ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И
ИНФОРМАТИКА НА БАН

Диана Кирилова Неделчева

ТЕОРЕМИ ЗА НЕЯВНАТА ФУНКЦИЯ ЗА ОБОБЩЕНИ УРАВНЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за получаване на образователна и научна степен " Доктор"

Научен ръководител: чл.кор.проф. д.м.н. Ю. Ревалски

Рецензенти:

София, 2015 г.

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И
ИНФОРМАТИКА НА БАН

Диана Кирилова Неделчева

ТЕОРЕМИ ЗА НЕЯВНАТА ФУНКЦИЯ ЗА ОБОБЩЕНИ УРАВНЕНИЯ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за получаване на образователна и научна степен " Доктор"

София, 2015 г.

Дисертационния труд съдържа 106 страници, от които 96 страници основен текст, оформени в увод, 3 глави, анекс, общи изводи и списък на използваната литература от 27 заглавия, от които 1 на кирилица и 26 на латиница.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... г. от .... ч. в .... на открито заседание на жури, сформирано със заповед ќ......./........ г. на Директора на ИМИ на БАН. Материалите по защитата (дисертацията, рецензиите и становищата) са на разположение на интересуващите се във ..., стая ... на ИМИ на БАН.

Цел, актуалност и мотивировка на темата

В много въпроси от естествознанието се стига до ситуации, в които се търси решение на някакво функционално уравнение с включени в него параметри. Важен въпрос при такава задача е дали решението на това уравнение може да се разглежда като функция на тези параметри и, ако може, какви свойства ще притежава една такава функция. Така се достига до класическата теорема за неявната функция, която в исторически план е получена първо за функции на една променлива, след това за функции на няколко променливи, за да се достигне до уравнения в безкрайномерни пространства.

Първият въпрос, който възниква, разглеждайки класическата теорема за неявната функция, е как да бъдат отслабени стандартните предположения за диференцируемост. На второ място - как идеите, заложени в доказателството на класическата теорема за неявната функция, могат да бъдат приложени и за по-общи задачи, а не само за уравнения. Например, при решаването на оптимизационни задачи с ограничения се стига до решаването на системи от неравенства с параметър, при което решението се оказва, че не е диференцируемо, а притежава някакви по-слаби свойства - например е липшицово. Така в исторически план се достига до така наречените *вариационни неравенства*, а по-късно и до понятието *обобщено уравнение*.

Като полезен инструмент във вариационния анализ се използва апаратът на многозначните изображения, което позволява да се въведат разширения на понятията непрекъснатост, диференцируемост и регулярност, като при това се използват различни модификации на тези понятия.

Обобщените уравнения от вида

$$\text{намерете} \quad x \in X \quad \text{така, че} \quad 0 \in f(x) + F(x), \tag{1}$$

където $f : X \to Y$ е еднозначно изображение, $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение, а пространствата X и Y са банахови, са въведени от S. M. Robinson в края на 20 век като общ инструмент за описване, анализиране и решаване на различни проблеми по един унифициран начин. По-ранни резултати в тази насока са дадени в [25]. Когато $F = \{0\}$, (1) е уравнение; когато F е положителният ортант на $\mathbb{R}^n$, (1) е система неравенства; когато F е нормален конус за изпъкнало и затворено множество, (1) представлява вариационно неравенство.

Обобщените уравнения служат като абстрактен модел за решаването на множество вариационни задачи като: задачи на линейното и нелинейното оптимиране; системи нелинейни уравнения; необходими условия от първи ред на нелинейното оптимиране и т.н. Те също са широко използвани при решаване на задачи в областта на техниката и икономиката. Повече информация, относно тези приложения и много други, е налична в [16] и [9].

Основно понятие при получаването на теореми за неявната функция за обобщени уравнения е понятието *изображение на решението*, което в общия случай е многозначно изображение, при което на всяка стойност на параметъра се съпоставят всички съответни решения (ако има все пак такива). Въпросът, който възниква, е дали това изображение на решението може да бъде графично локализирано така, че да се получи еднозначна функция, която всъщност е търсената неявна функция.

За да намери решение на (1), в [5] и [6] A. L. Dontchev разглежда Нютонов тип метод от вида

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),\ \ k = 0, 1, \dots,$$

където $\nabla f(x_k)$ е производната по Фреше на f в точка x_k, и доказва неговата сходимост и устойчивост.

В [6] и [11] A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar разглеждат параметризирано обобщено уравнение от вида

$$\text{да се намери} \quad x \in X \quad \text{така, че} \quad 0 \in f(p, x) + F(x)$$

и заедно с него изображение на решението

$$S : p \mapsto \{x | f(p, x) + F(x) \ni 0\} \ \text{ за } \ p \in P.$$

За фиксирана стойност на параметъра p от банаховото пространство P, Dontchev и Rockaffelar избират начална точка x_0 и построяват итерационна редица $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, за $k = 0, 1, 2, ...$, като избират x_{k+1} да е решение на помощното обобщено уравнение

$$0 \in f_k(p, x_{k+1}) + F(x_{k+1}),$$

където

$$f_k(p, x) = f(p, x_k) + \nabla_x f(p, x_k)(x - x_k).$$

A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar доказват сходимостта на този метод, както и теорема за неявната функция за този метод. Този итерационен процес всъщност представлява стандартният метод на Нютон за решаване на нелинейни уравнения, когато F е нулевото изображение.

Методът на Нютон е основно средство за доказване на различни теореми от типа на теоремите за обратната функция. Метод от Нютонов тип също е използван и от Lyusternik и Graves за да получат теореми, свързани с метрично регулярни функции. Освен това "обобщение"на метода на Нютон води до актуални продължения на тези теореми, за многозначни изображения (по отношение на метрична регулярност) [7], [1]. Метода на Нютон за негладки уравнения и обобщени уравнения е подробно разгледан в книгите на Klatte и Kummer [20] и Facchinei и Pang[17]. Robinson[26] доказва, че методът на Нютон е приложим за решаване на нелинейни уравнения $f(x) = 0$, при които функцията притежава поточкова апроксимация A и при условие, че решаването на уравнението $A(x, z) = 0$ по отношение на z и при зададено x е възможно от изчислителна гледна точка. В този случай, при зададена начална точка x_0, притежаваща определени свойства, се получава редица x_n за $n = 0, 1 \ldots,$ като всяка следваща итерация се получава като решение на уравнението $A(x_n, x_{n+1}) = 0$. Използувайки тази идея, Robinson доказва теорема за локална сходимост на метода на Нютон от типа на Канторович. За обобщени уравнения това понятие се използува от Дончев (1996г.)[7]. За функции, притежаващи PBA-апроксимация в [7] е доказана теорема за сходимост на итерационния процес за решаване на негладки обобщени уравнения. При тези разглеждания вместо решаването на уравнението (1) се решава уравнението

$$0 \in A(x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}), \;\; k = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Geoffroy, Piétrus [17] доказват сходимост на итерационния процес (2), при условие, че $f(x)$ притежава (n, α)-поточкова апроксимация $A(u, v)$. При доказателството на теоремата, съществено е използувана лемата за неподвижната точка, дадена в Dontchev, Hager [13].

