Авторска справка

за научните приноси на

Емилия Григорова Бажлекова
по конкурс за доцент по научната специалност
01.01.04. Математически анализ
(приложения на конволюционното и дробното смятане)
обявен от ИМИ-БАН в ДВ бр.71 / 13.08.2013 г.

Пълният списък на научните трудове включва 23 заглавия (приложение *D4 Trudove.pdf*), от които

- дисертацията за присъждане на образователната и научна степен доктор,
- 16 статии в научни периодични списания,
- 2 статии в рецензирани сборници на международни конференции,
- 1 абстракт в сборник с абстракти на международна конференция,
- 3 препринта.

Документирани са общо **180 цитирания** без да се броят автоцитати (приложение *D7 Citati.pdf*). Над 90 от цитиранията са в списания с импакт-фактор, като сумарният импакт-фактор на статиите цитиращи трудове на кандидата е над 100. Всички цитирания, с изключение на едно, са от чужди автори. *Google Scholar* дава h-index: 5.

За участие в конкурса са представени 15 научни труда (приложение *D5 Trudove za konkursa.pdf*). Разпределението е следното:

- 1 дисертация за доктор, 12 статии в научни периодични списания и 2 статии в рецензирани сборници на международни конференции;
- 6 в издания с импакт-фактор (с общ ИФ=3.25), 3 в международна поредица с SJR ранг;
- 7 самостоятелни, 8 в съавторство с още един автор;
- 11 излезли от печат, 4 приети за печат, като 2 от тях, [2, 3], са публикувани в електронен вид на страниците на съответните издания;
- 14 публикации, [2-15], не са представяни за придобиване на образователната и научна степен доктор.

Забележки:

Импакт-факторите на две от публикациите, [12, 13], са за годината, следваща годината на публикуване.

Само една от публикациите, представени за конкурса, [15], е излязла от печат преди получаване на степента доктор (защитата е през 2001г.), но не е по темата на дисертацията и не е използвана в нея. Само три от статиите, представени за конкурса, [10,11,12], имат връзка с темата на дисертацията, но са публикувани след защитата, като в тези публикации са доразвити някои въпроси от дисертацията.

Представените трудове попадат основно в следните три направления по темата на конкурса:

I. Еволюционни уравнения от дробен ред: операторно-теоретичен подход;

II. Прилагане на конволюционното смятане за намиране на Дюамелови представяния на решенията на нелокални линейни гранични задачи;

III. Намиране на аналитични решения на линейни уравнения от дробен ред и изследване на техните свойства.

И в трите направления е застъпено така нареченото *дробно смятане*, което позволява интегриране и диференциране от произволен ред, не непременно целочислен. Идеята за интегро-диференциране от дробен ред е много стара и датира от времето на Лайбниц (1695) и Ойлер (1730). През последните десетилетия се оказа обаче, че дробното смятане, особено дробните еволюционни уравнения (такива в които целочислената производна по времето е заменена с производна от дробен ред) могат да се използват за описване на еволюцията във времето на редица процеси. Нарастващият интерес към този клас от уравнения е мотивиран преди всичко от тяхното приложение към проблеми за вискоеластичност, топлообмен и електродинамика в материали с памет и пр.

Операторите за дробно интегриране и диференциране, които се използват в работите на кандидата, се дефинират както следва. Нека $\alpha > 0$. Означаваме с J_t^α *дробния интеграл на Риман-Лиувил* от ред α:

$$J_t^\alpha f(t) := \int_0^t g_\alpha(t-s) f(s)\, ds, \quad g_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0,$$

където $\Gamma(\cdot)$ е Гама функция. Нека $m = [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ - цялата част на α) и $D_t^m := d^m/dt^m$. *Дробната производна на Риман-Лиувил* D_t^α и *дробната производна на Капуто* $\mathbf{D}_t^\alpha$ от ред α се дефинират съответно чрез равенствата:

$$D_t^\alpha := D_t^m J_t^{m-\alpha}, \quad \mathbf{D}_t^\alpha := J_t^{m-\alpha} D_t^m.$$

I. Еволюционни уравнения от дробен ред: операторно-теоретичен подход (публикации [1, 10, 11, 12])

Прилагайки основно методи от функционалния анализ, в дисертацията [1] и статиите [10, 11, 12] се изучават абстрактни диференциални уравнения от дробен ред. Общият вид на едно такова уравнение е

$$D_t^\alpha u(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

където D_t^α е производна по времето от дробен ред $\alpha > 0$ (в смисъл на Капуто или Риман-Лиувил), A е оператор дефиниран в Банаховото пространство X; $u,\ f : [0, \infty) \to X$. Дадени са също подходящи начални условия за $u(t)$, в съответствие с използвания вид и реда на дробната производна.

