Справка за научни приноси

ас. д-р Борислав Цонев Йорданов

конкурс за доцент по професионално направление 4.5, Математика
научна специалност Диференциални уравнения
Държавен вестник бр. 30 от 13.04.2021г.

Приносите се дължат на сътрудничеството със силни математици и безкористни колеги, с които долуподписаният кандидат за доцент е имал щастието да работи през последните десетилетия. Основните задачи се отнасят до глобалното съществуване и асимптотичното поведение на решенията на хиперболични частни диференциални уравнения от втори ред, които са наричани за краткост вълнови уравнения. Разделени са условно в три групи според вида на уравнението и разглеждания въпрос:

(1) ниско-честотни приближения на решенията на вълнови уравнения с линейно затихване и техните приложения,
(2) асимптотично поведение и гладкост на решенията на вълнови уравнения с нелинейно затихване,
(3) несъществуване на глобални решения на вълнови уравнения със степенни нелинейности.

Тук са включени само темите на дългогодишна математическа работа, която е дала задоволителни крайни резултати.

1. Ниско-честотни приближения на решенията на вълнови уравнения с линейно затихване и техните приложения

Резултатите в това направление са постигнати в сътрудничеството с Grozdena Todorova (Гроздена Тодорова), Ryo Ikehata и Petronela Radu. Получени са в периода 2005–2016 и са посветени на задачата на Коши за вълнови уравнения със затихване от вида

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}(b(x)\nabla u) + a(x)u_t = f, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

където коефициентите $a(x)$ и $b(x)$ са положителни и достатъчно гладки, а данните $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Тук f е известна функция. В някои приложения, f може да зависи от u, което ще направи уравнението нелинейно. Използваме ∇ за да означим пространствения градиент.

Когато линейния случай на (1) се изучава в L^2-пространства, по-удобно е да се преформулира като абстрактна задача на Коши в Хилбертово пространство H. За целта въвеждаме два неотрицателни самоспрегнати оператора $B : \mathcal{D}(B) \to H$ и $C : H \to H$. Въпросът сега е да се намери поведението при големи времена на $u(t)$, което е решение на

$$(2)\qquad \begin{cases} Cu_{tt} + Bu + u_t = g, & t > 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \end{cases}$$

Тук $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \times H$ и $g \in C(\mathbb{R}_+, H)$ са известни. Приблизително, връзката между (1) и (2) се осъществява от $C = a^{-1}(x)$.

Задачите за съществуване и единственост са решени отдвана, защото не са много трудни. Без отговор бяха останали няколко интересни въпроса за поведението на решенията при големи времена. Един от тях беше скоростта на намаляване на енергията, когато $f = 0$ в уравнение (1). Лесно

се вижда, че енергията монотонно намалява поради

$$\frac{d}{dt}\int \left(u_t^2(x,t)+b(x)|\nabla u(x,t)|^2\right)dx = -\int a u_t^2(x,t)\,dx.$$

Интересният въпрос е колко бързо всъщност тези норми клонят към нула. Понеже няма формула за решенията, когато коефициентите са функции на x, отговорът не е лесен. Всъщност, има представяния на решенията дори за уравнение (2), но те включват контурен интеграл от резолвента с трудно за изследване поведение. Когато $u_0 = 0$ и $g = 0$, например,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re\lambda=\varepsilon} e^{\lambda t}\left(\lambda^2 C + B + \lambda I\right)^{-1} C u_1\,d\lambda, \quad \varepsilon > 0.$$

Тази формула няма смисъл без допълнителни предположения, но ясно показва, че поведението на резолвентата $(\lambda^2 C + B + \lambda I)^{-1}$ при малки λ е определящо за асимптотичното поведение при големи t. Доколкото е вярно, че $(B+\lambda I)^{-1}$ е добро приближение, може да се очаква сравнително просто асимптотично поведение, което наподобява това на абстрактната параболична задача. Така се достига до два интересни въпроса.

(B1) Какво е поведението на $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}$ от (1), когато $t\to\infty$?

(B2) Какво е асимптотичното поведение на $u(t)$ от (2), когато $t\to\infty$?