С цел да намери решение на (1) Р. Маринов [21] разглежда въпроса за локалната сходимост и устойчивостта на метод на хордите

$$0 \in f(x_k) + A(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),$$

където $f : X \to Y$ е функция, чиято производна по Фреше е $L-$липшицова функция, а A е линеен непрекъснат оператор, дефиниран в банаховото пространство X със стойности в банаховото пространство Y. Лесно се забелязва, че в случая, когато $A = \nabla f(x_0)$, метода на хордите се редуцира до модифицирания метод на Нютон

$$0 \in f(x_k) + \nabla f(x_0)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}).$$

Като предимство на метода на хордите може да се посочи факта, че не се налага пресмятането на производната по Фреше на функцията f, което в някои случаи може да се окаже трудна задача.

В [18] M. H. Geoffroy и A. Piétrus съпоставят на

$$0 \in f(x) + g(x) + F(x),$$

метода на секущите

$$0 \in f(x_k) + g(x_k) + (\nabla f(x_k) + [x_{k-1}, x_k; g])(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}),$$

където f и g са функции, F е многозначно изображение, $\nabla f(x)$ е производната по Фреше на f в x и $[x, y; g]$ е разделената разлика от първи ред, съответстваща на g в точките x и y и доказват сходимостта на този метод.

Целта на настоящата работа е решаването на общата задача от вида:

$$\text{да се намери} \quad x \in X \quad \text{така, че} \quad 0 \in f(p, x) + F(x) \;\; \text{и}$$

да се намери $\quad x \in X \quad$ така, че $\quad 0 \in f(p,x) + g(p,x) + F(x),$

където f и g са функции, а F е многозначно изображение.

Обект на изследване са гореспоменатите итерационни методи (метод от Нютонов тип, включващ поточкова апроксимация; метод на хордите; метод на секущите), с тази разлика, че в дисертацията е доказана сходимостта на тези методи за решаване на обобщени уравнения с параметър. Доказани са теореми за неявната функция за изображенията на решенията на тези уравнения. При доказателството на теоремите в дисертацията са използвани техники, разработени от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar в [11] за метод на Нютон, като тези техники са модифицирани за всеки от разглежданите методи.

Обзор на дисертацията

Дисертацията се състои от увод, три глави и заключение.

Уводът въвежда в тематиката и представя най-общо актуалното състояние на изследванията в областта. Изяснява кои са основните цели и обекти на дисертацията и представя накратко съдържанието на отделните глави.

Глава 1. Термини, означения и предварителни резултати

В първата глава се въвеждат общите означения, възприети в дисертацията, и се представя основната система от понятия и твърдения, необходими за изложението. Дефинициите и твърденията са взаимствани от монографията [11].

Нека X, Y и P са банахови пространства. За нормата във всяко от тези пространсва ще използваме едно и също означение $||\cdot||$.

Многозначното изображение $F : X \rightrightarrows Y$ се нарича ***метрично регулярно*** в $\overline{x}$ за $\overline{y}$, когато $\overline{x} \in F(\overline{y})$ и съществува константа $k \geq 0$ заедно с околности U на $\overline{x}$ и V на $\overline{y}$ така, че

$$d(x, F^{-1}(y)) \leq kd(y, F(x)), \qquad (x, y) \in U \times V.$$

Инфимума на всички такива константи k, взети по всевъзможните избори на околностите U и V, за които горното неравенство е изпълнено се нарича ***модул на метрична регулярност*** на F в $\overline{x}$ за $\overline{y}$ и се означава с $\operatorname{reg}(F; \overline{x}|\overline{y})$. Липсата на метрична регулярност се означава с $\operatorname{reg}(F; \overline{x}|\overline{y}) = \infty$.

Нека A и C са две подмножества на X. Ако означим ***отклонението*** от множеството A до множеството C с

$$e(C, A) := \sup\{d(x, A) : x \in C\}, \text{ където } d(x, A) = \operatorname{dist}(x, A).$$

Многозначното изображение $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ се нарича ***псевдо-липшицово*** с константа k около $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$, ако съществуват околности V на $\overline{y}$ и U на $\overline{x}$ така, че

$$e(F^{-1}(y_1) \cap U, F^{-1}(y_2)) \leq k\|y_1 - y_2\|$$

за всяко y_1, $y_2 \in V$. Инфимума на всички такива константи k, взети по всевъзможните избори на околностите U и V, за които горното неравенство е изпълнено се нарича ***липшицов модул*** на F в y_0 за x_0 и се означава с $\operatorname{lip}(F^{-1}; \overline{y}|\overline{x})$.

В [10], горното свойство е наречено ***Обен непрекъснатост***, а изображенията, удовлетворяващи това свойство, са наречени Обен непрекъснати. Penot [23] показва, че понятието метрична регулярност на многозначното изображение F е еквивалентно на понятието псевдолипшицовост на обратното изображение F^{-1}, като $\operatorname{reg}(F; \overline{x}|\overline{y}) = \operatorname{lip}(F^{-1}; \overline{y}|\overline{x})$.

Графична локализация на $F : X \rightrightarrows Y$ в $\overline{x}$ за $\overline{y}$, където $\overline{y} \in F(\overline{x})$ е многозначно изображение, чиято графика в $X \times Y$ е $(U \times V) \cap \operatorname{gph} F$, за някои околности U на $\overline{x}$ и V на $\overline{y}$.

Изображението $F : X \rightrightarrows Y$, за което $(\overline{p}, \overline{x}) \in \operatorname{gph} F$, се нарича ***силно метрично регулярно*** в $\overline{x}$ за $\overline{y}$, ако неговото обратно изображение F^{-1} има еднозначна липшицова локализация около $\overline{y}$ за $\overline{x}$.

Глава 2.

Итерационни методи за решаване на параметризирани обобщени уравнения. Секвенциални теореми за неявната функция.

Нека X, Y и P са банахови пространства, като $f : P \times X \to Y$ е непрекъсната функция, $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение и $\operatorname{gph} F$ е затворено множество.

Метод от Нютонов тип включващ поточкова апроксимация

Функцията $A : Q \times \Omega \times \Omega \to Y$ се нарича ***поточкова апроксимация,*** върху отворените подмножества Ω на X и Q на P, спрямо x равномерно по p за функцията $f : P \times \Omega \to Y$, ако съществува константа k така, че следните условия са изпълнени за всяко $u, v \in \Omega$ и $p, p' \in Q$:
(a) $\|f(p,v) - A(p,u,v)\| \leq \dfrac{1}{2}k\|u-v\|^2$;
(b) функцията $A(p,u,\cdot) - A(p',v,\cdot)$ е липшицова върху Ω с липшицова константа $k\left(\|u-v\| + \|p-p'\|\right)$.
Функцията A е поточкова апроксимация с константа k, спрямо x равномерно по p в точката $(\overline{p}, \overline{x})$, ако съществуват околности съответно Ω и Q за $\overline{x}$ и $\overline{p}$ такива, че горните условия да са изпълнени.

