) \leqq' \psi(T)$ und damit

$$\psi(\sup_Q(T)) = \sup'_Q(\psi(T)). \qquad \square$$

Außer in einem trivialen Spezialfall ist die Einbettung bezüglich vollständiger Verbandsstrukturen nicht möglich, denn es gilt:

Lemma 5: *Ist $(M, \circ)$ reguläre Halbgruppe mit Neutralelement e und ist $(M, \leqq)$ vollständiger Verband, so ist stets $M = \{e\}$ und $(M, \circ, \leqq)$ eine verbandsgeordnete Gruppe.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus der trivialen Tatsache, daß die größten und kleinsten Elemente eines solchen Verbandes nicht regulär sind, außer im Falle $M = \{e\}$.

2.

Die drei angeführten Einbettungssätze bezogen sich stets auf algebraische Strukturen mit einer Verknüpfung und dazu verträglichen Ordnungsstrukturen. In der Praxis treten jedoch meist isoton geordnete Ringoide $(R, +, \cdot, \leqq)$ auf, das sind algebraische Strukturen folgender Art (vgl. {5}):

$(R, +, \leqq)$ isotone, kommutative Halbgruppe,

$(R, \cdot, \leqq)$ isotones (kommutatives) Gruppoid[1] und zusätzlich sehr schwache Verträglichkeiten zwischen $+$ und $\cdot$ {5}.

Das Ziel des folgenden Einbettungssatzes ist es, $(R, +, \cdot, \leqq)$ so in eine algebraische Struktur $(Q, +, \cdot, \leqq)$ einzubetten, daß $(R, +, \leqq)$ mindestens in der isotonen Gruppe $(Q, +, \leqq)$ eingebettet und die Multiplikationen auf Q isoton (d.h. $(Q, \cdot, \leqq)$ isoton) ist.

Definition 4:

Gegeben sei ein Ringoid $(R, +, \cdot, \leqq)$, wobei $(R, +, \leqq)$ alle Voraussetzungen aus Satz 3 erfüllt und $(Q, +, \leqq)$ die gemäß Satz 3 gegebene Einbettung sei. Unter Verwendung der in Satz 1 und Satz 3 eingeführten Begriffe gelte:

[1] Für · kann später prinzipiell jede Art von Verknüpfung eingesetzt werden, sofern sie nur die Voraussetzung des Einbettungssatzes erfüllt, z. B. auch Division.

(a) $NT \; := \{(a,b) \in \Delta \mid a \nmid b \wedge b \nmid a\}$

$NTQ := \{\langle a,b\rangle \in Q \mid (a,b) \in NT\}$

$$DR \; := \{(a,b) \in \Delta \mid \bigwedge_{x \in R} \begin{Bmatrix} (a+b)\cdot x = a\cdot x + b\cdot x \\ x\cdot(a+b) = x\cdot a + x\cdot b \end{Bmatrix}$$

(b) Eine algebraische Struktur $(R, +, \cdot, \leqq)$ hat Eigenschaft (E), wenn eine Menge $D^* R \subseteq \Delta$ existiert mit

(b.1) $D^* R \subset DR \cap NT$

(b.2) $(a,b), (c,d) \in D^* R \wedge a+d \leqq b+c \Rightarrow a \leqq c \wedge d \leqq b$

(b.3) $(a,b) \in DR \wedge 0 \leqq a+\zeta$ bzw. $0 \leqq b+\eta \wedge \zeta, \eta \in m(R) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,\eta) \in DR$ bzw. $(\zeta, b) \in DR$

(b.4) $\bigwedge_{(a,b)\in NT} \; \bigvee_{(x,y)\in D^* R} \; a+y = b+x$

(c) $D^* Q := \{\langle a,b\rangle \mid (a,b) \in D^* R\}$

Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß diese Festlegungen sinnvoll sind, d. h. daß z. B. $NTQ = NT/_{\sim}$ ist usw.

