АВТОРСКА СПРАВКА

на Денка Куцарова

Настоящата справка отразява публикациите от приложения списък за участие в конкурса за професор в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност 01.01.04 Математически анализ, обявен в "Държавен вестник", бр. 33 / 11.04.2014 г. от Института по Математика и инфроматика при БАН. Номерацията на статиите в авторската справка е според списъка на публикациите, представени за конкурса (24 на брой), като в скоби в плътен шрифт са дадени за улеснение и номерата на тези статии според пълния списък на публикациите.

През последните двадесет години теорията на банаховите пространства се разклони в много направления. Резултати и методи от тази област бяха приложени в теорията на апроксимациите, оптимизациите, нелинейния анализ, теория на операторите, математическата логика и др. Това развитие беше съпътствано от интензивно изучаване на структурата на самите банахови пространства. Многообразието на тези резултати беше отразено в двата скорошни тома Наръчник по геометрия на банаховите пространства, редактирани от Джонсън и Линденщраус.

Част I. **Структурни свойства на банахови пространства**

Към тази тематика спадат статиите с номера 4, 5, 6, 7, 8, 13, 15, 16 и 20 според списъка на публикациите, приложени за конкурса; като статии 7, 16 и 20 не са включвани в дисертацията за получаване на научната степен доктор на математическите науки. Те се вписват в по-широката рамка на изследването на структурните свойства на банахови пространства с шаудеров базис, започнато в началото на 1990 г. от Е. Одел и Т. Шлумпрехт, В. Милман, Н. Томчак-Егерман и развито в резултатите на Т. Гауърс—Б. Море и особено на Т. Гауърс в средата на 90-те години (вж. например [B, OS1, T-J]); а по-късно и в резултати на С. Аргирос и Р. Хейдън. В схемата на Гауърс за частична класификация на банаховите пространства, базирана на неговите дихотомии [G], в единия край попадат наследствено неразложимите пространства, а в другия са "добрите" пространства, т.е. с безусловен базис и в крайна сметка минималните пространства. Понятията, с които работим в тези публикации, са от асимптотичен характер. За пространство с базис, асимптотичност означава гранична стабилизация с някакво "хубаво" свойство, когато минималният елемент на носителите на разглежданите вектори спрямо фиксирания базис, клони към безкрайност.

Един от главните въпроси в структурната теория на банаховите пространства е дали всяко безкрайномерно пространство притежава безкрайномерно подпространство, което е изоморфно на пространство от някакъв списък от класове с "добри" свойства. Най-естественият първи въпрос в тази насока е дали всяко банахово пространство съдържа изоморфно копие на c_0 или ℓ_p за някое p, $1 \leq p < \infty$. Всички известни "класически" примери съдържат подпространство, изоморфно на c_0 или ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Отговаряйки на въпрос на В.

Милман, Б. Цирелсон използва идея от математическата логика и построява през 1974 година пространство с безусловен базис, което не съдържа подпространство, изоморфно на c_0 или ℓ_p, $1 \le p < \infty$. Всъщност, така нареченото в литературата цирелсоново пространство T (от Tsirelson), е конструкцията на Фигел и Джонсън, а първоначалното пространство на Цирелсон е неговото спрегнато T^*. Нормата на T се задава или като границата на рекурсивна редица от норми, или като неявно решение на едно уравнение. Това представлява пречка за пресмятане на нормата на произволен елемент и всички доказателства за пространства от подобен тип са доста сложни.

За две непразни подмножества на естествените числа E и F ще пишем $E < F$ (съответно $E \le F$), ако $\max E < \min F$ (съответно $\le$). Семейството на Шрайер $\mathcal{S}$ от подмножества на естествените числа се дефинира като $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{N} : |A| \le \min A\}$. Едно семейство $(E_i)_{i=1}^n$ от подмножества на $\mathbb{N}$ се нарича допустимо (admissible) ако $E_1 < E_2 < \cdots < E_n$ и $\{\min E_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{S}$, т.е. $n \le E_1 < \cdots < E_n$. Нормата на пространството T се дефинира найнапред за елементи $x \in c_{00}$ (т.е. с крайни носители) и след това се попълва по непрекъснатост. Нека $x \in c_{00}$, тогава

$$\|x\|_T = \max\left\{\|x\|_\infty, \sup\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|E_i x\|_T : n \in \mathbb{N}, (E_i)_{i=1}^n \text{ е допустимо}\right\}\right\}.$$

След построяване на цирелсоновото пространство, следващият естествен основен въпрос е дали всяко пространство съдържа безусловна базисна редица, т.е. подпространство с безусловен базис.

През 1990 г. Е. Одел построява във всяко продпространство на T базисни редици с два различни вида на асимптотично поведение, след което Т. Шлумпрехт [S] построява през 1991 г. първото произволно дисторцируемо пространство S. Нормата в S на елемент x с краен носител се задава с уравнението

$$\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \sup_{E_1 < E_2 < \cdots < E_r} \frac{1}{f(r)}\sum_{i=1}^{r}\|E_i x\|; r \in \mathbb{N}\right\},$$

където $f(t) = \log_2(t+1)$.