За да намерим решение на параметризираното обобщено уравнение

$$0 \in f(p,x) + F(x), \tag{3}$$

разглеждаме метода

$$0 \in A(p, x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}), \tag{4}$$

където функцията f е липшицова спрямо p равномерно по x в околност на точката $(\overline{p}, \overline{x})$, функцията $A : P \times X \times X \to Y$ е поточкова апроксимация на f спрямо x равномерно по p в точката $(\overline{p}, \overline{x})$ и $(\overline{p}, \overline{x})$ е решение на (3). Показваме, че този метод е сходящ към стойността $s(p)$ на липшицовата локализация на изображението на решението

$$S : p \mapsto \{x | f(p, x) + F(x) \ni 0\} \text{ за } p \in P. \tag{5}$$

За да намерим приближено решение на (3), избираме начална точка x_0 и от метода (4) получаваме решения, които образуват безкрайна редица $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ на банаховото пространство $l_\infty(X)$ с елементи $x_k \in X,\ \ k = 1, 2, \ldots$. Нормата в $l_\infty(X)$ е

$$\|\xi\|_\infty = \sup_{k \geq 1} \|x_k\|.$$

Дефинираме изображение $\Xi : X \times P \rightrightarrows l_\infty(X)$, чрез

$$\Xi : (u, p) \mapsto \left\{ \xi \in l_\infty(X) \mid \bigcap_{k=0}^{\infty} A(p, x_k, x_{k+1}) + F(x_{k+1}) \ni 0 \text{ с } x_0 = u \right\}, \tag{6}$$

чиито стойности за дадена точка (u, p) са множеството от всички редици $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, получени от (4) за стойността p на параметъра, започвайки от u. Ако $\overline{x}$ е решение на (3) за $\overline{p}$, константната редица $\overline{\xi} = \{\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \ldots\}$ удовлетворява $\overline{\xi} \in \Xi(\overline{p}, \overline{x})$.

A.L. Dontchev и R.T. Rockaffelar доказват равномерната сходимост на метода на Нютон в [6] и [11]. Следващата теорема представя аналогичен резултат за случая, когато f не притежава производна по Фреше, но има поточкова апроксимация.

Теорема 1. *(Равномерна сходимост). За обобщеното уравнение (3) с изображение на решението S в (5), нека $\overline{x} \in S(\overline{p})$ и A е поточкова апроксимация за f в $(\overline{p}, \overline{x})$. Нека $\widehat{\mathrm{lip}}_p(f; (\overline{p}, \overline{x})) < \infty$ и изображението*

$$G(x) = A(\overline{p}, \overline{x}; x) + F(x),$$

е силно регулярно в $\overline{x}$ за 0 с липшицова локализация σ на обратното изображение G^{-1} в 0 за $\overline{x}$.

Тогава за всяка константа $\gamma > \frac{1}{2}k\,\mathrm{lip}(\sigma;0)$, съществуват околности Q на $\overline{p}$ и U на $\overline{x}$ така, че за всяко $p \in Q$ и $u \in U$ съществува точно една редица $\xi(u,p)$ с компоненти $x_1,\dots,x_k,\dots$, всички принадлежащи на U и получени от метод (4), започвайки от u за стойността p на параметъра. Тази редица е сходяща към стойността $s(p)$ на липшицовата локализация s на S в $\overline{p}$ за $\overline{x}$. Сходимостта е квадратична с константа γ, т.е.

$$\|x_{k+1} - s(p)\| \le \gamma \|x_k - s(p)\|^2, \qquad k \ge 0. \tag{7}$$

С други думи, изображението Ξ в (6) има еднозначна графична локализация ξ в $(\overline{p},\overline{x})$ за $\overline{\xi}$. Освен това, за u близо до $\overline{x}$ и p близо до $\overline{p}$ стойността $\xi(u,p)$ на тази локализация е редица сходяща към решението $s(p)$ за p, както е показано в (7).

Следващата теорема е аналог на теоремата за неявната функция за метода на Нютон, доказана в [6] и [11] от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar. В дисертацията теоремата е доказана за случая, когато f не притежава производна по Фреше, но има поточкова апроксимация.

Теорема 2. *(Теорема за неявната функция) Нека предположенията на Теорема 1 са изпълнени. Тогава еднозначната локализация ξ на изображението Ξ в $(\overline{p},\overline{x})$ за $\overline{\xi}$ е липшицова в околност на $(\overline{p},\overline{x})$, като*

$$\widehat{\mathrm{lip}}_u(\xi;(\overline{x},\overline{p})) = 0 \qquad \widehat{\mathrm{lip}}_p(\xi;(\overline{x},\overline{p})) \le \mathrm{lip}(\sigma;0).\widehat{\mathrm{lip}}_p(f;(\overline{p},\overline{x})).$$

Метод на хордите.

Нека $\mathcal{L}(X,Y)$ е множеството от всички линейни непрекъснати оператори, дефинирани в нормираното пространство X, със стойности в нормираното пространство Y.

Разглеждаме параметризираното обобщено уравнение (3) с изображение на решението (5). За да намерим решение на това уравнение, разглеждаме метода

$$0 \in f(p,x_k) + A(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \tag{8}$$

където $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, функцията f е непрекъснато Фреше диференцируема спрямо x функция с производна $\nabla_x f(p, x)$, $f(p, x)$ и $\nabla_x f(p, x)$ са непрекъснати, f е липшицова спрямо p равномерно по x около $(\overline{p}, \overline{x})$, $\nabla_x f$ е липшицова спрямо x равномерно по p в околност на $(\overline{p}, \overline{x})$, Основното предимство на метода на хордите е, че няма нужда от пресмятането на производната на функцията f.

Разглеждаме метод (8) с дадена начална точка x_0. От метода на хордите получаваме решения, които образуват безкрайна редица $\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ на банаховото пространство $l_\infty(X)$ с елементи $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots$. Дефинираме изображението $\Xi : X \times P \rightrightarrows l_\infty(X)$, чрез

$$\Xi : (u, p) \mapsto \left\{ \xi \in l_\infty(X) \mid \bigcap_{k=0}^{\infty} f(p, x_k) + A(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}) \ni 0 \text{ с } x_0 = u \right\}, \quad (9)$$

чиито стойности за дадена точка (u, p) са множеството от всички редици $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, получени от (8) за стойността p на параметъра, започвайки от u. Ако $\overline{x}$ е решение на (3) за $\overline{p}$, константната редица $\overline{\xi} = \{\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \ldots\}$ удовлетворява $\overline{\xi} \in \Xi(\overline{p}, \overline{x})$.

