

РЕЦЕНЗИЯ

върху дисертационен труд за придобиване на научната степен „доктор на науките”

в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност: „Математически анализ”

Тема на дисертационния труд: *Subordination principle for generalized fractional evolution equations* (Принцип за субординация на обобщени дробни еволюционни уравнения)

Автор на дисертационния труд: *д-р Емилия Григорова Бажлекова*, доцент в
Института по математика и информатика (ИМИ) на БАН

Изготвил рецензията: *д-р Мария Димитрова Дачева*, професор в Института по механика към БАН, член на научното жури (НЖ), утвърдено от Научния съвет на ИМИ на 15.07.2022 г. (протокол № 7) и определено със заповед № 216/20.07.2022 г. на директора на ИМИ, за провеждане на процедурата за присъждане на научната степен “доктор на науките” на Емилия Григорова Бажлекова и съгласно решение на НЖ взето на неговото първо заседание на 21.07.2022 г. с протокол 1.

Предоставени материали по процедурата: административно изискваните документи, включително заповед и протокол 1/28.06.2022 г. от предзащитата на дисертационния труд в научно-структурно звено (НСЗ) „Анализ, геометрия и топология“ на ИМИ-БАН, автобиография, списък от 11 публикации по дисертацията и копия от тях, справка за забелязаните независими цитирания на тези публикации, автореферат на български и английски език и дисертацията на английски език. Предоставена ми бе и сравнителна таблица за изпълнение на минималните изисквания за придобиване на научната степен „доктор на науките“ съгласно Правилника на ИМИ-БАН за развитието на академичния състав. След внимателна проверка на данните в тази справка бе установено, че *дисертантът покрива, а по някои от показателите надхвърля минималните изисквания, както и специфичните за ИМИ-БАН изисквания*, определени в чл. 3 ал. 1 т. 1 от този правилник. Това даде основание на НЖ да допусне дисертационния труд до оценяване и защита (решение взето на неговото първо заседание, протокол 1/21.07.2022 г.).

Дисертантът, доц. д-р Емилия Бажлекова, има магистърска степен по математика (комплексен анализ) от ФМИ на Софийския университет (СУ) „Св. Климент Охридски“, София. През 2001 г. защитава докторска дисертация на тема „Дробни еволюционни уравнения в Банахови пространства“ в Техническия университет в Айндховен, Нидерландия (Applied Analysis group, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands), под ръководството на проф. de Graaf и проф. Clement. В периода от 1989 до сега с кратки прекъсвания е била част от научната колегия на ИМИ-БАН – отначало като докторант (ръководител проф. Иван Димовски) след това като математик, асистент, а от 2014 г. като доцент в НСЗ „Анализ, геометрия и топология/ Комплексен анализ“. Доц. Бажлекова е утвърден учен в областта на темата на дисертацията – тя има, съгласно данните в Scopus, индекс на Хирш без самоцитирания на всички съавтори – 9, брой публикации 37 и над 300 независими цитирания, от които 259 са в публикации от последните 5 години.

Цели и актуалност на дисертационния труд

Основна цел в дисертационния труд е изследване на субординационния принцип и разработване на методология за неговото приложение към еволюционни уравнения с дробни производни с цел класификация, намиране на решения и анализ на тези решения. Темата е актуална, тъй като е свързана с т.н. дробно смятане – област, в която в момента активно се работи, както и поради значението на еволюционните уравнения с производни от дробен ред за моделиране на процеси в сложни, неподредени, йерархични и такива с памет среди.

Структура и съдържание на дисертацията, автореферат

Дисертационният труд е написан на английски език и е резултат от научните изследвания на дисертанта отразени в 11 публикации в реномирани научни издания и публикувани в периода 2015-2021 г. Общият обем на дисертацията е 200 страници и е структуриран в 8 глави, кратък предговор, увод съдържащ мотивите за проведените изследвания, заключение, където са резюмирани научните приноси в дисертационния труд, списък на използваните източници (общо 110 заглавия) и азбучен указател.

Глава 1 е със заглавие „Fractional calculus operators and special functions“. Тя е с обем от 10 страници и в 5 подглави са дадени основни дефиниции и понятия, както и основните свойства на операторите и функциите, използвани в дисертационния труд. *Глава 2* е озаглавена „Introduction to subordination principle“, където първите две подглави са посветени на функциите на Бернщайн и на интегралните уравнения на Волтера. Във вторите две глави се разглежда принципът на субординация за дробни еволюционни уравнения. Доказани са две общи теореми за субординация (дадени под номера 2.4 и 2.5 в дисертацията и 2.1 и 2.2 в автореферата), като едната води до свеждане на въпроса за субординацията до това дали една характеристична функция на уравнението е функция на Бернщайн, а втората теорема разглежда случая, когато събординарният оператор на решението е ограничен и аналитичен и дава сектора на аналитичност. Тези теореми са важна основа за получаване на резултатите в следващите глави и тяхното доказателство не е публикувано досега. *Глава 3* „Space-time fractional evolution equations“ е една от двете обемни глави (30 страници) и това е така, тъй като е посветена на детайлно изучаване на принципа за субординация за по-общия случай на линейни еднородни еволюционни уравнения с дробни производни както по времето, така и по пространствените координати. Получена е субординационната формула за оператора на решението на абстрактна Коши задача за еволюционни уравнения с дробни производни по времето и пространствените координати и е показано, че субординационното ядро съвпада с фундаменталното решение на една свързана едномерна задача [B5]. Изследвано е съществуването на аналитично продължение на субординационното ядро. Представени са числени експерименти, които доказват съгласуваност на аналитични резултати, получени в дисертацията, и известни съществуващи точни решения [B9].