Разбира се, вторият въпрос не е зададен добре без да са описани допустимите асимптотични формули. Това е важно уточнение, което ще бъде дадено по-късно. Отговорът на (B2) ще бъде и отговор на (B1). Цитираните по-долу публикации дават едни от първите отговори. За голямо съжаление, трябва да бъдат пропуснати много съществени приноси на математици, с които авторът на справката не е сътрудничил.

Въпрос (B1) е разгледан в [1a], [1b] за хомогенно линейно уравнение с $f = 0$ и в [1c], [1d] за нелинейно уравнение с $f(u) = \pm|u|^{p-1}u$, където $p > 1$ е такова, че $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Най-важният общ резултат е една оценка за хомогенния линеен случай: при всяко $\delta > 0$ съществува C_δ, за което

$$\int e^{(m(a)-\delta)\frac{A(x)}{t}}(u_t^2 + b(x)|\nabla u|^2)dx \le C_\delta(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \|u_1\|_{L^2}^2)t^{-m(a)-1+\delta}.$$

Данните (u_0, u_1) трябва да имат компактен носител. В оценката се появява функцията $A(x)$, която е решение на уравнението на Poisson, и $m(a) > 0$, която е съответната граница:

$$\operatorname{div}(b(x)\nabla A(x)) = a(x) \quad \text{и} \quad m(a) = \liminf_{x\to\infty}\frac{a(x)A(x)}{b(x)|\nabla A(x)|^2}.$$

Когато $a(x) = 1 = b(x)$, скоростта на намаляване е просто $m(a) = n/2$. Горният резултат е получен с елементарни но тежки изчисления основани на теглови L^2-оценки. Това означава, че уравнението се умножава с $e^{(m(a)-\delta)A(x)/t}u_t$ и подобни изрази, след което се интегрира по части. Въвеждането на Гаусови тегла изглежда очевидно, защото вече знаем отговора на (B2) за параболичното приближение, но беше необичайно за хиперболичните уравнения преди 15 години. По-късно, тегловите енергетични оценки за вълнови уравнения със затихване бяха съществено развити и приложени към по-трудни задачи от други математици. Някои обобщения, като например това за зависещи от t коефициенти, са все още предмет на активно изследване.

Въпрос (B2) има сравнително лесни отговори в някои частни случаи. Когато $C = I$ и $B = -\Delta$, може да се използва формулата за решението на (2) чрез трансформация на Фурие. По този начин беше открито така нареченото дифузионно приближение на u, което е всъщност решение на параболичното уравнение $-\Delta u + u_t = 0$ или замяна на пълната резолвента с $(-\Delta + \lambda I)^{-1}$. Малко по-късно, дифузионното приближение беше обобщено за произволен самоспрегнат оператор B, но големината на остатъка беше само $O(t^{-1})$. Такъв резултат не описва добре асимптотичното поведение на вълнови уравнения със затихване, където главният член $\|u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = O(t^{-n/2})$ се оказва по-малък от остатъка при $n \geq 3$.

Най-важният принос на публикация [1e], за случая $C = I$ в (2), беше да въведе по-подходящ остатък. В дифузионното проближение,

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{-tB}(u_0 + u_1)\|_V \quad \leq \quad & Ce^{-t/16}\left(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H\right) \\ & +Ct^{-1}\left(\|e^{-tB/2}u_0\|_H + \|e^{-tB/2}u_1\|_H\right), \end{aligned}$$

където нормата на $V = \mathcal{D}(B^{1/2})$ е $\|u\|_V = \|u\|_H + \|B^{1/2}u\|_H$. Доказателството не е трудно и се основава изцяло на класическата теорема за спектрално разлагане на самоспрегнати оператори.

Резултатът на [1f] е подобен, но се отнася за произволен ограничен самоспрегнат оператор C в (2) и предполага, че H е вложено в L^p-пространство. Отново е показано, че решението изпълнява

$$u(t) \approx e^{-tB}(u_0 + Cu_1), \quad t \to \infty.$$

Доказателството е много по-трудно, защото няма общо спектрално разлагане за два некомутиращи самоспрегнати оператора. Неявно се използва разлагане на резолвентата по степените на спектралния параметър. Подходът е напълно елементарен, използващ само свойствата на скаларното произведение и структурата на уравнението, но изисква полугрупата e^{-tB} да има свойството на Марков и да изпълнява неравенството на Неш.

