Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационния труд на Детелина Кирилова Камбурова на тема

Вариационни принципи за supinf задачи с ограничения и равновесие в некооперативни игри

за получаване на образователната и научна степен

"ДОКТОР"

Рецензент: проф. д-р Цветомир Цачев

Представеният дисертационен труд съдържа 62 страници, оформени в увод, три глави, заключителни бележки и цитирана литература, съдържаща 49 заглавия.

Изложението и цитираните литературни източници ми дават основание да считам, че авторката много добре познава състоянието на проблемите, предмет на дисертационния труд.

Съдържанието на отделните глави е както следва:

В първа глава са доказани съществуване и единственост на равновесие в олигопол на Cournot, който се моделира като игра с пълна информация, в която N играчи (фирми) произвеждат идентичен продукт и се конкурират чрез произведеното от тях количество. Съществуването на равновесие е следствие от резултати на Debreu, Glicksberg и Fan, публикувани през 1952 г. За да могат тези резултати да бъдат приложени, е необходимо функциите на печалбата на играчите да бъдат квазивдлъбнати, доказателството на което е основният принос в тази глава. Оригиналността на разглежданията се състои в предположенията за ценовата функция (цената като функция на общото количество произведен продукт) - тя (бидейки дефинирана за неотрицателни стойности на аргумента си) е със строго положителни стойности, строго намаляваща, непрекъсната и (-1)-вдъбната. За да бъде изведена квазивдлъбнатостта на фунциите на печалбата са получени редица свойства на (-1/n)-вдлъбнатите функции, при което е демонстрирана добра математическа сръчност.

Доказателството на единствеността на равновесието следва идеята от цитираната под № 47 в библиографията статия на von Mouche и Quartieri от 2013 г., което е коректно отбелязано в дисертационния труд. В доказателството на един от подготвителните за това резултати (Теорема 1.3.2 на стр. 20) е допусната техническа неточност: въведеното на ред 10 отгоре на стр. 21 количество x_1 не е длъжно да е строго положително, а само неотрицателно, например, ако две различни равновесия са $a = (1, 1, 0, 0, 0)$ и $b = (1, 1, 1, 1, 1)$, то $x_1 = 2 - (5 - 3) = 0$. Въпреки това, заключението на Теорема 1.3.2 остава в сила. Причината е, че заключението на Следствие 1.2.9 (на стр. 18), което се използва в доказателството на Теорема 1.3.2, остава вярно и при предположение $0 \leq x_1$, а не само при направеното във формулировката на Следствие 1.2.9 предположение $0 < x_1$.

Предмет на разглеждане в Глава 2 са смущения на inf и supinf задачи с ограничения за функции, дефинирани в напълно регулярни топологични пространства. В § 2.2 е доказан вариационен принцип за задачата

$$\inf_{x \in A} h(x),$$

където A е затворено подмножество на напълно регулярното топологично пространство Z, $h : Z \to (-\infty, +\infty]$ е собствена и полунепрекъсната отдолу функция, която е ограничена отдолу върху множеството A. В дисертационния труд е отбелязано, че въпросният вариационен принцип е вариант с ограничения (минимизира се върху A, а не върху цялото Z) на резултат на Кендеров и Ревалски от 2010 г., отнасящ се за същата задача, но с минимизация върху цялото Z. Той (доказаният в дисертацията вариационен принцип) е в основата на интересно доказателство на два известни резултата - теоремата на Caristi за неподвижна точка и вариационния принцип на Ekeland, което е изложено в дисертационния труд (Теорема 2.2.3).