Тези резултати представляват отправна точка за изключителни ризултати в теорията на банаховите пространства. Стандартният базис на S е безусловен, но това пространство лежи в основата на забележителната конструкция на Т. Гауърс и Б. Море, с която те решават през 1993 г. [GM] известния въпрос за безусловната базисна редица. По-точно, те построяват пространство GM, което не съдържа безусловна базисна редица. Всъщност, GM притежава посилно свойство, именно: наследствена неразложимост. Едно пространство е наследствено неразложимо (H.I.), ако никое негово безкрайномерно (затворено) подпространство не може да се представи като права сума на две безкрайномерни затворени подпространства. Това свойство се оказва в основата на редица впечатляващи резултати (вж. книгата на Аргирос и Толиас [AT]). През 1994 г. Одел и Шлумпрехт [OS1, OS2] решават проблема за дисторциите. В частност, чрез пренос на множества от S те показват, че хилбертовото пространство ℓ_2 е произволно дисторцируемо.

По мнение на автора, един от най-главните резултати в приложените статии за конкурса в тази тематика е нов метод за построяване на подпространства, равномерно изоморфни на ℓ_∞^n за произволна размерност n. Конструкцията бе дадена независимо от Пей-Ки Лин и автора за пространството на Шлумпрехт, но не бе проверена с доказателство няколко години и в крайна сметка бе публикувана в съвместната ни статия 8 (**[45]** в пълния списък на публикациите). Първото доказателство за подобна конструкция бе дадено в статия 5 (**[42]**) в много по-сложния случай на асимптотично ℓ_1 пространства. Одел нарече нашата конструкция "ярдстик". Тази конструкция позволява да се разбере по-добре локалната структура на асимптотично ℓ_1 пространствата; а също така да се въведе и разграничи един нов подклас на тези пространства в статия 5 (**[42]**), по-точно на силно асимптотичните ℓ_1 пространства. Статията 8 (**[45]**) е цитирана 15 пъти, 5 (**[42]**) е цитирана 17 пъти, включително на световен конгрес ICM 1998 [T-J]. Наскоро Ференци и Шлумпрехт използваха резултата ни за "ярдстик" да докажат ново и донякъде неочаквано свойство на пространството на Гауърс-Море.

В теорията на банаховите пространства се използват няколко вида понятия, които отразяват различни аспекти на асимптотичното поведение на дадено пространство и помагат за изучаването на неговите свойства, например спрединг модел (въведен от Брунел и Сучестон), асимптотичен модел (Халбайсен и Одел), асимптотична структура (Море, Милман, Томчак-Егерман). Като приложение на конструкцията "ярдстик" за ℓ_∞^n в шлумпрехтовото пространство, П. К. Лин и авторът дават отоговор на въпрос на Одел и Шлумпрехт, а именно, че S съдържа блок-базис със спрединг модел изоморфен на ℓ_1.

Наскоро след дефинирането на церелсоновото пространство T, Джонсън [J] въвежда така нареченото "модифицирано" цирелсоново пространство T_M, като заменя в определението на T супремума върху допустимите множества от естествени числа със супремума върху по-богатия клас на непресичащите се (не непременно последователни) разрешени (allowable) множества. T_M по дефиниция притежава по-добри свойства от T, но наскоро след това Казаза и Одел показват, че двете пространства са изоморфни, по-точно дори техните стандартни базиси са еквивалентни. Отначало това е неочаквано, но с времето се приема като естествен факт.

Следвайки свойствата на цирелсоновото пространство, В. Милман и Н. Томчак-Егерман дефинират класа на асимптотично ℓ_p пространствата. Банахово пространство с базис (e_i) (или самият базис (e_i)) се нарича асимптотично ℓ_p, ако съществува константа $C < \infty$ такава, че всеки нормиран блок-базис $(x_i)_{i=1}^n$, за който $n \leq \operatorname{supp} x_1$, е C-еквивалентен на стандартния базис на ℓ_p^n.

С. Аргирос и И. Делияни [AD] дават отговор на въпрос на Гауърс като построяват асимптотично ℓ_1 наследствено неразложимо пространство. Както H.I. пространството на Гауърс-Море се базира на шлумпрехтовото пространство, което е с безусловен базис; така и конструкцията на Аргирос-Делияни се основава на един клас от асимптотично ℓ_1 пространства с безусловен базис. По-точно, те дефинират класа на смесените цирелсонови пространства. При въвеждането на асимптотично ℓ_1 пространствата се е предполагало, че техните крайномерни подпространства (локална структура) биха имали хубави свойства. Това очакване е породено от факта, че основният пример на асимптотично ℓ_1 пространство до този момент е цирелсоновото пространство T, което, благодарение на еквивалентността с модифицираното T_M, удовлетворява долна q-оценка за $q > 1$.