Отговорите на въпрос (B2) дават най-точните отговори на въпрос (B1), включително оценки за намаляването на решенията на хиперболични уравнения с променливи коефициенти и затихване, но предполагат повече ограничения върху a и b. Основната им цел е да пренесат трудностите върху теорията на параболичните уравнения, където има по-явни оценки на фундаменталните решения.

Използвана литература

1a. Todorova, Grozdena, and Borislav Yordanov, Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients, Journal of Differential Equations 246.12 (2009): 4497-4518.

1b. Radu, Petronela, Grozdena Todorova, and Borislav Yordanov, Decay estimates for wave equations with variable coefficients, Transactions of the American Mathematical Society 362.5 (2010): 2279-2299.

1c. Todorova, Grozdena, and Borislav Yordanov, NONLINEAR DISSIPATIVE WAVE EQUATIONS WITH POTENTIAL, Control Methods in PDE-Dynamical Systems: AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, July 3-7, 2005, Snowbird, Utah. Vol. 426. American Mathematical Soc., 2007.

1d. Ikehata, Ryo, Grozdena Todorova, and Borislav Yordanov, Critical exponent for semilinear wave equations with space-dependent potential, Funkcialaj Ekvacioj 52.3 (2009): 411-435.

1e. Radu, Petronela, Grozdena Todorova, and Borislav Yordanov, Diffusion phenomenon in Hilbert spaces and applications, Journal of Differential Equations 250.11 (2011): 4200-4218.

1f. Petronela, Grozdena Todorova, and Borislav Yordanov, The generalized diffusion phenomenon and applications, SIAM Journal on Mathematical Analysis 48.1 (2016): 174-203.

2. Асимптотично поведение и гладкост на решенията на вълнови уравнения с нелинейно затихване

Публикациите по тези теми обхващат периода 2007–2017. Включени са няколко съвместни работи с Grozdena Todorova (Гроздена Тодорова), Davut Ugurlu, и Kyouhei Wakasa. Предмет на изследванията е взаимодействието между нелинейно затихване и нелинеен източник във вълновите уравнения. Като обединяващ модел е избрано уравнението

$$\Box u + a|u|^{p-1}u + b|u_t|^{m-1}u_t = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \tag{3}$$

където $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$ за краткост. Тук параметрите са $a \geq 0$ и $b > 0$, а степените са $p > 1$ и $m > 1$. При всеки избор, енергията на решения $(u, u_t) \in H^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3)$ намалява във времето:

$$\frac{d}{dt}\int \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{a}{p+1}|u|^{p+1}\right) dx = -\int b|u_t|^{m+1}\, dx.$$

Поради нелинейната загуба, не е сигурно, че границата на енергията е нула. Вижда се също, че дясната страна включва по-висока норма от втората. Затова може да се очаква, че решението е по-гладко в $t > 0$. Така възникват следните естествени въпроси за уравнение (3).

(B1) Какво е поведението на енергията на (3) с $a = 0$, когато $t \to \infty$?

(B2) Каква е гладкостта на решенията на (3), когато са избрани начални данни $(u, u_t)|_{t=0} \in H^k(\mathbf{R}^3) \times H^{k-1}(\mathbf{R}^3)$ с $k \geq 3$, във времена $t > 0$?

(B3) Каква е гладкостта на решенията на (3), когато са избрани начални данни $(u, u_t)|_{t=0} \in H^2(\mathbf{R}^3) \times H^1(\mathbf{R}^3)$, във времена $t > 0$?

Отдавна е известен отговорът на (B1) в случай, че степените са сравнително високи: енергията може да не клони към нула поради разсейването на решенията с малки начални данни. Въпрос (B3) също има лесен отговор за спепени $m > p$, при които нелинейното затихване е явно по-силно от нелинейния източник. Интересни се оказват допълнителните случаи.