Теорема 3. *(Равномерна сходимост на метод на хордите). Разглеждаме обобщеното уравнение (3) с изображение на решението S в (5), като $\overline{x} \in S(\overline{p})$. Нека*

$$\widehat{\mathrm{lip}}_p(f; (\overline{p}, \overline{x})) + \widehat{\mathrm{lip}}_x(\nabla_x f; (\overline{p}, \overline{x})) < \infty$$

и изображението

$$G(x) = f(\overline{p}, \overline{x}) + \nabla_x f(\overline{p}, \overline{x})(x - \overline{x}) + F(x), \quad \text{за което } G(\overline{x}) \ni 0,$$

е силно регулярно в $\overline{x}$ за 0 със съответната липшицова локализация σ на обратното изображение G^{-1} в 0 за $\overline{x}$ и операторът $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ е такъв, че $3.\, \mathrm{lip}(\sigma, 0)\|\nabla_x f(\overline{p}, \overline{x}) - A\| < 1$.

Тогава за всяко γ такова, че

$$\frac{1}{3} > \gamma > \mathrm{lip}(\sigma, 0)\|\nabla_x f(\overline{p}, \overline{x}) - A\|,$$

съществуват околности Q на $\overline{p}$ и U на $\overline{x}$ така, че за всяко $p \in Q$ и $u \in U$ съществува точно една редица $\xi(u,p)$ с елементи $x_1, \ldots, x_k, \ldots$, принадлежащи на U, получени от метод (8), с начална точка и за стойността p на параметъра. Тази редица е сходяща към стойността $s(p)$ на липшицовата локализация s на изображението на решението S в $\overline{p}$ за $\overline{x}$. Освен това сходимостта е q-линейна с константа γ, т.е.

$$\|x_{k+1} - s(p)\| \leq \gamma \|x_k - s(p)\|, \qquad k \geq 0. \tag{10}$$

С други думи, изображението Ξ в (9) притежава еднозначна графична локализация ξ в $(\overline{p}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$ и за стойности на u и p съответно близо до $\overline{x}$ и $\overline{p}$, стойността $\xi(u,p)$ на тази локализация е редица, която е сходяща към решението $s(p)$ за p, както е показано в (10).

В следващата теорема е доказано, че еднозначната локализация ξ на изображението Ξ в $(\overline{p}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$ е липшицова около $(\overline{p}, \overline{x})$.

Теорема 4. *(Теорема за неявната функция за метод на хордите) Нека условията на предната теорема са в сила.*

Тогава еднозначната локализация ξ на изображението Ξ в $(\overline{p}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$ е липшицова около $(\overline{p}, \overline{x})$, освен това са в сила следните условия

$$\widehat{\mathrm{lip}}_u(\xi; (\overline{x}, \overline{p})) \leq \frac{1}{2} \qquad \widehat{\mathrm{lip}}_p(\xi; (\overline{x}, \overline{p})) \leq \frac{\widehat{\mathrm{lip}}_p(f; (\overline{p}, \overline{x}))}{\|\nabla_x f(\overline{p}, \overline{x}) - A\|}.$$

Метод на секущите.

Оператор от пространството $\mathcal{L}(P \times X, Y)$, означен с $[p, x_0, y_0; g]$ се нарича ***частна разделена разлика от първи ред*** спрямо x равномерно по p за оператора $g : P \times X \to Y$ около $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y})$, ако съществуват околности Q на $\overline{p}$, U на $\overline{x}$ и $\overline{y}$ така, че да са в сила следните условия:

(a) $[p, x_0, y_0; g](y_0 - x_0) = g(p, y_0) - g(p, x_0)$, за $x_0 \neq y_0$, $x_0, y_0 \in U$ и $p \in Q$;

(b) Ако g е Фреше диференцируема в $x_0 \in U$, то $[p, x_0, x_0; g] = g'_x(p, x_0)$.

Казваме, че оператор от пространството $\mathcal{L}(P\times X, \mathcal{L}(P\times X, Y))$, означен с $[p, x_0, y_0, z_0; g]$ се нарича ***частна разделена разлика от втори ред*** спрямо x равномерно по p, съответстваща на оператора $g : P \times X \to Y$ около $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, ако съществуват околности Q на $\overline{p}$, U на $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$ и са в сила следните условия:

(a) $[p, x_0, y_0, z_0; g](z_0 - x_0) = [p, y_0, z_0; g] - [p, x_0, y_0; g]$ за различните точки $x_0, y_0, z_0 \in U \quad$ и $\quad p \in Q$;

(b) Ако g е двукратно диференцируема в $x_0 \in U$, то $[p, x_0, x_0, x_0; g] = g''_{xx}(p, x_0)/2$.

Разглеждаме обобщеното уравнение от вида

$$0 \in f(p, x) + g(p, x) + F(x) \tag{11}$$

с изображение на решението

$$S : p \mapsto \{x | f(p, x) + g(p, x) + F(x) \ni 0\} \text{ за } p \in P. \tag{12}$$

Нека $(\overline{p}, \overline{x})$ е решение на уравнението (11). Функцията f е Фреше диференцируема спрямо x около $(\overline{p}, \overline{x})$ с $\nabla_x f$ непрекъсната. Функцията g е Фреше диференцируема спрямо x в $(\overline{p}, \overline{x})$, но около около $(\overline{p}, \overline{x})$ може да не е. Освен това f и g са липшицови спрямо p равномерно по x в околност на $(\overline{p}, \overline{x})$ и $\nabla_x f$ е липшицова спрямо x равномерно по p около $(\overline{p}, \overline{x})$. Разглеждаме итерационният метод

$$0 \in f(p, x_k) + g(p, x_k) + \Big(\nabla_x f(p, x_k) + [p, x_{k-1}, x_k; g]\Big)(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}), \tag{13}$$

$k = 2, 3, ...$, където x_0 и x_1 са различни, предварително избрани точки в околност на $\overline{x}$. За разделената разлика $[\cdot, x', x''; g]$ предполагаме, че е непрекъсната в $\overline{p}$ равномерно по x' и x'' около точката $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$. За разделената разлика от втори ред на функцията g, се предполага, че в околност на $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x}, \overline{x})$ е в сила $\|[p, x, y, z; g]\| \leq K, \;\; K \in \mathbb{R}$.