Оказва че, обаче, че положението се променя в общия случай на смесени цирелсонови пространства. Като използваме метода “ярдстик” ние доказваме в 5 (**[42]**), че за редиците от коефициенти $(\theta_k)_{k=1}^{\infty}$, за които Аргирос и Делияни показват произволна дисторцируемост на смесени цирелсонови пространства, тези пространства са наситени с равномерни копия на ℓ_∞^n. Тъй като ℓ_∞ е универсално за сепарабелните пространства, от това следва, че тези асимптотично ℓ_1 пространства съдържат равномерно всички крайномерни пространства, т.е. тяхната локална структура е максимално богата.

Като следваме модификацията на Джонсън T_M, ние въвеждаме в 5 (**[42]**) модифицирани смесени цирелсонови пространства. Горната теорема показва, за разлика от случая на T и T_M, при определено поведение на коефициентите, смесените и модифицираните смесени цирелсонови пространства са напълно несравними. С други думи те не само не са изоморфни, но и никое подпространство на първите не е изоморфно на подпространство на вторите. Така модифицираните пространства представляват нов клас с по-силно асимптотично ℓ_1 свойство.

Дефиниция. Едно банахово пространство с базис (e_i) (или самият базис (e_i)) се нарича силно асимптотично ℓ_p, ако съществува константа $C < \infty$ такава, че всяка нормирана редица $(x_i)_{i=1}^n$ от елементи от $[(e_i)_{i=n}^{\infty}]$, чиито носители са взаимно непресичащи се, е C-еквивалентна на стандартния базис на ℓ_p^n.

Като използваме модифицираните пространства, в статия 7 (**[44]**, не е включена за д.м.н.) ние даваме нови примери на слабо-хилбертови пространства (клас от пространства, дефиниран от Пизие).

В скорошна статия В. Ференци и К. Розендал използват нашите модифицирани пространства, за да конструират необходими примери за тяхното силно разширение на частичната класификация на банаховите пространства, дадена от Гауърс.

Понятието за минимално пространство е въведено от Х. Розентал. Едно банахово пространство X се нарича минимално, ако всяко негово безкрайномерно подпространство Y съдържа подпространство Z, като Z е изоморфно на X. Дълго време единствените известни минимални пространства са били c_0, ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, също така първоначалното пространство на Цирелсон T^* (резултат на Казаза, Джонсън и Цафрири), както и всички техни безкрайномерни подпространства. Шлумпрехт показва, че неговото пространство S е допълняемо минимално. S е рефлексивно, но не е суперрефлексивно. В публикация 4 (**[39]**) ние доказваме, че съществуват суперрефлексивни допълняемо минимални пространства, не съдържащи ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Заради наличието на ℓ_∞^n в S, което споменахме по-горе, не е възможно да се получи суперрефлексивен вариант на S с обикновена конвексификация и затова в доказателството на тази теорема използваме метода на комплексаната интерполация. Понятието за минималност става централно, след като Т. Гауърс го включва в своята частична класификация на банаховите пространства. Както отбелязва Болобаш [B] в обзора си върху резултатите на Гауърс, следващо направление би било да се класифицират самите минимални пространства. Статията 4 (**[39]**) е цитирана от Болобаш.

В публикация 15 (**[57]**) доказваме следния резултат за минимални пространства.

Теорема. Нека X е банахово пространство със силно асимптотичен ℓ_p

базис, $1 \leq p < \infty$. Ако X е минимално, то X е изоморфно на подпространство на ℓ_p.

В статия 13 (**[54]**) въбеждаме асимптотично симетрични пространства. Понятието е мотивирано от изследвания на некомутативните L_p пространства. Ние показваме, че съществуват рефлексивни пространства, за които всички спрединг модели са равномерно симетрични (дори равномерно еквивалентни на стандартния базис на ℓ_p, $1 < p < \infty$), но пространствата не са асимптотично симетрични. Когато $p = 1$ или $p = \infty$, получаваме частични положителни резултати, т.е. за едно пространство е еквивалентно всички спрединг модели да са равномерно ℓ_1 (или ℓ_∞) и да е в сила някакъв вариант на асимптотична симетричност. За разграничаването на различни варианти на това понятие, ние доказваме, че пространството на Цафрири Y съдържа равномерно ℓ_∞^n. Конструкцията на ℓ_∞^n в Y е от типа "ярдстик", но доказателството е по необходимост различно от това за шлумпрехтовото пространство поради различното поведение на коефициентите, което води до различна геометрия на S и Y.

В същата публикация даваме достатъчно условие за съществуването на асимптотично ℓ_p базисни редици в термините на понятието за асимптотична структура на банахово пространство, въведено от Море, Милман и Томчак-Егерман. Като следствие на последния резултат получаваме, че пространството на Цафрири Y (за разлика от S) не е минимално.