В останалата част на дисертацията се разглеждат еволюционни уравнения с дробни производни само по времето. *Глава 4* „Transition from diffusion to wave propagation“ – в нея е разгледано уравнението за топлопроводност с дробен конститутивен закон тип Джефри. Част от резултатите в тази глава са публикувани в [B10]. Използвайки подхода с функциите на Бернщайн, тук са идентифицирани два фундаментално различни режима на поведение в зависимост от отношението на времената за релаксация за топлинния поток и температурния градиент, а именно – дифузионен и

вълнов. Глава 5 „Generalized subdiffusion equations“ е другата обемна глава в дисертацията (32 страници) и прилага субординацията към интересен клас уравнения, свързани с описание на аномалната дифузия, която е характерна за неподредените среди, но има и други области, където се проявява. Резултатите в тази глава са публикувани в [B1], [B2] и [B3]. Глава 6 „Multinomial Mittag-Leffer type functions“ е посветена на решаването и изследването на уравнения на релаксация, в които са включени производни по времето от различен дробен ред и част от резултатите са публикувани в [B6].

Глава 7 „Distributed-order diffusion-wave equations“ и Глава 8 „Wave propagation in linear viscoelastic media“ разглеждат уравнения, описващи явления между дифузия и разпространения на вълни. Получени са интересни резултати, които имат значение за моделирането с помощта на такива уравнения на реални физични процеси. Тези две глави са на основа на публикациите [B4] и [B7] (Глава 7) и [B4], [B8] и [B11] (Глава 8). По отношение на решението на едномерна задача на Коши за дифузно-въннови уравнения (обобщение на вънновото уравнение за описание на разпространение на вълни в сложни среди) в Глава 7 е установен принципът на субординация, което предполага наличието на единствено решение и дава възможност за интегрално представяне (разделяне) на оператора на решението чрез функция, която представлява вероятностна плътност, и оператора на решението на съответната задача за уравнение от втори ред. Аналитичните резултати са подкрепени от числен анализ. В Глава 8 за описанието на наследствените свойства на линейна вискозоеластична среда са разгледани няколко примера, в които моделите ползват напълно монотонни релаксационни ядра. Тези ядра се изразяват чрез функции от типа на Митгаг-Лефлер, включително чрез наскоро въведената мултиномна функция от тип Прабхакар. Дискутират се някои характеристики на функциите на разпространение като неотрицателност, монотонност, скорост на разпространение, наличие/отсъствие на въннов фронт и се извежда интегрално представяне на решението в явен вид.

Авторефератът е в обем от 34 страници и съдържа основните резултати, получени в дисертационния труд. В него достатъчно пълно е отразено съдържанието и основните резултати в дисертацията както и анализ на наукометричните показатели на публикациите по дисертацията и е деклариран личният принос на дисертанта във всяка от тях. Текстът е написан еднакво прегледно и ясно и на български, и на английски език.

Научни приноси (съгласно авторската справка за приносите)

Напълно приемам научните приноси така, както са заявени в авторската справка (част V на автореферата, справката за приносите и заключението към дисертацията под заглавието „Main scientific contributions“). Приносите са свързани с развитие и прилагане на принципа на субординация за изследване, класифициране и решаване на интегродиференциални уравнения, където интегралите са от конволюционен тип. Конкретно те се състоят в: разработване на методология за установяване на субординация между едно линейно еволюционно уравнение от общ вид и линейно еволюционно уравнение от дробен или целочислен ред чрез установяване дали дадена характеристична функция е от класа на напълно Бернщайновите функции; установяване на субординационни зависимости за срещани в литературата уравнения с дробни производни по времето, с което решението се разделя на субординационно ядро и решение на едно по-просто уравнение от цял или дробен ред; принципът за

субординация е използван за уравнения с дробни производни по времето и пространството като са получени различни представяния на субординационното ядро както и са изследвани неговите свойства, определен е секторът от комплексната равнина, в който подчиненото решение е ограничено аналитично. По отношение на класификацията на интегродиференциални уравнения на основа на принципа за субординация са дефинирани два основни класа обобщени дробни еволюционни уравнения, а именно – уравнения, описващи субдифузия и дифузионно вълнови уравнения.