Основните приноси в дисертацията [1] са по-конкретно в систематизираното изучаване на следната задача на Коши (Глави 2 и 3):

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_t^\alpha u(t) = Au(t),\ t > 0, \quad \alpha \in (0, 2) \\ &u(0) = x \in X,\ (u'(0) = 0,\ \text{if } \alpha > 1), \end{aligned} \tag{2}$$

където $\mathbf{D}_t^\alpha$ е производната на Капуто, а A е затворен линеен оператор дефиниран навсякъде гъсто в Банаховото пространство X.

Например, в най-простия случай когато $X = \mathbb{R}$, а операторът A е просто умножение със скалар $-\lambda < 0$, решението на уравнение (2) се изразява чрез функцията на Митаг-Лефлер E_α:

$$u(t) = u(0)E_\alpha(-\lambda t^\alpha), \quad E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

В частност, за $\alpha = 1$ решението се изразява чрез $E_1(-\lambda t) = e^{-\lambda t}$ (релаксация), а за $\alpha = 2$ чрез $E_2(-\lambda t^2) = \cos(\sqrt{\lambda} t)$ (осцилации). За нецелочислени стойности на α уравнението описва бавна релаксация за $\alpha \in (0, 1)$ и затихващи осцилации за $\alpha \in (1, 2)$.

Друг частен случай на задача (2) е когато операторът A е линеен елиптичен диференциален оператор от втори ред. Тогава получаваме т. нар. *дробно дифузионно-вълново уравнение.*

При $\alpha = 1$ задача (2) е класическата абстрактна задача на Коши от първи ред, тясно свързана с добре развитата теория на C_0 - *полугрупите* от оператори, а случаят $\alpha = 2$ е свързан с теорията на *косинусовите операторни функции.* Така че изучаването на задача (2) за нецелочислени

α, представено в дисертацията, е обобщение на някои идеи от тези две теории. За разлика от целочисленото диференциране обаче, дробното има нелокален характер, което прави задачата за обобщаване на теориите нетривиална.

В дисертацията [1] са изучени и систематизирани условията за съществуване и единственост на решение на (2) и редица свойства на оператора на решението (наричан *solution operator* или *resolvent operator*).

Тук представям няколко извадки от публикации, които се отнасят за дисертацията [1]:

"...Our method can be viewed as an extension of the ideas in reference [4] to state the existence of solutions for the abstract fractional order Cauchy problem... " (цитат от: [C71] C. Lizama (2011), An operator theoretical approach to a class of fractional order differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 24 (2) pp. 184-190, IF=1.371)

"...it was Bajlekova [3] who first connected the fractional order equations to resolvent families... By Theorem 2.9 in [3], the α - ROFs can also be characterized via the Laplace transform of their generators..."(цитат от: [C90] C. Chen, M. Li (2010), On fractional resolvent operator functions, *Semigroup Forum*, 80 (1) pp. 121-142. IF=0.612)

"...The idea of defining such kind of resolvent families goes back to Bajlekova [4], who introduced the solution families to the abstract fractional Cauchy problem in a Banach space X....Bajlekova [4] has systematized a theoretical statement of problem (1.2), and has obtained a number of interesting results: a principle of a subordination, characterization of the generator and maximal regularity. "(цитат от: [C27] C.-G. Li, M. Kostic, M. Li, S. Piskarev (2012), On a class of time-fractional differential equations, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 15 (4) pp. 639-668.)