В [2a] за първи път беше установено, че енергията намалява според

$$\|u_t(\cdot,t)\|_{L^2} + \|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq Ct^{-d(m,n)}, \quad t \to \infty,$$

когато $1 < m \leq (n+2)/(n+1)$. Явна формула за $d(m,n) > 0$ не беше намерана, но работата даваше известно усилване на по-ранните резултати,

че енергията намалява като $(\ln t)^{-1/(m-1)}$ за степени $1 < m < (n+2)/n$. Публикация [2b] се отнасяше само до $n = 1$, но за първи път установяваше явна зависимост на $d(m, 1)$ от m, когато $1 < m < 3$. Тук трябва да се отбележи, че неотдавна и двата резултата по (B1) бяха подобрени с помощта на изненадващ пряк подход, който е основан на неравенството на Харди в интеграла спрямо t.

В отговора на (B2), където участват 3 и повече производни, ролята на източника е незначителна. Затова $a = 0$ не е съществено допускане. Задачата не е лесна, защото нелинейното затихването може да се превърне в източник след 2 диференцирания на уравнението. Тогава големината на m започва да създава трудности на оценките. В [2c] е разгледан случаят на радиални решения и степен $m = 3$. Комбинирани са класически идеи, като оценките на Щрихарц и невъзможността за концентрация на енергията, за да се покаже глобалното съществуване и разсейване на решенията в $H^k(\mathbf{R}^3) \times H^{k-1}(\mathbf{R}^3)$ с $k \geq 3$. Този резултат за гладкост е пренесен към всички $m \geq 3$ в [2d], където основната идея е взаимствана от едномерните вълнови уравнения със затихване.

Най-интересен е отговорът на (B3) в публикация [2e] върху взаимодействието между нелинейни затихване и източник. Характерните трудности при решения в $H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$, за произволни p, са добре известни и все още непреодолими в случая на консервативно уравнение, $b = 0$. Но може да се очакват резултати базирани на нелинейното затихване, когато $b > 0$ и степента m е достатъчно голяма. Един такъв пример е [2e], която построява решение в $H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$ за $m \geq 2$ и всички $p \geq 2$, независимо от съотношението между двете степени. Резултатът следва от неравенството

$$\frac{1}{2}\int \left(|D\nabla u|^2 + p|u|^{p-1}(|\nabla u|^2 + |Du|^2) + |u|^{2p}\right) dx\Big|_0^t$$
$$\leq -\int_0^t \int \left(p|u|^{p-1}|u_s|^{m+1} - \frac{p(p-1)}{2}|u|^{p-3}uu_s^3\right) dxds.$$

Тук $D = (\partial_t, \nabla_x)$ и $a = 1 = b$. За получаването са използвани нелинейни множители, но само елементарни методи. Намирането на монотонни комбинации от норми, което не е трудно при наличието на затихване, се оказа много трудно при консервативните вълнови уравнения.

Използвана литература

2a. Todorova, Grozdena, Yordanov, Borislav, The energy decay problem for wave equations with nonlinear dissipative terms in Rn. Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 1, 389–416.

2b. Wakasa, Kyouhei, and Borislav Yordanov, On the energy decay for dissipative nonlinear wave equations in one space dimension, Journal of Mathematical Analysis and Applications 455.2 (2017): 1317-1322.

2c. Todorova, Grozdena, Davut Ugurlu, and Borislav Yordanov, Regularity and scattering for the wave equation with a critical nonlinear damping, Journal of the Mathematical Society of Japan 61.2 (2009): 625-649.

2d. Wakasa, Kyouhei, and Borislav Yordanov, Global regularity for supercritical nonlinear dissipative wave equations in 3D, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 152 (2017): 183-195.

2e. Todorova, Grozdena, and Borislav Yordanov, On the regularizing effect of nonlinear damping in hyperbolic equations, Transactions of the American Mathematical Society 367.7 (2015): 5043-5058.