В § 2.3 е доказан (Теорема 2.3.1) вариационен принцип за задачата

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in K(x)} f(x, y),$$

където X и Y са напълно регулярни топологични пространства, $f : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ е полунепрекъсната отгоре в $X \times Y$ разширена реалнозначна функция и $K : X \rightrightarrows Y$ е полунепрекъснато отдолу в X многозначно изображение със затворени непразни образи. При допълнителни предположения ((П3) и (П4) на стр. 31) е доказано, че разглежданата задача може да се смути с непрекъснати ограничени функции $p : X \to [0, +\infty)$ и $q : Y \to [0, +\infty)$ с малка равномерна норма, така, че смутената задача да има решение. Както е отбелязано в дисертационния труд, доказателството следва това на съответно твърдение от статия на Кендеров и Ревалски в Доклади на БАН от 2017 г., където минимизацията по y вместо да е с ограничения (върху $K(x)$), е върху цялото пространство Y. Също така е доказано (Теорема

2.3.4), че множеството от двойки функции от $C(X) \times C(Y)$, както и множеството от функции от $C(X \times Y)$, смутената чрез елементите на всяко от които supinf задача притежава решение, са гъсти в $C(X) \times C(Y)$ и в $C(X \times Y)$ съответно.

В § 2.4 е доказано (Теорема 2.4.1), че при допълнителното предположение за съществуване на изброима локална база в пространството X, смутената supinf задача не само притежава решение, но е и sup-коректно поставена (понятието sup-коректност, въведено от Кендеров и Lucchetti през 1996 г. е дадено в Дефиниция 2.1.1 на стр. 24). И за доказателството на тази теорема е отбелязано в дисертационния труд, че то следва това на съответното твърдение (Твърдение 2.10) от статията на Кендеров и Ревалски в Доклади на БАН от 2017 г. (спомената по-горе), където отново минимизацията по y вместо да е с ограничения (върху $K(x)$), е върху цялото пространство Y. Теореми 2.4.2 и 2.4.3 дават харарактеризации на коректно поставени supinf задачи.

В Глава 3 са разгледани въпроси, свързани с понятията „осигурена печалба" и „съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване" („disjoint payoff matching (DPM)") за некооперативни игри с краен брой играчи, като акцентът е за случая с прекъснати функции на печалбата. Понятието „игра с осигурена печалба" е въведено от Reny през 1999 г. В своя статия от 2014 г. Allison и Lepore въвеждат понятието „игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване" и доказват, че ако една игра е компактна (множеството от стратегии на всеки играч е компактно топологично пространство и функциите на печалбата на всички играчи са ограничени) и притежава DPM свойството, то нейното разширение в смесени стратегии е игра с осигурена печалба. През 1986 г. P. Dasgupta и E. Maskin въвеждат понятието „игра със слабо осигурена печалба ". В § 3.2 се въвежда понятието „игра със слаби съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване" („weak disjoint payoff matching (WDPM)") (Дефиниция 3.2.1). Отбелязано е, че то обобщава понятието „игра със съответствия във функцията на печалбата с ограничено множество от общи точки на прекъсване". Основният резултат в тази глава е Теорема 3.2.2, утвърждаваща, че ако една игра е компактна и удовлетворява условието WDPM, то нейното разширение в смесени стратегии е игра със слабо осигурена печалба. Той е подобен на съответния резултат на Allison и Lepore от 2014 г. и, както е отбелязано в дисертацията, доказателството му следва схемата на доказателството на последния. Разглежданите в настоящата глава въпроси са свързани с доказателството на съществуване на равновесие по Nash в некооперативни игри с краен брой играчи с прекъснати функции на печалбата.

Резултатите от представения дисертационен труд са публикувани в 4 статии, от които:
– една, в съавторство с D. Gaumont и Ю. Ревалски, във Vietnam Journal of Mathematics

(2019 г.), SJR 0.375;
– една, в съавторство Р. Маринов, в Mathematica (2019 г.), SJR 0.223;
– една, в съавторство Р. Маринов, в Geometry, Integrability and Quantization (2022 г., приета за публикуване), SJR за 2021 г. 0.22;
– една, самостоятелна, в Доклади на БАН (2020 г.), IF 0.378, SJR 0.244;

Изброеното дотук ми дава основание убедено да препоръчам на Почитаемото Научно жури да присъди на Детелина Кирилова Камбурова образователната и научна степен „Доктор“.

12-ти януари 2023 г. проф. д-р Цветомир Цачев
гр. София