Формулираният в Теорема 3.1. на дисертацията *принцип за субординация*, който дава връзка между задачите в (2) за различни стойности на параметъра α, е намерил различни приложения в трудовете на други автори. Например, наскоро той е използван за решаването на обратни задачи от дробен ред в следната публикация: [C1] L. Miller, M. Yamamoto (2013), Coefficient inverse problem for a fractional diffusion equation. *Inverse Problems*, 29 (7) 075013 IF=1.896. Привеждам цитат от нея: "...We shall use the following generalization in theorem 3.1 in [2], which we call the Bazhlekova subordination formula... "

Оказва се, че дисертационният труд [1] е цитиран многократно, изключително от чужди автори. Забелязани са общо 128 цитирания, като над 70 от тях са в списания с импакт-фактор, с общ ИФ > 80. Оригиналните статии, които са използвани в дисертацията, [B15],[B16] и [B17] от приложение *D4 Trudove.pdf*, са цитирани общо 34 пъти.

В работите [10] и [11] се разглежда задача (1) с оператор D_t^α, $\alpha \in (0,1)$, дефиниран в смисъла на Риман и Лиувил. Операторът A зависи от времето: $A = A(t)$ (неавтономни уравнения) и за всяко фиксирано $t \in (0,T)$ е затворен линеен оператор дефиниран навсякъде гъсто в Банаховото пространство X. Тези уравнения са важни преди всичко като преходен случай между линейните и нелинейните уравнения.

В [11] работим с функции от пространството $L^p(0,T;X)$. Резултатите ни се основават на свойството *максимална регулярност* на задача (1), което означава, че функцията Au има същата „гладкост“ както f, т.е. в сила е оценката

$$\|Au\|_{L^p(0,T;X)} \leq M\|f\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Използвайки максималната регулярност на съответната автономна задача и индукционен аргумент, доказваме максималната регулярност на неавтономната задача.

В [10] работим в пространството от функции $L^2(0,T;H)$, където H е Хилбертово пространство. Записваме задача (1) като операторно уравнение

$$\mathcal{L}_\alpha u + \mathcal{A}u = f,$$

с подходящо дефинирани оператори $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{A}$ и, прилагайки метода за сума на *акретивни (accretive)* оператори, доказваме максимална регулярност на задачата за определен клас от оператори A, като методът на доказателство допуска също известна нелинейност на оператора A.

В [12] се изучава едно квазилинейно дифузионно-вълново уравнение. По-конкретно, разглеждаме уравнение (1) с дробна производна от ред $\alpha \in (1,2)$ в смисъла на Капуто и с оператор A дефиниран чрез $Au = (\sigma(u_x))_x$, където функцията $\sigma \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворява условието: $0 < \sigma_0 \leq \sigma'(y) \leq \sigma_1 < \infty,\ y \in \mathbb{R}$, за определени константи σ_0, σ_1. Предполагаме нулеви начални и нулеви гранични условия на Дирихле. Трябва да отбележим, че докато поведението на решението в линейния случай $\sigma(y) = y$ е достатъчно добре изучено, то само частични резултати съществуват в общия случай. Ние използваме $L^p(L^q)$ оценки за съответното линейно уравнение, за да установим глобално съществуване на гладко решение на разглежданото квазилинейното уравнение в пространството $L^p(0,T;L^q(0,1))$ за всички $\alpha \in (1,2)$ и за достатъчно големи стойности на параметрите p и q.

II. Прилагане на конволюционното смятане за намиране на Дюамелови представяния на решенията на нелокални линейни гранични задачи (публикации [2, 3, 6, 7, 8, 9, 15])

В тези публикации са получени Дюамелови представяния на решенията на някои нелокални линейни гранични задачи на математическата физика (от тях [2, 3, 6, 15] разглеждат задачи от дробен ред). Методът, който се използва за получаване на тези представяния, е създаден от Димовски и се състои в следното: разработва се конволюционно смятане за съответния диференциален оператор по пространствената променлива, дефинира се съответният пръстен на мултипликаторните частни, задачата се записва в алгебричен вид в него и се намира формалното решение, което след това се интерпретира като функция. По този начин за решението се получават изрази от вида:

$$u = D(\Omega * f),$$

където $*$ е конволюция в смисъла на Димовски за съответния диференциален оператор по пространствената променлива, участващ в задачата, $\Omega = \Omega(x,t)$ е подходящо частно решение на задачата, а D означава диференциране по пространствената променлива (обикновено от втори или четвърти ред). Като последна стъпка, този израз трябва да се опрости. Крайната цел е да се получи компактно представяне на решението, удобно за числени пресмятания.