В частичната си класификация на банаховите пространства Гауърс дефинира и понятието квази-минимално пространство. Едно пространство е квази-минимално, ако всеки две негови безкрайномерни подпространства съдържат подпространства, които са изоморфни помежду си. В публикации 16 (**[58]**) и 20 (**[62]**) използваме модифицираните смесени цирелсонови пространства за построяване на нови примери на квази-минимални пространства. Пространствата в 16 (**[58]**) притежават и по-силно свойство, по-точно те са подредично минимални. Тези резултати са получени след придобиване на степента д.м.н.

Публикация 6 (**[43]**) представлява кратко приложение на пространството на Гауърс-Море GM; резултатът е забележка от няколко реда, която дава отговор на въпрос от 1968 година. Редърфорд поставя въпроса дали всяко сепарабелно банахово пространство притежава шаудерово разлагане. По-късно този въпрос е цитиран в книгата на И. Зингер [Si] като въпрос 15.1. Като комбинираме конструкцията на Гауърс-Море за наследствено неразложимо пространство с конструкция от тип Енфло на пространство без определен вид апроксимационни свойства, ние получаваме, че съществува сепарабелно банахово пространство X (всъщност, X е подпространство на пространството на Гауърс-Море), което не притежава шаудерово разлагане. Резултатът е използван по-късно от Аргирос и Додос, а също така е цитиран в Наръчника по геометрия на банаховите пространства.

Част II. **Геометрични свойства и приложения в нелинейния анализ**

Публикациите с номера 1, 2, 3, 22 и 24 от списъка за участие в конкурса изучават геометрични свойства на изпъкналост и гладкост на банахови пространства. Статии 1, 2 и 3 бяха включени в документите за доцент (ст.н.с. II степен) и за д.м.н.; статии 22 и 24 са писани след получаване на степента д.м.н.

Между рефлексивните пространства най-добри свойства има подкласът на суперрефлексивните пространства. Благодарение на дълбок резултат на Енфло, те се характеризират като пространствата, които допускат еквивалентна равномерно изпъкнала норма, а също така и еквивалентна равномерна гладка норма. За две свойства на банахови пространства ще казваме, че са изометрично различни, ако те не съвпадат за конкретната норма. Много по-силно разграничение е да не съвпадат и за произволна еквивалентна норма, т.е. да бъдат изоморфно различни.

В тази тематика се разглеждат и други свойства на изпъкналост, които са между суперрефлексивност и рефлексивност. Хъф дефинира понятието за почти равномерна изпъкналост (NUC) и доказва, че нормата на едно банахово пространство е NUC тогава и само тогава, когато пространството е рефлексивно и нормата има равномерното свойство на Кадец-Кли (UKK). Свойства, сродни по дух на почти равномерната изпъкналост и на почти равномерната гладкост (NUS) (виж. Прус [P]), но в по-широк клас, обхващащ и нерефлексивни пространства, са били разглеждани от В. Милман, а наскоро и от Джонсън, Линденщраус, Прайс и Шехман и са наречени съответно асимптотична равномерна изпъкналост и асимптотична равномерна гладкост.

Нека X е банахово пространство със затворено единично кълбо B. Капката, определена от $x \in X \setminus B$ и B се дефинира като $D(x, B) = \mathrm{conv}(\{x\} \cup B)$. С. Ролевич въвежда свойството на капката за нормата (т.е. за затвореното единично кълбо B) на банахово пространство. Монтесинос характеризира изометрично свойството на капката като рефлексивност и свойството на Кадец-Кли. В статия 2 (**[17]**) ние обобщаваме свойството на капката от случая на единичното кълбо за произволно затворено изпъкнало множество C, т.е. C има свойството на капката, ако за всяко непразно затворено множество A, $A \cap C = \emptyset$, съществува $a \in A$ така, че $D(a, C) \cap A = \{a\}$. Ние показваме, че ако C има свойството на капката, то C е или доста малко, или доста голямо.

Теорема. Нека C е затворено изпъкнало множество в банахово пространство X. Ако C притежава свойството на капката, то C е или компактно в нормираната топология, или има непразна вътрешност.

Свойството на капката е свързано с въпроса за добра поставеност на оптимизационни задачи и Ролевич включи горния ни съвместен резултат в своята книга с Палашке по оптимизации [PR].

С. Ролевич дефинира също така и свойството (β) [R] и доказва, че равномерната изпъкналост влече (β), а от своя страна (β) влече NUC. Той определя свойството (β) за банахово пространство X по следния начин: за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ така, че от $1 < \|x\| < 1 + \delta$ следва $\alpha(R(x, B)) < \varepsilon$, където α означава мярката за некомпактност на Куратовски.