Satz 4:

Vor.: *Sei* $(R, +, \cdot, \leqq)$ *ein Ringoid mit*

1. (a) $(R, \sqcup)$ *b. v.* $\sqcup$*-Verband,*

(b) $(R, +, \leqq)$ *stark reguläre kommutative Halbgruppe,*

(c) $(R, +, \sqcup)$ *distributiv,*

(d) $(R, +, \leqq)$ *atomar und* $\bigwedge_{\substack{a,b \in R \\ 0 \leqq a+b}} \; \bigvee_{\substack{\alpha \leqq a \\ \beta \leqq b \\ \alpha, \beta \in m(R)}} \; 0 = \alpha + \beta,$

2. $(R, \cdot, \leqq)$ *isotones (kommutatives) Gruppoid mit Neutralelement e und dem ausgezeichneten Element* $-e$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(e0) $\bigwedge_{a \in R} (-e)\cdot a = a \cdot (-e)$

(e1) $\bigwedge_{a \in m(R)} a + (-e)\cdot a = 0$

(e2) $\bigwedge_{a,b \in R} (-e)\cdot(a+b) = (-e)\cdot a + (-e)\cdot b$

(e3) $(-e)\cdot(-e) = e.$[2]

3. $(R, +, \cdot, \leqq)$ *habe Eigenschaft* (E).

[2] Aus $(e\ 1)$ und $(e\ 2)$ folgt $(e\ 3)$.

Beh.: *so existiert eine Einbettung in ein b. v. verbandsgeordnetes Ringoid* $(Q, +, \cdot, \sqcap, \sqcup)$, *wobei* $(R, +, \sqcup)$ *in der b. v. verbandsgeordneten Gruppe* $(Q, +, \sqcap, \sqcup)$ *und* $(R, \cdot, \leqq)$ *in dem isotonen (kommutativen) Gruppoid* $(Q, \cdot, \leqq)$ *mit Neutraleinheit e eingebettet ist.*

Bew.: 1. *Schritt*:

Die Voraussetzungen 1. erlauben nach Satz 3 eine (bis auf Isomorphien) eindeutig bestimmte Einbettung von $(R, +, \leqq)$ in eine verbandsgeordnete Gruppe $(Q_+, +, \sqcap, \sqcup)$. Der Einbettungshomomorphismus $\phi: R \to Q_+$ ist nach (4) gegeben, wobei jetzt $k = 0$ gesetzt wird. Darüberhinaus werden alle Begriffe und Definitionen von Satz 3 zu Grunde gelegt.

2. *Schritt*:

Es gilt die Zerlegung $Q_+ = \phi(R) \cup \phi(R)^{-1} \cup NTQ$. Entweder gilt $\langle a,b\rangle = \langle x,0\rangle$ oder $\langle a,b\rangle = \langle 0,x\rangle$ oder aber $\langle a,b\rangle \in NTQ$, denn entweder gilt $b \mid a$, d. h. $a = b + x$, oder $a \mid b$, d. h. $a + y = b$, oder es gilt $\langle a,b\rangle \in NTQ$. Wesentlich für den letzten Fall ist, daß gemäß (E) (b.4) NTQ stets durch Repräsentanten aus $D^* R$ dargestellt werden kann, d. h. $NTQ \cong D^* Q$. Wegen Lemma 4 (d) ist $\phi(R) \cap \phi(R)^{-1} = m(R)$, aber $(\phi(R) \cup \phi(R)^{-1}) \cap NTQ = \emptyset$.