Основните трудности в така описаната обща схема са преди всичко в легитимирането на получените по този формален начин резултати (доказване, че полученият израз е решение в определен смисъл), в опростяването на изразите и в намирането на частните решения във вид на ред (в случая на дробни уравнения то е описано в III.). Личният принос на кандидата в направления II. и III. се състои именно в преодоляването на тези трудности за конкретно разглежданите задачи, както и в използването на получените Дюамелови представяния за числено пресмятане и онагледяване на решенията в публикации [6, 7, 8, 15].

В серията от публикации [3, 6, 7, 8, 9] са получени Дюамелови представяния за решенията на различни варианти на задачата:

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(x,t) + c\mathbf{D}_t^{\beta} u(x,t) = u_{xx}(x,t) - \gamma^2 u(x,t), \quad x \in (0,l), t > 0, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = g(t),\ u(0,t) = u(l,t), \tag{4}$$

$$u(x,0) = f_0(x),\ (u_t(x,0) = f_1(x), \text{if } \alpha > 1), \tag{5}$$

където $c \geq 0$, $0 < \beta < \alpha \leq 2$. Мотивацията за разглеждане на тази задача е, че при $c = 0$ и $\alpha = 1$, се получава моделът на Торнли за разпространение на морфоген в ботаниката.

В трудовете [7] и [9] е разгледана оригиналната задача на Торнли ($c = 0$, $\alpha = 1$). В [9] е разработено конволюционно смятане за оператора по пространствената променлива, решена е спектралната задача на Торнли, получени са явни представяния за спектралните проектори, изучени са свойствата им. Полученото в [9] Дюамелово представяне на решението е използвано в [7] за численото му пресмятане.

В работата [8] се разглежда случаят на вълново уравнение $\alpha = 2$, $c = \gamma = 0$, $g \equiv 0$. Получените графики въз основа на Дюамеловото представяне на решението показват интересен феномен характерен за случая на многократни собствени стойности: амплитудата на решението нараства неограничено с времето в отсъствие на явно зададени сили във формулировката на задачата. Този феномен е обяснен по-късно в [4]: нелокалната задачата се разделя на две локални задачи, едната от които е с функция на силата от вид, който води до резонанс.

В [6] е получено Дюамелово представяне и числени резултати за дробната задача (3)-(5) с $\alpha \in (0,1), c = 0$, представяйки оператора на решението като конволюционен оператор.

В [3] е получено Дюамелово представяне за най-общия вид на задачата (3)-(5), като се използва изключително методът на операционното смятане (дори и за намиране на частното решение). Както може да се очаква, Дюамеловите представяния за всички задачи от типа (3)-(5) имат еднакъв вид (понеже се определят от оператора по пространствената променлива), различията са само в частните решения, които участват в тези представяния.

В работата [15] е получено Дюамелово представяне на решението и числени резултати за дробното дифузионно-вълново уравнение:

$$\mathbf{D}_t^\alpha u(x,t) = a u_{xx}(x,t), \quad \alpha \in (0,2), a > 0, \quad x \in (0,1), t > 0, \tag{6}$$

$$u(0,t) = \int_0^1 u(\xi,t)\, d\xi = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = f_0(x), \ (u_t(x,0) = f_1(x) \text{ if } \alpha > 1). \tag{8}$$

Задачите, изучени в [6] и [15], са интересни частни случаи на абстрактната задача (2), разглеждана в [1].

Работата [2] е посветена на дробното кабелно уравнение

$$u_t = D_t^{1-\alpha}(u_{xx}) - c D_t^{1-\beta} u, \ x \in (0,1), t > 0, , \tag{9}$$

където $0 < \alpha, \beta \le 1, c > 0$, а D_t^γ е дробната производна на Риман-Лиувил. Предполагат се следните гранични условия от общ вид:

$$u(0,t) = g(t), \ \Phi_x\{u(x,t)\} = h(t), \tag{10}$$

където Φ е непрекъснат линеен функционал в пространството $C^1[0,1]$. Проекторите в собствените подпространства са представени като конволюционни оператори и приложени, за да се сведе задачата до система ОДУ и да се намери решението във вид на ред. В допълнение е намерено и Дюамеловото представяне на решението.