За да намерим решение на уравнение (11), избираме начални точки x_0 и x_1 и разглеждаме метод (13). Разглеждаме метода като включване, решенията на което образуват безкрайна редица $\xi = \{x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots\}$ на банаховото пространство $l_\infty(X)$ с елементи

$x_k \in X,\ \ k = 2, 3, \ldots$. Дефинираме изображението $\Xi : X \times X \times P \rightrightarrows l_\infty(X)$ чрез

$$\begin{aligned}\Xi : (u, v, p) \mapsto \Bigg\{ \xi \in l_\infty(X) \mid \bigcap_{k=1}^{\infty} & f(p, x_k) + g(p, x_k) \\ +(\nabla_x f(p, x_k) + [p, x_{k-1}, x_k; g])&(x_{k+1} - x_k) + F(x_{k+1}) \ni 0 \\ \text{с } x_0 = u \text{ и } x_1 = v \Bigg\}&,\end{aligned} \tag{14}$$

чиито стойности за дадена точка (u, v, p) са множеството от всички редици $\{x_k\}_{k=2}^{\infty}$, получени от метода (13) за стойността p на параметъра, стартирайки от u и v. Константната редица $\overline{\xi} = \{\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \ldots\}$ удовлетворява $\overline{\xi} \in \Xi(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$.

Теорема 6. *(Равномерна сходимост на метод на секущите). По отношение на обобщеното уравнение (11) с изображение на решението S в (12), нека $\overline{x} \in S(\overline{p})$. Нека разделената разлика $[\cdot, x', x''; g]$ е непрекъсната в $\overline{p}$ равномерно по x' и x'' около точката $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$ и*

$$\widehat{\mathrm{lip}}_p(g; (\overline{p}, \overline{x})) + \widehat{\mathrm{lip}}_p(f; (\overline{p}, \overline{x})) + \widehat{\mathrm{lip}}_x(\nabla_x f; (\overline{p}, \overline{x})) < \infty,$$

изображението

$$G(x) = f(\overline{p}, \overline{x}) + g(\overline{p}, x) + \nabla_x f(\overline{p}, \overline{x})(x - \overline{x}) + F(x)$$

е силно регулярно в $\overline{x}$ за 0 с еднозначна липшицова локализация σ на обратното изображение G^{-1} в 0 за $\overline{x}$ и нека съществува положителна константа K такава, че за всяко x, y и z от околност на $\overline{x}$ да е изпълнено $\|[p, x, y, z; g]\| \leq K$.

Тогава за всяко

$$\gamma > \mathrm{lip}(\sigma; 0).\left(K + \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{lip}}_x(\nabla_x f; (\overline{p}, \overline{x}))\right),$$

съществуват околности Q на $\overline{p}$ и U на $\overline{x}$ така, че за всяко $p \in Q$ и $u, v \in U$ съществува точно една редица $\xi(u, v, p)$ с елементи $x_2, \ldots, x_k, \ldots$, всички принадлежащи на U и получени от метод

(13) за стойността p на параметъра при начални точки u и v . Редицата е сходяща към стойността $s(p)$ на липшицовата локализация s на изображението на решението S в $\overline{p}$ за $\overline{x}$. Освен това

$$\|x_{k+1}-s(p)\| \leq \gamma\|x_k-s(p)\|.\max\left\{\|x_k - s(p)\|, \|x_{k-1} - s(p)\|\right\}, \quad (15)$$

за всяко $k \geq 1$. С други думи, изображението Ξ в (14) притежава еднозначна локализация ξ в $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$, като за u и v близо до $\overline{x}$, и p близо до $\overline{p}$ стойността $\xi(u, v, p)$ на локализацията е редица, която е сходяща към решението $s(p)$ за стойността p на параметъра, както е показано в (15).

В следващата теорема е доказано, че еднозначната локализация ξ на изображението Ξ в $(\overline{p}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$ е липшицова около $(\overline{p}, \overline{x})$.

Теорема 7. *(Теорема за неявната функция за метод на секущите) Нека са изпълнени предположенията на Теорема 6. Освен това са изпълнени допълнително условията:*

$$\operatorname{lip}(\nabla_x f; (\overline{p}, \overline{x})) + \operatorname{lip}([g]; (\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})) < \infty.$$

Тогава еднозначната локализация ξ на изображението Ξ в $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$ за $\overline{\xi}$ е липшицово около $(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})$, като

$$\widehat{\operatorname{lip}}_v(\xi(\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})) = 0$$

$$\widehat{\operatorname{lip}}_p(\xi; (\overline{p}, \overline{x}, \overline{x})) \leq \operatorname{lip}(\sigma; 0)\left(\widehat{\operatorname{lip}}_p(f; (\overline{p}, \overline{x})) + \widehat{\operatorname{lip}}_p(g; (\overline{p}, \overline{x}))\right).$$

Глава 3.

Калибровъчни функции и теореми за неявното изображение.

Разглеждаме метрично пространство (P, π) за p и пълно метрично пространство (X, ρ) за x. Нека (Y, σ) е линейно метрично пространство с ***инвариантна относно транслациите метрика***, т.е.

$$\sigma(y + z, y' + z) = \sigma(y, y'), \quad \text{за} \quad \text{всяко} \quad y, y', z \in Y.$$

Подмножеството C на пълно метрично пространство е ***затворено***, ако от $d(x; C) = 0 \Rightarrow x \in C$. Също така, множеството C ще наричаме ***локално затворено*** в точка $x \in C$, ако съществува околност U на x така, че сечението $C \cap U$ е затворено. Затвореното кълбо с център x и радиус a, ще означаваме с $\mathbb{B}_a(x)$,

Теорема за неявното изображение за Обен непрекъснати многозначни изображения.

Модул функция ще наричаме всяка растяща функция $w : [0, \infty) \to [0, \infty)$, която е непрекъсната и $w(0) = 0$.

Въвеждаме по-общите понятия *липшицовост и Обен-непрекъснатост относно модул-функция*, при които вместо константа се използва модул функция.

Функцията $f : X \to Y$ се нарича ***липшицова с модул функция*** μ в $\mathbb{B}_r(x_0)$, ако е изпълнено следното условие:

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leq \mu(\rho(x_1, x_2))$$

за всяко x_1, $x_2 \in \mathbb{B}_r(x_0)$.

Многозначното изображение $F : Y \rightrightarrows X$ се нарича ***Обен непрекъснато с модул функция*** в y_0 за x_0, където $x_0 \in F^{-1}(y_0)$, ако съществуват модул функция λ и положителни константи a и b така, че за всяко $y_1, y_2 \in \mathbb{B}_b(y_0)$

$$e(F(y_1) \cap \mathbb{B}_a(x_0), F(y_2)) \leq \lambda(\sigma(y_1, y_2)).$$

Означаваме с φ^n n-тата итерация на функцията $\varphi : J \to J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, $\varphi^0(t) = t$.

Ненамаляващата функция $\varphi : J \to J$ се нарича ***Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция*** [3] върху J, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, ако е непрекъсната в нулата и

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty, \qquad \text{за} \quad \text{всяко} \quad t \in J.$$

Тук трябва да отбележим, че Ptak [24] нарича функцията $\varphi : J \to J$, удовлетворяваща горното условие ***степен на сходимост*** в J, като φ удовлетворява следното функционално уравнение

$$s(t) = t + s(\varphi(t)).$$

Следващата теорема е обобщение на принципа за свиващото изображение, разгледан в [11] от A. L. Dontchev and R.T. Rockaffelar, за многозначни изображения. Разликата е, че в дисертацията са използвани по-общи предположения съдържащи Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции вместо псевдо-свиващи многозначни изображения.