Es wird in der folgenden Verknüpfungstabelle eine geeignete Multiplikation definiert:

Tabelle 1

$\cdot$	$\langle b,0\rangle \in \phi(R)$	$\langle 0,b\rangle \in \phi(R)^{-1}$	$\langle x,y\rangle \in D^* Q$
$\langle a,0\rangle \in \phi(R)$	$\langle a\cdot b, 0\rangle$	$\inf \langle a\cdot\zeta, 0\rangle$ $0 \leqq b+\zeta$ $\zeta \in m(R)$	$\langle a,0\rangle \cdot \langle x,0\rangle +$ $\langle a,0\rangle \cdot \langle 0,y\rangle$
$\langle 0,a\rangle \in \phi(R)^{-1}$	$\inf \langle \zeta\cdot b, 0\rangle$ $0 \leqq a+\zeta$ $\zeta \in m(R)$	$\langle 0, -a\cdot b\rangle$	$\langle 0,a\rangle \cdot \langle x,0\rangle +$ $\langle 0,a\rangle \cdot \langle 0,y\rangle$
$\langle u,v\rangle \in D^* Q$	$\langle u,0\rangle \cdot \langle b,0\rangle +$ $\langle 0,v\rangle \cdot \langle b,0\rangle$	$\langle u,0\rangle \cdot \langle 0,b\rangle +$ $\langle 0,v\rangle \cdot \langle 0,b\rangle$	$\langle u,0\rangle \cdot \langle x,0\rangle +$ $\langle 0,v\rangle \cdot \langle x,0\rangle +$ $\langle u,0\rangle \cdot \langle 0,y\rangle +$ $\langle 0,v\rangle \cdot \langle 0,y\rangle$

Gilt in $(R, \cdot, \leqq)$ die Kommutativität, so ist natürlich auch die nach Tabelle 1 gegebene Multiplikation kommutativ.

Der Beweis gliedert sich in 3 Hauptteile.

(I) Es ist $(\phi(R), \cdot, \leqq)$ isomorph zu $(R, \cdot, \leqq)$ bezüglich des Isomorphismus ϕ nach (4). Ebenso ist nach Tabelle 1 der Teilraum $(\phi(R)^{-1}, \cdot, \leqq)$ isomorph zu $(\phi(R), \cdot, \leqq)$, da die Abbildung

$$\psi : \phi(R) \to \phi(R)^{-1}$$

mit

$$\bigwedge_{\langle a,0\rangle \in \phi(R)} \psi(\langle a,0\rangle) := \langle 0, -a\rangle \tag{11}$$

ein Isomorphismus ist. Dazu benötigt werden die Eigenschaften $(e0)$ bis $(e3)$. Damit erweist sich die Multiplikation innerhalb $\phi(R)^{-1}$ als isoton.

(II) Bezüglich der Verknüpfungen zwischen $\phi(R)$ und $\phi(R)^{-1}$ erweist sich die nach Tabelle 1 angegebene Infimumslösung als sinnvoll, da die Teilmengen $T_x := \{\zeta \in m(R) \mid 0 \leqq x + \zeta\}$ stets beschränkt sind und nach Voraussetzung (a) und nach Satz 3 die Infima existieren.

Ferner ist die so definierte Verknüpfung verträglich mit $\sim$ nach (1) und mit $\leqq$ nach (3), so daß die Multiplikation definiert und isoton ist. Dazu wesentliche Voraussetzung ist Eigenschaft (d) und die bereits in (I) nachgewiesene Isotonie in $\phi(R)$ und $\phi(R)^{-1}$.

(III) Die restlichen Verknüpfungsfälle $\phi(R) \times NTQ$, $\phi(R)^{-1} \times NTQ$ und $NTQ \times NTQ$ sind definitionsgemäß zurückgespielt auf die bereits behandelten Verknüpfungskombinationen von $\phi(R)$ und $\phi(R)^{-1}$. Es bleibt nur noch der Nachweis der Isotonie für diese Fälle zu erbringen.