В публикация 1 (**[16]**) ние получаваме изоморфна характеризация на свойството (β), откъдето в частност следва, че свойството (β) е изомофрно различно от равномерната изпъкналост и от NUC, което дава отговор на въпрос на Ролевич. За целта използваме идея на С. Прус [P] за изомофна характеризация на почти равномерната изпъкналост (NUC) и за почти равномерната гладкост (NUS) за пространства с базис в термините на крайномерни разлагания (FDD) с (p, q)-оценки. По-точно, ние доказваме:

Теорема. Нека X е банахово пространство с базис (e_n). Тогава следните твърдения са еквивалентни:

(i) X притежава еквивалентна норма със свойството (β).

(ii) Съществуват константи $p \geq q > 1$, C, $c > 0$ такива, че всяка базисна редица (x_n) в X притежава групиране в редица от крайномерни подпространства (X_n), което удовлетворява (p, q)-оценки с константи c, C.

(iii) X притежава еквивалентна норма, която е едновременно NUS и NUC.

В статия 3 (**[20]**) също така въвеждаме две нови последователности от свойства за изпъкналост между (β) и NUC, по-точно k-β, $k \geq 1$ и k-NUC, $k \geq 2$. Да отбележим, че 1-β съвпада със свойството (β). За някои стойности на $k \geq 2$ тези свойства са не само изометрично, но и изоморфно различни от свойствата (β) и NUC.

При работата със свойството (β) ние си служим с еквивалентна дефиниция, изведена в публикация 3 (**[20]**).

Теорема. Банахово пространство X има свойството (β) тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ, $0 < \delta < 1$ така, че за всяко $x \in B$ и всяка ε-разделена редица $(x_n) \subset B$, съществува индекс i, за който $\|x + x_i\|/2 \leq 1 - \delta$.

Тази еквивалентна формулировка бе използвана и се оказа съществена за резултата на Лима и Рандрианаривони [LR] от 2012 г., в който те дават решение на 10-годишен въпрос на Бейтс, Джонсън, Линденщраус, Прайс и Шехман [BJLPS]. Лима и Рандрианаривони доказват, че ако едно банахово пространство е равномерно (метрично, не непременно линейно) факторпространство на ℓ_p за $1 < p < 2$, то пространството е всъщност линейно изоморфно на линейно факторпространство на ℓ_p. За останалите стойности на параметъра аналогичен резултат беше известен от резултати на Джонсън, Линденщраус, Прайс и Шехман; а с друга техника (изпъкналост по Марков) и от резултат на Мендел и Наор. Нека да отбележим, че в последните години нелинейната (метрична) теория се развива много интензивно, особено в трудове на А. Наор.

В статия 24 (**[66]**, след д.м.н.) ние показваме, че ако едно банахово пространство Y е равномерно (нелинейно) факторпространство на банахово пространство X, то модулът β на пространството X (базиран да еквивалентната дефиниция от 3 (**[20]**)) се оценява отгоре (с точност до константа) от модула на асимптотична равномерна гладкост на пространството Y. Тази оценка е в известен смисъл оптимална.

Наскоро Ревалски и Живков [RZ] разглеждат понятието компактна равномерна изпъкналост във връзка с въпроси за метрически проекции. В публикация 22 (**[64]**, след д.м.н.) ние показваме, че компактната равномерна изпъкналост всъщност съвпада изометрично със свойството (β) на Ролевич.

Част III. **Гриди базиси и алгоритми**

Публикациите 9, 10, 11, 12, 14, 17, 21 и 23 в номерация според списъка за конкурса (от които последните четири не са включвани за д.м.н.) разглеждат гриди базиси и гриди алгоритми. Те са обусловени от взаимодействието между теорията на апроксимациите и теорията на банаховите пространства. Ние прилагаме методи от функционалния анализ за изучаване на понятия, които идват от гриди апроксимациите, мотивирани от задачи за пренос и възстановяване на сигнали. Някои резултати, като теореми за сходимост на гриди алгоритми, са насочени към приложенията; а други имат самостоятелно значение в теорията на банаховите пространства.

В случая на нелинейна апроксимация, един елемент не се приближава с вектори от фиксирано линейно подпространство, а с вектори от множество, което може да зависи от приближавания елемент. Исторически, най-напред е разглеждан въпросът за приближаване на даден елемент с линейни комбинации на n елемента от фиксиран базис на пространството. По-късно, вместо базис се разглеждат по-общи множества от елементи, например речници. Тези системи са обикновено с излишък (т.е. представянето на елементите чрез тях не е еднозначно) и това е обусловено от практиката, за да не се губи информация при предаване на сигнали.

В публикация 10 (**[50]**) ние доказваме твърдения за сходимост на различни алгоритми в банахови пространства спрямо общи речници. Основният резултат в тази статия е за слабия чебишев гриди алгоритъм (WCGA). Да поясним, че терминът "слаб" не се отнася до слабата топология, а идва от параметър (или по-общо редица от параметри) на слабост, който се използва в процеса на избор на апроксимиращите елементи.