Теорема 8. *(Теорема за неподвижната точка за многозначни изображения с Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и $\overline{x} \in X$, $\Phi : X \rightrightarrows X$ е многозначно изображение и константата $a > 0$ е такава, че за всяко $x \in \mathbb{B}_a(\overline{x})$, $\Phi(x)$ е непразно затворено множество в X. Нека функцията $\varphi : J \to J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, е растяща Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, за която*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty \qquad \textit{за} \quad \textit{всяко} \quad t \in J.$$

Предполагаме, че съществува $r \in J \setminus \{0\}$ така, че да са в сила следните условия:

(a) $d(\overline{x}, \Phi(\overline{x})) < r, \qquad s(r) \le a;$

(b) $e(\Phi(u) \cap \mathbb{B}_a(\overline{x}), \Phi(v)) \le \varphi(\rho(u,v)) \quad u, v \in \mathbb{B}_a(\overline{x}).$

Тогава Φ притежава неподвижна точка в $\mathbb{B}_{s(r)}(\overline{x})$, т.е. съществува точка $x \in \mathbb{B}_{s(r)}(\overline{x})$ такава, че $x \in \Phi(x)$.

Следващата теорема е обобщение на теоремата за обратното изображение (Теорема 5E.1, стр.280, [11]), доказана от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar.

Теорема 9. *(Теорема за обратното изображение) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство, (Y, σ) е линейно метрично пространство с инвариантна относно транслациите метрика σ и $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение. Нека $\operatorname{gph} F$ е локално затворено множество около $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$. Функцията $g : X \to Y$ е липшицова с модул функция ψ в $\overline{x}$. Нека F^{-1} е Обен непрекъснато около $(\overline{y}, \overline{x})$ с модул функция φ и растящата функция $\varphi(\psi(t))$, $t \in J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, е Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, като*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty, \qquad \text{за} \quad \text{всяко} \quad t \in J \qquad \lim_{t \downarrow 0} s(t) = 0.$$

Тогава изображението $(g + F)^{-1}$ е Обен непрекъснато около $(\overline{y} + g(\overline{x}), \overline{x})$ с модул функция $\nu(t) = s(\varphi(t))$.

Нека $f : P \times X \to Y$ е функция и $(\overline{p}, \overline{x}) \in P \times X$. Функцията $h : X \to Y$ се нарича ***строга оценка*** за f спрямо x равномерно по p в $(\overline{p}, \overline{x})$ с модул функция μ, ако $h(\overline{x}) = f(\overline{p}, \overline{x})$ и съществуват модул функция μ и околности U на $\overline{x}$ и Q на $\overline{p}$ такива, че за всяко $x', x'' \in U$ и $p \in Q$ имаме

$$\sigma(r(p, x'), r(p, x'')) \le \mu(\rho(x', x'')),$$

където $r(p, x) = f(p, x) - h(x)$.

В [11] A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar предполагат, че F е метрично регулярно, а g е липшицова функция, с дадени неотрицателни константи и доказват метричната регулярност на $(g + F)^{-1}$.

В Теорема 9 ние предположихме тези свойства на F и g с модул функции и доказахме обобщение на техния резултат. Следващата теорема е обобщение на теоремата за неявното изображение (Теорема 5E.3, стр.286, [11]), доказана от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar.

Теорема 10. *(Теорема за неявното изображение) Нека (X,ρ) е пълно метрично пространство, (Y,σ) е линейно пространство с инвариантна относно транслациите метрика σ и (P,π) е метрично пространство. Нека $f : P\times X \to Y$ и $F : X \rightrightarrows Y$. Разглеждаме обобщеното уравнение $0 \in f(p,x)+F(x)$ с изображение на решението $S : p \mapsto \{x|f(p,x)+F(x) \ni 0\}$ за $p\in P$, като $\overline{x}\in S(\overline{p})$. Нека $h : X\to Y$ е строга оценка за f спрямо x, равномерно по p в $(\overline{p},\overline{x})$ с модул функция ψ, множеството $\mathrm{gph}(h+F)$ е локално затворено в $(\overline{x},0)$ и изображението $(h+F)^{-1}$ е Обен непрекъснато в 0 за $\overline{x}$ с модул функция φ. Нека растящата функция $k(t)=\varphi(\psi(t))$, $t\in J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, е Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, като*

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}k^n(t)<\infty \qquad \text{за} \quad \text{всяко} \quad t\in J \qquad \lim_{t\downarrow 0} s(t)=0.$$

и функцията f е липшицова спрямо p, равномерно по x около $(\overline{p},\overline{x})$, с модул функция χ.

Тогава S е Обен непрекъснато изображение в $\overline{p}$ за $\overline{x}$ с модул функция $s\circ\varphi\circ\chi$.

Теорема за неявната функция и силна метрична регулярност в метрични пространства.

Доказано е обобщение на принципа за свиващите изображения за еднозначни изображения, като отново са използвани по-общи предположения съдържащи Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции вместо псевдо-свиващи многозначни изображения.

Теорема 11. *(Теорема за неподвижната точка с Бианчини-Грандолфи функции за еднозначни изображения) Нека (X,ρ) е пълно метрично пространство, $\overline{x}\in X$, $\Phi : X\to X$ е непрекъсната функция. Нека функцията $\varphi : J\to J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$,* *съдържащ 0, е растяща Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, т.е.*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty, \qquad \text{\textit{за}} \quad \text{\textit{всяко}} \quad t \in J.$$

Предполагаме, че съществува константата $a > 0$ и $r \in J$ така, че да са в сила следните условия:

(*a*) $\rho(\overline{x}, \Phi(\overline{x})) \leq r, \qquad s(r) \leq a;$

(*b*) $\rho(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \varphi(\rho(u, v)), \quad u, v \in \mathbb{B}_a(\overline{x}).$

Тогава Φ притежава единствена неподвижна точка в $\mathbb{B}_{s(r)}(\overline{x})$, т.е. съществува единствена точка $x \in \mathbb{B}_{s(r)}(\overline{x})$ такава, че $x = \Phi(x)$.

Изображението $F : X \rightrightarrows Y$, за което $(\overline{p}, \overline{x}) \in \operatorname{gph} F$, се нарича ***силно метрично регулярно с модул функция*** в $\overline{x}$ за $\overline{y}$, ако неговото обратно изображение F^{-1} има еднозначна липшицова локализация около $\overline{y}$ за $\overline{x}$ с модул функция.

Следващата теорема е обобщение на теоремата за обратната функция (Теорема 5F.1, стр.292, [11]), доказана от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar.