Wählt man folgende Standardbezeichnungen und-beziehungen:

$$A \leqq B \Rightarrow A \cdot X \leqq B \cdot X$$

mit A, B, X jeweils aus den Räumen $\phi(R)$, $\phi(R)^{-1}$ und NTQ entsprechend kombiniert, so treten folgende wesentliche Beweisfälle auf:

Tabelle 2 [3]

Beweisfall	$A \in$	$B \in$	$X \in$
(α)	$\phi(R)$	$\phi(R)$	NTQ
(β)	$\phi(R)^{-1}$	$\phi(R)$	NTQ
(γ)	$\phi(R)^{-1}$	NTQ	$\phi(R), \phi(R)^{-1}, NTQ$
(δ)	NTQ	$\phi(R)$	$\phi(R), \phi(R)^{-1}, NTQ$
(ε)	NTQ	NTQ	$\phi(R), \phi(R)^{-1}, NTQ$

Der Beweisfall $A \in \phi(R)$, $B \in NTQ$ und $A \in NTQ$, $B \in \phi(R)^{-1}$ mit $A \leqq B$ kann nach Definition 4(a) nicht auftreten. Die fehlenden Beweisfälle für den Faktor X von links sind im nichtkommutativen Fall zwar vorhanden, verlaufen aber in symmetrischer Analogie zu den hier aufgeführten. Die Fälle (α) und (β) und (ε) ergeben sich aus der bereits in (I) und (II) nachgewiesenen Isotonie in $\phi(R)$ und $\phi(R)^{-1}$ und der Eigenschaft (E) (b.2). Der schwierigere Beweisfall (γ) sei für $X = \langle x, 0\rangle \in \phi(R)$ und $\langle 0, a\rangle \leqq \langle c, d\rangle$, d.h. $d \leqq a + c$ näher ausgeführt:

[3] Die durch Pfeile verbundenen Fälle sind mit Hilfe der Inversenbildung $X \to X^{-1}$ ineinander überführbar, weshalb es genügt, stets nur jeweils einen der Fälle nachzuweisen.

$$\langle c,d\rangle \cdot \langle x,o\rangle = \inf_{\substack{o \leqq d+\eta \\ \eta \in m(R)}} \langle (c+\eta) \cdot x, o\rangle \geqq \inf_{\substack{o \leqq a+c+\eta \\ \eta \in m(R)}} \langle (c+\eta) \cdot x, o\rangle =$$

$$= \inf_{\substack{o \leqq a+t \\ t \in c+m(R)}} \langle t \cdot x, o\rangle \geqq \inf_{\substack{o \leqq a+t \\ t \in R}} \langle t \cdot x, o\rangle =$$

$$= \inf_{\substack{\langle o,a\rangle \leqq t \\ t \in R}} \langle t \cdot x, o\rangle = \inf_{t \in T} \langle t \cdot x, o\rangle =$$

mit $T := \{t \in R \mid \langle o,a\rangle \leqq t\}$. Nun existiert zu jedem $t \in T$ mit $\langle o,a\rangle \leqq t$ ein $\alpha(t) \in m(R)$ mit $\langle o,a\rangle \leqq \alpha(t) \leqq t$. Sei also $A_T = \{\alpha(t) \in m(R) \mid t \in T\}$, so ist die Menge $S := \{s \in R \mid \alpha \leqq s \wedge \alpha \in A_T\} = T$.

Es folgt daher weiter:

$$= \inf_{t \in S} \langle t \cdot x, o\rangle = \inf_{\substack{\alpha \leqq s \\ \alpha \in A_T}} \langle s \cdot x, o\rangle$$

Nun ist sicher $A_T \subseteq A := \{\zeta \in m(R) \mid \langle o,a\rangle \leqq \zeta\}$, womit schließlich folgt:

$$\geqq \inf_{\substack{\alpha \leqq s \\ \alpha \in A}} \langle s \cdot x, o\rangle \geqq \inf_{\substack{\alpha \leqq s \\ \alpha \in A}} \langle \alpha \cdot x, o\rangle =$$

$$= \inf_{\alpha \in A} \langle \alpha \cdot x, o\rangle = \inf_{o \leqq a+\alpha} \langle \alpha \cdot x, o\rangle = \langle o,a\rangle \cdot \langle x,o\rangle$$

Entsprechend verläuft der Beweis für $X \in \phi(R)^{-1}$; $X \in NTQ$ ist auf diese beiden Fälle rückführbar gemäß (E) (b.2).