3. Несъществуване на глобални решения на вълнови уравнения със степенна нелинейност

Резултатите са получени в сътрудничество с Qi Zhang и Kyouhei Wakasa. Методите са тясно свързани, въпреки че са разделени от десетилетие в периода 2006–2018. За формулиране на общата задачата, нека h_0 и h_1 са функции, които клонят към 0 достатъчно бързо, а $g = (g_{ij})$ е симетрична $n \times n$ матрица, която клони експоненциално към I_n. Ако дефинираме обобщения оператор на Лаплас

$$\Delta_g = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} g_{ij}(x) \partial_{x_j},$$

разглежданата задачата на Коши става

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_g u + h_0 u + h_1 u_t = |u|^p, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ (u, u_t)|_{t=0} = (\varepsilon u_0, \varepsilon u_1), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Разбира се, степента $p > 1$ и малкият параметър $\varepsilon > 0$. Може също да се предполага, че данните са $(u_0,\, u_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В продължение на три десетилетия, (4) е един от най-изследваните модели за разпространение на нелинейни вълни. Самото уравнение има малко на брой физически приложения, но предоставя много възможности за тестване на математически методи. Ролята на положителната нелинейност от степен p е да противодейства на разсейването на вълните, което води до амплитуди $t^{-(n-1)/2}$ в линейното уравнение. Когато степента p не е достатъчно висока, източникът губи интегруемост по времето и решението започва да нараства докато избухне за крайно време. Това е типичният механизъм за обикновени диференциални уравнения като $u_{tt} = |u|^p$.

Хипотеза на Уолтър Щраус твърди, че разделянето между глобална разрешимост за малки данни и избухване за малки данни става при

$$p_0(n) := \frac{n + 1 + \sqrt{n^2 + 10n - 7}}{2(n-1)}.$$

Това е положителният корен на $\gamma(p,n) = 0$, където

$$\gamma(p,n) = 2 + (n+1)p - (n-1)p^2.$$

По-трудната задача е да се докаже глобално съществуване за $p > p_0(n)$. Не е известно решение за всички високи размерности и променливи коефициенти. Обаче класическият случай, който се отнася до константни коефициенти $g(x) = I_n$ и $h_0 = 0 = h_1$, беше успешно решен с участието на българския математик Владимир Георгиев.

Приносите към тази тема се отнасят до по-достъпната задача за избухване на решенията, когато $p \leq p_0(n)$. Критичният случай на класическата задача е разгледан в [3a] при размерности $n \geq 4$. За първи път е показано, че положителните решения имат крайно време на живот. Използва се усредняване със специална функция, прилага се трансформацията на Радон и се намират по-точни L^p-оценки вместо обикновеното неравенство на Хьолдер. Усредняващата функция в тази работа е въведена по-рано в [3b], където $p < p_0(n)$, $g(x) = I_n$ и $h_1 = 0$, но участва положителен потенциал $h_0(x)$. Авторите нямат принос към общия метод за получаване на обикновени диференциални неравенства чрез усредняване на частното диференциално уравнение.

Новата идея, която успешно се прилага и в следващите работи [3c] и [3d], е да се конструира подходяща усредняваща функция. Последната се оказва решение на

$$\Delta_g \varphi_\lambda - h_0(x)\varphi_\lambda = \lambda^2 \varphi_\lambda, \quad \lambda > 0.$$

Може да се покаже, че има такава функция с асимптотичен вид

$$\varphi_\lambda(x) \approx c_n(\lambda|x|)^{-(n-1)/2} e^{\lambda|x|}, \quad \lambda|x| \to \infty.$$

Крайният резултат е експоненциална оценка за времето на живот

$$T_\varepsilon \leq \exp\left(C\varepsilon^{-p(p-1)}\right), \quad \text{за малки} \quad \varepsilon > 0,$$

когато $p = p_0(n)$. Оценката на T_ε е степенна спрямо ε, когато $p < p_0(n)$.

Използвана литература

3a. Yordanov, Borislav T., Zhang, Qi S., Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions. J. Funct. Anal. 231 (2006), no. 2, 361–374.

3b. Yordanov, Borislav, Zhang, Qi S., Finite-time blowup for wave equations with a potential. SIAM J. Math. Anal. 36 (2005), no. 5, 1426–1433.

3c. Wakasa, Kyouhei, and Borislav Yordanov, Blow-up of solutions to critical semilinear wave equations with variable coefficients, Journal of Differential Equations 266.9 (2019): 5360-5376.

3d. Wakasa, Kyouhei and Borislav Yordanov, On the nonexistence of global solutions for critical semilinear wave equations with damping in the scattering case, Nonlinear Analysis 180 (2019): 67-74

04.06.2021 Подпис: Б. Йорданов

/Борислав Йорданов/