III. Намиране на аналитични решения на линейни уравнения от дробен ред и изследване на техните свойства

(публикации [2, 3, 4, 5, 6, 14, 15])

Във всички работи освен [14] се разглеждат нелокални гранични задачи за ЧДУ от дробен ред. Решението е получено във вид на ред по обобщени собствени функции. В [3, 4, 5, 6] се разглеждат различни дробни задачи от типа (3)-(5), в [15] задачата (6)-(8), а в [2] дробното кабелно уравнение (9). Нека отбележим, че диференциалните оператори по пространствената променлива, дефинирани с нелокални гранични условия, като тези в (4), (7) или (10), по принцип не са самоспрегнати. Затова, за разлика от случая на локални гранични условия, за такива оператори не можем да очакваме съществуването на ортогонална система от собствени функции. В случая на гранични условия (4) и (7) собствените стойности на оператора са двукратни и собствените пространства съответно двумерни. За гранични условия (10) собствените стойности са многократни в общия случай и за да се получи спектрално развитие на решението, се използва проектиране в многомерните собствени подпространства. По този начин задачата се свежда до система ОДУ по времето от дробен ред, която се решава обикновено чрез прилагане на трансформацията на Лаплас. Въз основа на свойствата на получените решения на системите, които се представят посредством обобщени функции на Митаг-Лефлер, се изследва сходимостта на така получените спектрални развития на решението и се изучават неговите свойства.

Въпреки, че по принцип такива представяния във вид на ред не са подходящи за числено пресмятане на решението, те са много полезни за изследването на неговите свойства, като например получаване на различни оценки за регулярност и изследване на асимптотичното му поведение.

В [2] решението на дробното кабелно уравнение (9) е представено в ред по обобщени собствени функции за случая на еднократни и двукратни собствени стойности и е даден алгоритъм за получаването му в общия случай. Получени са асимптотиките на решението на уравнението с нехомогенни гранични условия за $t \to \infty$ и е доказано наличието на граничен слой в случая $\alpha < \beta$.

Компонентите по времето в спектралните развития на решенията са представени чрез класически функции на Митаг-Лефлер в [6], чрез обобщени 3-параметрични функции на Митаг-Лефлер в [2], [3] и [5], и чрез контурни интеграли в [4]. В работите [6] и [15] е обърнато значително внимание на изследване на сходимостта на редовете и гладкостта на получените решения, а в [4] се изследват детайлно свойствата на компонентите по времето в спектралните развития.

В [14] се разглежда следното ОДУ от дробен ред

$$\mathbf{D}_t^{\alpha} u(t) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{D}_t^{\alpha_j} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad t > 0; \quad u(0) = c_0;$$

където $0 < \alpha_m < ... < \alpha_1 < \alpha \leq 1, \ \ \lambda, \lambda_j > 0, \ j = 1, ..., m, \ m \in \mathbb{N} \cup 0$. То е интересно като обобщение на уравнението за дробна релаксация, но също така е важно и за изучаването на уравнения за аномална дифузия, тъй като определя компонентите по времето в развитието по собствени функции на решението на тези уравнения. Решението е намерено прилагайки трансформация на Лаплас и неговите свойства са изведени директно от интегралното представяне на обратната Лапласова трансформация. Оказва се, че асимптотичното поведение на решението за $t \to 0$ се определя от най-високия ред на дробно диференциране α, а за $t \to \infty$ от най-ниския ред α_m. Получени са полезни оценки за решението. Свойствата на решението наподобяват много тези на класическата функция на Митаг-Лефлер, което дава основание да се разглеждат като ново многопараметрично обобщение на тази функция.

Единствено работата [13] не попада в никое от горните три направления. В нея са изведени явни аналитични формули за т.нар. гранични потенциали, които се получават при решаването на уравнението на Стокс в случая на многофазни флуидни среди по метода на граничните елементи. Представените формули са приложими за ососиметричния случай. В тях сингулярните интеграли се изразяват с класически елиптични интеграли, което ги прави удобни за числени пресмятания. Предложените формули се използват в методи, разработени от други автори, за числено решаване на ососиметрични задачи от механиката на флуидите (цитирания [C134] и [C135] от *D7 Citati.pdf* в приложни издания с общ ИФ=4).

10.10.2013г. Подпис:
гр. София

Емилия Бажлекова