Damit ist mit der nach Tabelle 2 definierten Multiplikation $(Q_+, \cdot, \leqq)$ ein isotones (kommutatives) Gruppoid mit Neutralelement $\langle e,o\rangle$. □

3.

Die angegebenen Einbettungssätze haben auf Grund ihrer Allgemeinheit ein breites Anwendungsspektrum.

(3.1) Aus der Sicht der Theorie der Halbgruppen stellen die Einbettungssätze Satz 1, 2 und 3 Parallele zu den topologischen Einbettungssätzen dar {8}, {12}. In besonders gearteten Räumen, in denen die Verbandsstruktur zugleich eine Topologie induziert, stellt Satz 3 sogar eine topologische Einbettung dar.

(3.2) Ganz allgemein sind die genannten Sätze anwendbar auf die Komplexaddition konvexer und kompakter Bereiche $(K\,B, +, \subseteq)$ eines Banachraumes B. Die dadurch gegebene Einbettung mündet in die Theorie der stützbaren Bereiche {11}. Im Gegensatz zum Radströmschen Einbettungssatz werden hier jedoch die Ordnungsstrukturen und Isotonieeigenschaften der Addition in die Einbettungen gesichert.

(3.3) Einige Spezialfälle der unter (3.2) genannten Strukturen sind die Intervall- und Kreisarithmetiken bezüglich der Addition. Nach Satz 3 sind einbettbar: $(\mathbb{I}\mathbb{R}, +, \subseteq)$, $(\mathbb{I}\mathbb{C}, +, \subseteq)$, $(V_n \mathbb{I}\mathbb{R}, +, \subseteq)$ $(V_n \mathbb{I}\mathbb{C}, +, \subseteq)$ $(M_n \mathbb{I}\mathbb{R}, +, \subseteq)$ und $(M_n \mathbb{I}\mathbb{C}, +, \subseteq)$. Die für Satz 3 erforderlichen Eigenschaften sind in {1}, {5}, {6} und {10} angegeben.

Nach Satz 1 einbettbar sind die Räume: $(\mathbb{K}\mathbb{C}, +, \subseteq)$, $(V_n \mathbb{K}\mathbb{C}, +, \subseteq)$ und $(M_n \mathbb{K}\mathbb{C}, +, \subseteq)$. Es erweist sich, daß die Einbettungen der aus $\mathbb{I}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{I}\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{K}\mathbb{C}$ abgeleiteten Räume isomorph zu den entsprechenden abgeleiteten Räumen aus den Einbettungen $Q(\mathbb{I}\mathbb{R})$ bzw. $Q(\mathbb{I}\mathbb{C})$ bzw. $Q(\mathbb{K}\mathbb{C})$ sind. So ist z. B. $(Q(V_n \mathbb{I}\mathbb{R}), +, \subseteq)$ isomorph zu $(V_n\, Q(\mathbb{I}\mathbb{R}), +, \subseteq)$, wobei entsprechend komponentenweise die erweiterte Addition und Ordnungsrelation zu verstehen ist.

Die Räume $(\mathbb{I}\mathbb{R}, +, \cdot, \subseteq)$, $(\mathbb{I}\mathbb{C}, +, \cdot, \subseteq)$, $(M_n \mathbb{I}\mathbb{R}, +, \cdot, \subseteq)$ und $(M_n \mathbb{I}\mathbb{C}, +, \cdot, \subseteq)$ sind einbettbar nach Satz 4, wobei die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. Die Division in $(\mathbb{I}\mathbb{R}, N, +, /, \subseteq)$ und $(\mathbb{I}\mathbb{C}, M, +, /, \subseteq)$ kann entsprechend mitgeführt werden, so daß $(\mathbb{I}\mathbb{R}, N, +, \cdot, /, \subseteq)$ und $(\mathbb{I}\mathbb{C}, M, +, \cdot, /, \subseteq)$ bezüglich aller Verknüpfungen einbettbar ist. Die speziellen Einbettungen von $\mathbb{I}\mathbb{R}$ sind in {4} und {9} ausgiebig behandelt.