Останалите приноси са свързани с конкретни уравнения от тези две категории, имащи отношение и към описанието на физични процеси, в които дробните производни са само по променливата време. Конкретните научни приноси в тази категория са: на примера на еволюционното уравнение (уравнение за топлопроводност) с дробния конститутивен закон на Джефри е показана връзката между принципа на субординация и физичния смисъл на едно еволюционно уравнение; установен е типът на ядрата при дифузия и разпространение на вълна. Установени са субординационните зависимости за обобщеното уравнение описващо аномална дифузия като е получена явна апроксимационна формула за решението, която се явява обобщение на експоненциалната формула за S_0 -полугрупи. С помощта на формулата за субординация, е получена полезна двустранна оценка за решението на обобщеното уравнение на релаксация и тази оценка е използвана за изследване на инверсна задача. Въведена е и е изследвана мултиномна функция от тип Прабхакар, като са намерени условията функцията да е напълно монотонна и опирайки се на това свойство на въведената функция, чрез нея е дефиниран модел, който обобщава известни модели за релаксация. Получено е частично решение на въпроса при какви условия едномерното фундаментално решение на дифузионно-вълновото уравнение от разпределен ред е вероятностна плътност. Изучен е принципът за субординация на дифузионно-вълнови уравнения с няколко производни по времето от различен ред като е получено интегрално представяне на субординационното ядро и са разгледани случаите за крайна и безкрайна скорост на разпространение на вълната. Получени са интересни и оригинални резултати, отнасящи се до модула на релаксация на обобщени дробни вискозоеластични модели, като за моделите на Максвел, Джефри и на Зенер е доказано, че необходимо и достатъчно условие да имат физичен смисъл е съответният модул на релаксация да е напълно монотонна функция.

Оригиналност и значимост на резултатите: Смятам, че резултатите са нови и оригинални, т. е. не са публикувани преди това от други автори. Значителният брой цитирания (малко над 90) може да се приеме за доказателство за тяхната значимост и интерес към тях от научната общност – например статията [B4] от 2018 година е цитирана в независими източници към момента на изготвянето на тази рецензия 21 пъти (съгласно данните в Scopus).

Оценка на публикациите, представени към дисертационния труд

Дисертацията се базира на 11 статии публикувани в периода от 2015 г. до 2021 г. и не са ползвани от дисертанта в предшествващи процедури по ЗРАСРБ (последната такава е приключила 2014 г.). Съгласно представения списък с цитирания на тези публикации забелязаните независими цитирания са 94, като 77 от тях са в списания с импакт фактор. Приемам, че 9 от публикациите са в издания с импакт фактор, тъй като дисертантът е посочил статията в Mathematics (MDPI), [B2], като такава без импакт

фактор, което отразява състоянието към датата на публикуване, но към днешна дата Mathematics (MDPI) попада в топ 10% сред списания в JCR Category “Mathematics”, за което принос имат и цитиранията на статия [B2]. От тези публикации 6 попадат в първи квантил (WoS). Две публикации са в друго списание в топ 10% в същата категория – Fractional Calculus and Applied Analysis. От всички публикации 6 са самостоятелни, а останалите са с един съавтор, като приемам ролята и приносът на дисертанта, дефинирани в автореферата (без необходимост от разпределение в протокол). Наличието на съвместни статии говори за нагласа за работа в екип, а от разпределението на приносите в съвместните публикации става ясно, че се постига и комбиниране на компетенции и се разширява обхватът на приложение на резултатите.

Апробация на резултатите

Авторът е представил в периода от 2016 до 2020 г. изследванията си по темата на дисертацията на редица международни форуми (над 10, в Сърбия, Гърция), включващи както тясно специализирани, така и форуми с участието на специалисти от различни области, например приложната математика, механиката, числения анализ. В рамките на ИМИ-БАН текущите резултати по темата са били регулярно докладвани на различни семинари и годишни научни сесии.

Мнения, препоръки, бележки: Нямам критични бележки. Текстът на дисертацията е написан изключително прегледно, представянето на темата на изследването и получените резултати е добре структурирано и дадено в логическа последователност, изводите са обосновани, формулировките и доказателствата са ясни и са дадени в обем, напълно достатъчен за проследяване на тяхното съдържание по същество. Дисертацията има завършен вид на нивото на монографичен труд. Смятам, че дисертантът добре познава както по-старата, така и най-новата научната литература в областта, което се вижда от библиографията.

Заключение: Представеният дисертационен труд за придобиване на научната степен “доктор на науките” е в актуална област. Той е много добре оформен и резултатите в него са на високо научно ниво. Дисертационният труд и неговият автор удовлетворяват всички критериите за придобиване на научната степен „доктор на науките” съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ.

Убедено препоръчвам на почитаемото Научно жури да присъди на доц. д-р Емилия Григорова Бажлекова научната степен „доктор на науките” в област на висшето образование 4. „Природни науки, математика и информатика“, професионално направление 4.5 „Математика“, научна специалност „Математически анализ“.

13.10.2022 г.
София

Мария Дачева