При обобщаване на резултати за сходимост на гриди алгоритми от случая на хилбертово пространство за случая на банахово пространство, обикновено се изисква условието нормата да е равномерно гладка (равномерно Фреше), което означава, че пространството е суперрефлексивно. За WCGA можем да излезем извън класа на суперрефлективните пространства.

Предложение. Нека X е рефлексивно банахово пространство, чиято норма има свойство на Кадец-Кли и е гладка по Фреше. Тогава WGCA е сходящ за всеки речник $\mathcal{D}$ и за всеки елемент $f \in X$.

Като използваме известни резултати за пренормиране на банахови пространства, получаваме:

Теорема. Нека X е сепарабелно рефлексивно банахово пространство. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $(1+\varepsilon)$-еквивалентна норма на X, за която WCGA е сходящ за всеки речник $\mathcal{D}$ и всяко $f \in X$.

В публикация 14 (**[56]**, не е включвана за д.м.н.) ние доказваме сходимост на слабия чебишев гриди алгоритъм за широк клас от реални и комплексни банахови пространства и речници, в частност за пространствата на Бергман.

В статия 17 (**[59]**, не е включвана за д.м.н.) въвеждаме ново геометрично свойство на нормата (слабо нулево свойство) и показваме слаба сходимост за общи речници на така наречения X-гриди алгоритъм в равномерно гладки банахови пространства с това свойство.

Статии 11 (**[52]**) и 12(**[53]**) са посветени на квази-гриди базиси и различни техни варианти в банахови пространства. Тази тематика води началото си от статията на С. Конягин и В. Темляков [KT].

За $x \in X$ дефинираме гриди наредба за x като изображението $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, че $\rho(\mathbb{N}) \supset \{j : e_j^*(x) \neq 0\}$ и ако $j < k$ то или $|e^*_{\rho(j)}(x)| > |e^*_{\rho(k)}(x)|$ или $|e^*_{\rho(j)}(x)| = |e^*_{\rho(k)}(x)|$ и $\rho(j) < \rho(k)$. Тогава гриди апроксимация на x с m елемента се дефинира като

$$G_m(x) = \sum_{j=1}^{m} e^*_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)}.$$

Ние въвеждаме гриди наредбата за удобство, за да избегнем нееднозначност на означението.

Конягин и Темляков наричат един базис гриди, ако гриди апроксимацията $G_m(x)$ по същество дава най-доброто приближение с m елемента. Базисът (e_n) се нарича квази-гриди, ако съществува C така, че $\|G_m(x)\| \leq C\|x\|$ за всяко $x \in X$ и всяко естествено m. Войташчик [W] показва, че квази-гриди е еквивалентно на сходимост $\lim G_m(x) = x$ за всяко x.

Всеки безусловен базис е квази-гриди, но обратното не е вярно. По този начин, квази-гриди базисите и техните вариации са естествено обобщение на фундаменталното понятие за безусловност. Свойство от подобен характер е било въведено от Елтон през 1978 г. в неговата дисертация по банахови пространства от чисто теоретична гледна точка. Истинското развитие на тази тематика започва след като теорията на апроксимациите мотивира такива свойства.

В публикация 11 (**[52]**) ние въвеждаме и характеризираме някои междинни гриди свойства на базисни редици. Основният въпрос, разгледан в статията, е кога някое от тези гриди свойства на един базис (e_n) в X се пренасят върху дуалната (биортогонална) редица (e_n^*) в X^*. За да избегнем техническите достатъчни условия, ще приведем само някои следствия в термините на широко известни понятия.

Теорема. Нека (e_n) е гриди базис на банахово пространство X с нетривиален тип. Тогава (e_n^*) е гриди базис на X^*.

Теорема. Нека X е банахово пространство с нетривиален тип. Ако (e_n) е почти гриди базис на X, то (e_n^*) е почти гриди базисна редица в X^*.

Също така, ние даваме подходящи примери, които показват, че достатъчните условия са съществени. Единият от примерите използва цирелсоновото пространство.

В. Темляков включи двете съвместни с него статии 10 (**[50]**) и 11 (**[52]**) в доклада си на световния конгрес ICM 2006 [T] върху гриди апроксимации спрямо базиси.

В публикация 12 (**[53]**) изучаваме въпроса за съществуване на базиси или базисни редици с някое свойство от рода на квази-гриди. От резултат на А. Пелчински е известно, че $L_1[0,1]$ не притежава безусловен базис. Също така, в 9 (**[49]**) ние отбелязваме, че базисът на Хар не е квази-гриди базис за $L_1[0,1]$. Ние доказваме, че някои лакунарни подредици на Хар са квази-гриди базисни редици. Този резултат бе продължен по-късно от Гогян.

Един от основните резултати в 12 (**[53]**) е достатъчно условие за съществуване на квази-гриди базис. В частност, $L_1[0,1]$ притежава квази-гриди базис.

