Рецензия

По процедура за присъждане на научна степен "доктор на науките", на доц. д-р Емилия Григорова Бажлекова за дисертацията "Принцип за субординация на обобщени дробни еволюционни уравнения" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 "Математика", научна специалност Математически анализ,

от проф. дмн Цвятко Василев Рангелов член на Научното жури, назначено със заповед N: 216/20.07.2022 г. на Директора на Института по математика и информатика, БАН.

1) Доц. Е. Бажлекова е завършила ФМИ на СУ "Св.Кл. Охридски" през 1986 г. През 2001 г. е защитила дисертация (легализирана в България като ОНС "доктор" през 2011 г.) в Техническия университет на Айндховен, Нидерландия на тема "Дробни еволюционни уравнения в Банахови пространства". Тя е била докторант в секция Комплексен анализ (1989 г. - 1993 г.), математик в същата секция (1995 г. - 2004 г.), математик и асистент в секция Анализ, геометрия и топология (2011 г. - 2014 г.) и доцент към същата секция от 2014 г.

Научната дейност на доц. Е. Бажлекова е в областта на диференциалните уравнения с дробни производни, специални функции на дробното смятане, конволюционен анализ и приложенията им. Представеният дисертационен труд е посветен на принципа на субординация за обобщени дробни еволюционни уравнения и приложението му в уравнения, описващи субдифузия, дифузионно-вълнови уравниния и други.

2) Задачи с дробни производни е актуална област от анализа и диференциалните уравнения. В последните години те са предмет на изследване не само от математици, но и от специалисти по механика и физика поради приложенията им в задачи от непрекъснатите среди, вискоеластичност, устойчивост на системи и др. Въпреки че операторите с дробни производни от ред α в случай на цели α са диференциални оператори, процесите, които се моделират с тях, както и методите на решение на задачи на Коши и гранични задачи, са съществено различни главно поради нелокалния характер на уравненията с дробни производни. Това прави необходимо разработването на нови методи, подходи и принципи в изследването им. На изучаването на този принцип - на субординацията е посветена предложената дисертация. Принципът на субординация е формулиран първоначално за стохастични процеси свързани с уравнение на дифузията от S. Bochner (1949). Заедно с многобройното количество последващи статии, следва да се отбележат монографии, свързани с темите разглеждани от доц. Е. Бажлекова. Цитирани и използвани в дисертацията, са напр. J. Prüs (1993); I. Podlubni (1999); R. Gorenflo, H. Kibas, F. Mainardi, S. Rogosin (2014);F. Mainardi (2010), R. Schilling, R. Song, Z. Vondracek (2010); W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander (2011); J. Paneva-Konovska (2016) и др.

Тъй като в следващия по-долу текст принципа за субординация се споменава често, то ще посочим дадената в дисертацията обща дефиниция пригодна и за уравнения с дробни производни:

При дадени две задачи на Коши (P) и (P_*), задачата (P) се нарича подчинена на задачата (P_*) ако тя е разрешима (има единствено решение, непрекъснато зависещо от началните данни) и решението $u(x,t)$ на (P) се представя чрез решението $u_*(x,t)$ на (P_*) чрез интегрална зависимост $u(x,t) = \int_0^\infty \varphi(t,\tau)u_*(x,\tau)d\tau$. Тук ядрото $\varphi(t,\tau)$ е вероятностна плътност по отношение на $\tau \geq 0$ като $t > 0$ се разглежда като параметър, т. е., $\varphi(t,\tau) \geq 0$ и $\int_0^\infty \varphi(t,\tau)d\tau = 1$.

3) Целта на дисертацията е изучаване на принципа на субординация за обобщени дробни еволюционни уравнения и разработване на методология, позволяваща установяване на субординационно зависимост между две уравнения. Предвид многообразието и активното развитие на уравненията с дробни производни и техните приложения в моделиране и изучаване на еволюционни процеси в механиката, физиката, биологията и др. то има широко поле за приложение на представената методология.