Zu bemerken ist, daß in $\mathbb{I}\mathbb{R}$ $NT = \emptyset$, aber z. B. in $(M_n \mathbb{I}\mathbb{R}, +, \subseteq)$ und $(\mathbb{I}\mathbb{C}, +, \subseteq)$ $NT \neq \emptyset$. Es ist dort $D^*(M_n \mathbb{I}\mathbb{R}) = \left\{(A, B) \in \Delta \mid A, B \in M_n \mathbb{I}\mathbb{R} \wedge \bigwedge_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \cdot b_{ij} = 0\right\}$ und $D^*(\mathbb{I}\mathbb{C}) = \{(A, iB) \in \Delta \mid A, B \in \mathbb{I}\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}\}$.
In allen oben angeführten Räumen gilt ebenfalls eine Isomorphie zwischen den eingebetteten abgeleiteten Räumen und abgeleiteten eingebetteten Räumen auch bezüglich der Multiplikation und gegebenenfalls Division. Somit können alle aus $\mathbb{I}\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{I}\mathbb{C}$ abgeleiteten Räume und deren Einbettungen mit Hilfe der in $(Q(\mathbb{I}\mathbb{R}), QN, +, \cdot, /, \subseteq)$ bzw. $(Q(\mathbb{I}\mathbb{C}), QM, +, \cdot, /, \subseteq)$ gegebenen erweiterten Verknüpfungen dargestellt und auch computertechnisch realisiert werden. Eine Realisierung des Raumes $(Q\,\mathbb{I}\mathbb{R}, QN, +, \cdot, /, \subseteq)$ wurde am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe durchgeführt.

Die Räume $(\mathbb{K}\mathbb{C}, KN, +, \cdot, \subseteq)$ und $(M_n \mathbb{K}\mathbb{C}, +, \cdot, \subseteq)$ sind nicht nach Satz 4 einbettbar, da die notwendigen Voraussetzungen einer Einbettbarkeit nach Satz 3 nicht erfüllt sind, solange keine geeigneten Verbandsstrukturen gegeben sind {3}.

Literatur

[1] Alefeld, G., Herzberger, J.: Einführung in die Intervallrechnung. B. I, Reihe Informatik/12 (1974).
[2] Dubreil, P.: Lectures on Modern Algebra, S. 88. Edinburgh-London: Oliver & Boyd.
[3] Hauenschild, M.: Arithmetiken für komplexe Kreise. Computing *13*, 299—312 (1974).
[4] Kaucher, E.: Über metrische und algebraische Eigenschaften einiger beim numerischen Rechnen auftretenden Räume. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1973.
[5] Kulisch, U.: Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1971/72 an der Universität Karlsruhe.
[6] Mayer, O.: Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1968.

[7] Moore, R. E.: Interval Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1966.
[8] Gelbaum, B., Kalisch, G. K., Olmsted, J. M. H.: On Embedding of Topological Semigroups and Integral Domains. Proc. Americ. Math. Soc. *1950*, 807—821.
[9] Ortolf, H. J.: Eine Verallgemeinerung der Intervallarithmetik. Bonn: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung 1969.
[10] Ratschek, H.: Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik. Journal für Mathematik *252*, 128—138 (1970).
[11] Rådström, M.: On the Embedding Theoren for Spaces of Comvex Sets. Proc. Am. Soc. *3*, 165—169 (1952).
[12] Schifferdecker, E.: Einbettungssätze für topologische Halbgruppen. Math. Annalen *131*, 372—384 (1956).

Dr. E. Kaucher
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Karlsruhe
Englerstraße 2
D-7500 Karlsruhe
Bundesrepublik Deutschland

Printed in Austria
Druck: Paul Gerin, A-1021 Wien