Фактът, че няма съответен резултат за c_0 се обяснява от следния ни резултат.

Теорема. c_0 е еднственото с точност до изоморфизъм безкрайномерно $\mathcal{L}_\infty$-пространство, което притежава квази-гриди базис. Освен това c_0 има единствен с точност до еквивалентност квази-гриди базис, т.е. това е стандартният базис на c_0.

Известната теорема на Линденщраус-Зипин твърди, че ако банахово пространство X има единствен с точност до еквивалентност безусловен базис, то X е изоморфно на c_0, ℓ_1 или ℓ_2.

Тъй като ℓ_1 и ℓ_2 притежават условен квази-гриди базис, като комбинираме нашите резултати с теоремата на Линденщраус-Зипин, получаваме следното общо твърдение.

Теорема. Нека X е базкрайномерно банахово пространство. X притежава единствен (с точност до еквивалентност) квази-гриди базис тогава и само тогава, когато X е изоморфно на c_0.

Както вече отбелязахме, базисът на Хар в $L_1[0,1]$ не е квази-гриди базис. С. Гогян [Gog] успява да построи един вид гриди алгоритъм върху базиса на Хар в $L_1[0,1]$, който е сходящ.

В статия 23 (**[65]**, след д.м.н.) установяваме, че формалният аналог на алгоритъма на Гогян не е сходящ за многомерния базис на Хар за пространството $L_1[0,1]^d$ за размерност $d > 1$. Ние даваме подходящ модифициран гриди алгоритъм, който е сходящ и за $d > 1$. Да отбележим, че двумерният базис на Хар намира широко приложение при компресирането на образи.

В публикация 21 (**[63]**, след д.м.н.) дефинираме и изучаваме "branch greedy" алгоритми от типа на Гогян в най-обща абстрактна постановка. Мотивацията за това понятие идва от факта, че гриди алгоритъмът генерира дърво от възможни избори на коефициенти и този тип алгоритми представляват процедура за избор на подоходящ клон от това дърво.

Част IV. **Явни конструкции на матрици за компресиращо отчитане**

Статиите 18 (**[60]**) и 19 (**[61]**), писани след д.м.н., са в така наречената тематика "компресиращо отчитане" (compressed/compressive sensing). Първата публикация съдържа основните математически доказателства и идеи, докато втората подобрява изчисленията като константите в основния резултат са в пъти по-добри от съответните параметри в първата. Втората статия е публикувана в материалите на една от най-престижните конференции по компютърни науки, STOC. Първата статия вече е цитирана 26 пъти.

Същността на компресиращото отчитане се състои във възможността при определени условия да се възстановяват сигнали с много по-малко измервания. За целта сигналите трябва да бъдат (или да се апроксимират добре от сигнал с) малък брой ненулеви коефициенти, т.е. те са разредени (sparse) сигнали. Казваме, че един сигнал е k-разреден, ако той има не повече от k ненулеви коефициента. Освен това, матрицата, с която се извършват измерванията, трябва да притежава определени свойства. Едно от най-често използваните достатъчни условия за точна реконструкция е така нареченото "ограничено изометрично свойство" ("Restricted Isometry Property" или (RIP)).

Казваме, че една матрица Φ с рамерност $n \times N$ има ограничено изометрично свойство (RIP) от ред k с константа δ, ако за всички k-разредени вектори x е изпълнено

$$(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|\Phi x\|_2^2 \le (1+\delta)\|x\|_2^2.$$

Тематиката компресиращо отчитане се разви през последните десет години след работи на Кандес, Ромбърг и Тао [CT, CRT], които дефинираха свойството (RIP) и установиха, че то осигурява точно възстановяване на разредени сигнали. Всъщност, първите матрици от такъв тип са построени доста по-рано от Б. Кашин [Ка] от чисто теоретичен интерес, без връзка с реконструкция на сигнали. Основните методи за построяване на матрици с това свойство са вероятностни; например когато елементите на матрицата са нормално разпределени случайни величини. Естествено, целта е при фиксирани n и N, където $n \leq N$, да се постои RIP матрица с максимален ред на разреденост k (или съответно, за фиксирано k да да се минимизира n). За широк клас от случайни матрици се постига оптималният възможен порядък на k, а именно

$$\frac{n}{\log(2N/n)}.$$

Отделно стои отворен въпросът да се намерят добри явни (детерминистични) конструкции на RIP матрици (вж. блога на Тао [Tao]). Всички явни конструкции преди нашата статия се базират на построяването на системи от единични в ℓ_2-норма вектори (които представляват стълбовете на матрицата) с малка кохерентност. Кохерентност μ на фамилия от единични вектори $\{u_1, \ldots, u_N\} \subset C^n$ се дефинира като

$$\mu := \max_{r \neq s} |\langle u_r, u_s \rangle|.$$

Системите от вектори с малка кохерентност са известни под името "сферични кодове".