Теорема 12. *(Теорема за обратната функция със силна метрична регулярност) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство, (Y, σ) е линейно метрично пространство с инвариантна относно транслациите метрика σ и $F : X \rightrightarrows Y$ е многозначно изображение, $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$, U е околност на $\overline{x}$, V е околност на $\overline{y}$. Функцията $g : X \to Y$ е липшицова с модул функция μ върху U. Нека $y \mapsto F^{-1}(y) \cap U$ е липшицова функция върху V с модул функция k и функцията $\varphi(t) = k(\mu(t))$, $t \in J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$, съдържащ 0, е Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция, като*

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty, \qquad \text{\textit{за}} \quad \text{\textit{всяко}} \quad t \in J \qquad \lim_{t \downarrow 0} s(t) = 0.$$

Нека $k^{-1} - \mu$ е монотонно растяща функция.

Тогава съществуват околности U' на $\overline{x}$ и V' на $\overline{y}$ такива, че изображението $y \to (g+F)^{-1}(y) \cap U'$ е липшицова функция в $g(\overline{x}) + V'$ с модул функция $(k^{-1} - \mu)^{-1}$.

Следващата теорема е обобщение на теоремата за неявната функция (Теорема 5F.4, стр.294, [11]), доказана от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar.

Теорема 13. *(Теорема за неявната функция със силна метрична регулярност) Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство, (Y, σ) е линейно пространство с инвариантна относно транслациите метрика σ и (P, π) е метрично пространство. Нека $f : P \times X \to Y$ и $F : X \rightrightarrows Y$. Разглеждаме обобщеното уравнение $0 \in f(p, x) + F(x)$ с изображение на решението*

$$S : p \mapsto \{x | f(p, x) + F(x) \ni 0\} \quad \text{за } p \in P,$$

като $\overline{x} \in S(\overline{p})$. Нека $f(\cdot, \overline{x})$ е непрекъсната в $\overline{p}$ и $h : X \to Y$ е строга оценка за f спрямо x равномерно по p в $(\overline{p}, \overline{x})$ с модул функция $\psi(\cdot)$. Нека изображението $h + F$ е силно метрично регулярно в $\overline{x}$ за 0 с модул функция $\varphi(\cdot)$. Нека функцията $k(t) = \varphi \circ \psi(t),\ \ t \in J$, където J е интервал в $\mathbb{R}_+$ съдържащ 0, е Бианчини-Грандолфи калибровъчна функция,като

$$s_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n(t) < \infty, \qquad \text{за} \quad \text{всяко} \quad t \in J \qquad \lim_{t \downarrow 0} s_1(t) = 0.$$

Тогава S притежава еднозначна локализация s около $\overline{p}$ за $\overline{x}$. Освен това, ако f е липшицова спрямо p равномерно по x в $(\overline{p}, \overline{x})$ с модул функция $\chi(\cdot)$ и $\varphi^{-1}(\cdot) - \psi(\cdot)$ е монотонно растяща функция, то s е липшицова функция около $\overline{p}$ за $\overline{x}$ с модул функция $(\varphi^{-1} - \psi)^{-1} \circ \chi(\cdot)$.

Заключение (Авторска справка)

Приносите в насточщата дисертация са поместени във втора и трета глава и са публикувани в научната литература. При доказателството на теоремите в дисертацията са използвани техники разработени от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar в [11]. В дисертацията са разгледани методи за решаване на параметризирани обобщени уравнения, като за всеки от разгледаните методи е доказана равномерна сходимост, на базата на която е доказана теорема за неявната функция за изображението на решението на тези уравнения. Всеки един от тези методи е разработен предварително в литературата, но за обобщени уравнения без параметър.

В глава 2 е доказана квадратична сходимост на метод от Нютонов тип, включващ поточкова апроксимация. Методът се използва за решаване на параметризирани обобщени уравнения, в които участва липшицова спрямо параметъра функция и многозначно изображение. За изображението на решението на такива уравнения се доказва, че притежава еднозначна липшицова локализация. Направени са оценки на липшицовия модул на тази локализация, както спрямо променливата, така и по параметъра. Предимството на този метод в сравнение с метод на Нютон е, че може да бъде прилаган и за негладки функции, но притежаващи поточкова апроксимация и независимо от тези по-слаби изисквания за функцията, сходимостта отново е квадратна.

Вторият разгледан метод е метод на хордите за решаване на параметризирани обобщени уравнения. В метода участват: - функция, която е непрекъснато Фреше диференцируема спрямо променливата и липшицова спрямо параметъра; - линеен непрекъснат оператор, който е на известно разстояние от производната по Фреше. Доказва се, че метода е сходящ към еднозначната локализация на изображението на решението на обобщеното уравнение. За тази локализация се доказва, че е липшицова и са направени оценки на липшицовите модули на локализацията. Като предимство на този метод може да се посочи, че за разлика от метод на Нютон не се налага изчисляване на производната по Фреше във всяка итерация, а се използва един и същ оператор.

В глава 2 е представен и метод на секущите за решаване параметризирани обобщени уравнения, в който участват две функции и едно многозначно изображение. Едната от функциите е диференцируема по Фреше спрямо променливата в околност на решението, а другата е диференцируема по Фреше само в решението, но може и да не е в околност на решението. Втората функция участва в метода със своята разделена разлика от първи ред. За този метод е доказана теорема за неявната функция. Методът е полезен в случаите, когато функцията е сума от негладка и гладка функция, като за гладката функция е приложен по-бързо сходящия метод на Нютон, а за негладката функция се използва апроксимация с разделената разлика от първи ред.

В глава 3 е доказано обобщение на принципа за свиващото изображение, разгледан в [11] от A. L. Dontchev and R.T. Rockaffelar, за многозначни изображения, с тази разлика, че използваме по-общи предположения съдържащи Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции вместо псевдо-свиващи многозначни изображения. Използвайки този принцип, е доказана теорема за обратното изображение и теорема за неявното изображение, като се използва обобщение на понятието Обен непрекъснатост с помощта на модул функции. Това разширява класът на задачите, за които теоремите могат да се приложат. Дава се пример за функция, която е калибровъчна, но не е свиващо изображение. Даден е пример за липшицова функция с модул функция, която не е липшицова в традиционния смисъл с константа и пример за метрично регулярно многозначно изображение с модул функция, което не е метрично регулярно с константа. Във втория параграф на трета глава е направено обобщение на принципа за свиващото изображение за еднозначни изображения, като отново са използвани по-общи предположения съдържащи Бианчини-Грандолфи калибровъчни функции вместо псевдо-свиващи многозначни изображения. Обобщени са теоремата за обратната функция и теоремата за неявната функция, доказани от A. L. Dontchev и R.T. Rockaffelar в [11], като е използвано обобщение на понятието силна метрична регулярност с помощта на модул функции.

Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са публикувани в следните статии:

[1] Nedelcheva, D.K.: *A sequential implicit function theorem for iterative solution of generalized equation involving point-based approximation*; Rend. Circ. Mat. Palermo, 2012, Volume 61, pp 65-78.

[2] R. Marinov, D. Nedelcheva, *Some iterative methods for solving generalized equations: A sequential implicit function theorem*, Advancements and Developments in Applied Mathematics, 2012, Volume 2, Issue 1, pp 6-36.

[3] Nedelcheva D. K.: *Implicit Function Theorem for Chords Iteration.* Mathematica Slovaca. 2013, Volume 63, Issue 5, pp 1085-1100.

[4] Marinov R. T., Nedelcheva D. K.: *Implicit mapping theorem for extended metric regularity in metric spaces.* Ricerche di Matematica. 2013, Volume 62, Issue 1, pp 55-66.

Части от дисертацията са докладвани на:

[1] "Proceedings of Third International Scientific Congress "50th anniversary Technical University of Varna 4-6 October 2012, St. St. Constantine and Helena Resort, vol.VII, p.222-226.

[2] Семинар с представителите на целевите групи и експертите по проекта на тема "Развитие потенциала на докторанти, постдокторанти, млади учени и специализанти в ТУ Варна и техния принос за развитие на икономика, базирана на знанието"; Хотел "Лилия"Златни пясъци; 19.06.2013г.

Участие в специализираните докторантски курсове:

[1] Участие в пролетна школа по Вариационен анализ, организирана от факултета по математика и физика на Charles University и Чешка академия на науките в Пасеки, Чехия от 22.04 до 28.04.2012г.

[2] Участие в интензивен курс по "Applied dynamic programming"DAAD-Project in the Framework of the Stability Pact for South Eastern Europe. Курсът е проведен в Охрид от 20.08.13 до 26.08.13.

Благодарности

Считам за приятен свой дълг да изразя дълбоката си признателност към моя научен ръководител чл.кор.проф. д.м.н. Ю. Ревалски, без който тази работа не би била възможна, за търпението, подкрепата и интереса към моята работа. Възползвам се от възможността да благодаря на гл. ас. д-р. Румен Маринов, който насочи интересите ми към вариационният анализ, за моралната подкрепа и ценните идеи. Специални благодарности на колегите от секция Изследване на операциите на ИМИ на БАН за отзивчивостта и интереса към моята работа. Благодарност дължа и на ръководството на ТУ-Варна и специално на доц. д-р Сребра Благоева за създадената творческа атмосфера в секция Математика и за предоставените финансови и технически средства.

Списък на цитираната литература

[1] Aragón F.J., Dontchev, A.L.,Gaydu, M., Geoffroy, M.H., Veliov, V.M.: *Metric regularity of Newton's iteration.* SIAM Journal Control and Optimization **49**, **2**,339-362,(2011).

[2] Aubin, J. -P.: *Lipschitz behaviour of solution to convex minimization problems*, Math. Oper. Res. **9**, 87-111 (1984).

[3] Bianchini, R.M., Grandolfi, M.: *Transformazioni di tipo contracttivo generalizzato in uno spazio metrico*, Atti Accad. Naz.Lincei Rend.Cl.Sci.Fiz.Mat.Natur. **45**, 212-216, (1968).

[4] Descartes, R.: *The Geometry*, translated by E. Smith and M. L. Latham, Dover, New York (1954). C.R.A.S. Paris **322**, Serie I, 327-331 (1996).

[5] Dontchev, A. L.: *Local convergence of the Newton method for generalized equations*, C.R.A.S. Paris **322**, Serie I, 327-331 (1996).

[6] Dontchev, A. L., Rockaffelar, R.T.: *Newton's method for generalized equations: a sequential implicit function theorem.* Math. Program. **123**(**1**): 139-159 (2010).

[7] Dontchev, A. L.: *The Graves theorem revisited*, J. of Convex Analysis, **3**, **1**, 45-53 (1996).

[8] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, Implicit Functions and Solution Mappings, A View From Variaional Analysis, Springer.

[9] Dempe S.: *Foundations of Bilevel Programming.* Kluwer Academic Publ., Dordrecht-Boston-London, (2002).

[10] Dontchev, A. L., Rockafellar, R. T.: *Characterizations of strong regularity for variational inequalities over polyhedral convex sets*, SIAM J. Optim., **4**, 1087-1105 (1996).

[11] Dontchev, A. L., Rockaffelar, R.T.: *Implicit functions and solution mappings*. Springer, Dordrecht (2009).

[12] Dontchev, A. L.: Local analysis of a Newton-type method baased on partial linearization. Lectures in Applied Mathematics, Volume 32, 295-306 (1996).

[13] Dontchev, A. L., Hager, W. W.: *An inverse mapping theorems for set-valued maps*, Proc. Amer. Math. Soc. **121**, 481-489, (1994).

[14] Euler, L.: I*ntroductio in Analysin infinitorum*, Opera Omnia, S.1, vol. 8-9.

[15] Facchinei, F., Pang, J.-S.: *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Comlementarity Problems.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York (2003).

[16] Ferris, M.C., Pang, J.S.: *Engeneering and economic applications of complementarity problems*, SIAM Rev., **39**,No.**4**, p.669-713, (1997).

[17] Geoffroy, M. H., Piétrus, A.: *A general iterative procedure for solving nonsmooth generalized equations*, Comput. Optim. Appl. **31**, **1**, 57-67 (2005).

[18] Geoffroy, M. H., Piétrus, A.: *Local convergence of some iterative methods for generalized equations*, J. Math. Anal. Appl. **290**, 497-505, (2004).

[19] Gerhardt, C. I.: *Leibnizens mathematische Schriften*, Berlin 1856-57.

[20] Klatte, D., Kummer, B.: *Nonsmooth equation in optimization. Regularity, calculus, methods and applications.* Nonconvex Optimization and its Application, 60, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).

[21] Marinov, R.T.: *Convergens of the method of chords for solving generalized equations*, Rediconti del Circolo Matematico di Palermo **58**, 11-27, (2009).

[22] Marinov, R.T.: An iterative procedure for solving nonsmooth generalized equations, Serdica Math. J. 34 441-454, (2008).

[23] Penot,J. -P.: *Metric regularity, openness and Lipschitz multfunctions*, Nonlinear Anal. **13**, 629-643, (1989).

[24] Ptak, V.: *The rate of convergence of Newton's process*, Number. Math. **25**, 279-285, (1976).

[25] Robinson, S. M.: *Generalized equations, im Mathematical Programing*, The State of the Art (A. Bachem, M. Grotchel and B. Korte, eds), Springer, 346-367 (1983).

[26] Robinson, S. M.: *Newton's method for a class of nonsmooth functions*, Set-Valued Anal., **2**, 291-305 (1994).

[27] А. В. Дмитрук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, *Теорема на Люстерника и теория экстремума*, Успехи мат. наук, **35**, 11-46, (1980).