Явни (детерминистични) конструкции на RIP матрици, чиито стълбове имат малка кохерентност, са дадени от Кашин; Алон, Голдрайх, Хастад и Fералта; ДеВор; Нелсън и Темляков. Всички тези конструкции постигат порядък на k

$$\frac{\sqrt{n}\log n}{\log N},$$

т.е. нито една от тези конструкции не дава по-добър порядък на k от $\sqrt{n}$. Причината за това е, че от теорема на Левенщайн следва, че ако доказателството на свойството (RIP) с константа $\delta < 1$ се базира на кохерентност, то не може да даде порядък на k по-голям от $\sqrt{n}$.

В статия 18 (**[60]**) ние даваме нова явна коструктция на матрици с размерност $n \times N$, притежаващи (RIP). По-точно, за някое $\varepsilon > 0$, големи N и всяко n, удовлетворяващо $N^{1-\varepsilon} \leq n \leq N$, ние построяваме RIP матрици от ред $k \geq n^{1/2+\varepsilon}$ и константа $\delta = n^{-\varepsilon}$. Това преодолява естествената бариера $k = O(n^{1/2})$ на доказателствата, основани на кохерентност. Тази конструкция е първата и засега единствена от подобен род.

Най-напред ние показваме, че с точност до допълнителен логаритъм можем да сведем разглежданията до вектори с координати 0 и 1 (оценката е подобна на доказателства за квази-гриди базиси). Основната част на доказателството се основава на получени нови оценки в областта на адитивната комбинаторика.

ЛИТЕРАТУРА

[AD] S. Argyros, I. Deliyanni. Examples of asymptotic ℓ_1 spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349** (1997), 973–995.

[AT] S. A. Argyros, A. Tolias. Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **170** (2004), No. 806, vi+114 pp.

[BJLPS] S. Bates, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, G. Schechtman Affine approximation of Lipschitz functions and nonlinear quotients. *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), no. 6, 1092—1127.

[B] B. Bollobas. The work of William Timothy Gowers. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 109–118.

[CT] E. J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inform. Th.* **51** (2005), 4203–4215.

[CRT] E. J. Candes, J. Romberg and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006), 1208–1223.

[Gog] S. Gogyan. On convergence of Weak Thresholding Greedy Algorthm in $L^1(0,1)$, *J. Approx. Theory* **161** (2009), 49—64.

[G] W. T. Gowers. An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies. *Ann. of Math.*, **156** (2002), 797–833.

[GM] W. T. Gowers, B. Maurey. The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 851–874.

[J] W. B. Johnson. A reflexive Banach space which is not sufficiently Euclidean. *Studia Math.*, **55** (1976), 201–205.

[Ka] B. S. Kashin. Widths of certain finite-dimensional sets and classes of smooth functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **41** (1977), 334–351; English transl. in Math. USSR Izv. **11** (1978), 317–333.

[KT] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov. A Remark on Greedy Approximation in Banach spaces. *East J. Approx.*, **5** (1999), No. 3, 365–379.

[LR] V. Lima, N. Lovasoa Randrianarivony. Property β and uniform quotient maps, *Israel J. Math.* **192** (2012), no. 1, 311-–323.

[OS1] E. Odell., T. Schlumprecht. Distortion and stabilized structure in Banach spaces; new geometric phenomena for Banach and Hilbert spaces. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, 955–965.

[OS2] E. Odell, T. Schlumprecht. The distortion problem. *Acta Math.*, **173** (1994), 259–281.

[PR] D. Pallaschke, S. Rolewicz. Foundations of mathematical optimization. Convex analysis without linearity. Mathematics and its Applications, **388**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[P] S. Prus. Nearly uniformly smooth Banach spaces, *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, **3** (1989), 507–521.

[RZ] J. Revalski, N. Zhivkov. Best approximation problems in compactly uniformly rotund spaces. *J. Convex Anal.* **19** (2012), no. 4, 1153—1166.

[R] S. Rolewicz. On Δ-uniform convexity and drop property. *Studia Math.*, **87** (1987), 181–191.

[S] Th. Schlumprecht. An arbitrarily distortable Banach space. *Israel J. Math.*, **76** (1991), 81–95.

[Si] I. Singer. Bases in Banach spaces II. Springer-Verlag, 1981.

[Tao] T. Tao. *Open question: deterministic uup matrices*, Weblog at http://terrytao.wordpress.com (2007, July 02).

[T] V. N. Temlyakov. Greedy approximations with regard to bases. International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 1479–1504.

[T-J] N. Tomczak-Jaegermann. From finite- to infinite-dimensional phenomena in geometric functional analysis on local and asymptotic levels. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 731–742.

[W] P. Wojtaszczyk. Greedy algorithm for general biorthogonal systems. *J. Approx. Theory*, **107** (2000), 293–314.

ДКуцарова