Предложената дисертация е написана на английски, съдържа 200 стр., състои се от увод, 8 глави, списък с 110 заглавия на използваната литература и индекс. Първите две глави (1, 2) са уводни и съдържат основни използвани дефиниции, интегрални трансформации и специални функции, както и две общи теореми за субординация (Теореми 2.4 и 2.5), които обобщават резултати публикувани от автора през 2000 г. и се доказват чрез използване на идеи от J. Prüs (1993). В глава 3 се изучава принципа за субординация за еволюционни уравнения с дробни производни по пространството и времето. В останалите глави (4, 5, 6) и в (7,8) са получени редица нови резултати при прилагане на принципа за субординация за еволюционни уравнения като дробното уравнение на Jeffrey за топлопроводността, уравнения за субдифузия, дифузионно-вълнови уравнения, уравнения описващи разпространение на вълни във вискоеластични среди.

4) Ще се спрем по-подробно на проблемите, решавани в настоящата дисертация и научните приноси. Нови резултати са представени във всяка от главите (3 - 8) и това, че те са цитирани 90 пъти показва тяхната актуалност. Всички нови резултати и приноси са достатъчно добре описани в дисертацията, в автореферата, и в справката за приносите. Поради това ще посочим само някои от тях, които по мое мнение представляват основа за бъдещо използване и приложение на принципа на субординация.

- Един от основните приноси е в гл.3 в Теорема 3.1, в която прилагайки принципа на субординация, са получени нови резултати за абстрактната задача на Коши с дробни производни по времето и простронството. Нека ${}^{C}D_t^{\beta}u(t)$ е дробна производна на Капуто по времето, A е генератор на ограничена C_0 - полугрупа в Банаховото пространство X, $0 < \alpha, \beta \leq 1$ и $S_{\alpha,\beta}(t)$ означава разрешаващия оператор за задачата

$$ {}^{C}D_t^{\beta}u(t) = -(-A)^{\alpha}u(t), \quad u(0) = v \in X. $$

Тогава, като се приложи принципа на субординация в Теорема 3.1 е доказано представянето $S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^{\infty} \psi_{\alpha,\beta}(t,\tau) S_{1,1}(\tau) d\tau$, $\tau > 0$, където $\psi_{\alpha,\tau}$ е субордационното ядро. Тази връзка между разрешаващия оператор $S_{\alpha,\beta}(t)$ на задачата с дробни производни и разрешаващия оператор $S_{1,1}(t)$ за параболичната задача обосновава принципа на субординация и приложенията му.

Принос (гл. 3) са и интегралното представяне на ядрото на субординация $\psi_{\alpha,\beta}(t)$ в Теорема 3.5, резултата за аналитичност в ъгъл на разрешаващия оператор в Теорема 3.6, както и интегрално представяне на разрешаващия оператор чрез фундаментално решение.

- Върху примера на параболично уравнение с дробни производни

$$\left(1 + aD_t^{\alpha}\right) u'(t) = \left(1 + bD_t^{\alpha}\right) Au(t), \quad \alpha \in (0,1], \quad 0 \le a, b,$$

от вида на Джефри е демонстрирано общо свойство след прилагане на принципа на субординация. В зависимост от числата a, b са установени следните 2 вида: при $a < b$ уравнението моделира дифузия, докато при $a > b$ разпространение на вълни. Това различие спомага за правилната класификация на еволюционните уравнения с дробни производни. Редица резултати в дисертацията са получени развивайки тази нова идея за дифузно или вълново поведение на решенията, (напр. Теореми 4.1, 4.2) и съответните представяния на фундаменталните решения в зависимост от a и b.

- Приложен е принципът на субординация и е получено представяне на решенията на обобщена субдифузна задача в Теорема 5.5, включваща еволюционни уравнения от разпределен ред от вида

$$\int_0^1 \mu(\beta)^C D_t^{\beta} u(t) d\beta = Au(t) \quad \text{и} \quad u'(t) = \int_0^1 \mu(\beta) D_t^{\beta} Au(t) d\beta,$$

с начални условия $u(0) = a \in X$ и ${}^C D_t^{\beta}, D_t^{\beta}$ са дробни производни на Капуто и Риман-Луивил, съответно, $\mu(\beta)$ е дискретно или непрекъснато разпределение. В скаларния случай е изучено подробно обобщеното уравнение на релаксация (Теорема 5.7), което е приложено за обратна задача с източник.

- Изследвани са еволюционни уравнения с няколко производни по времето от различен ред

$$\begin{gathered} {}^C D_t^{\alpha} u(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j^C D_t^{\alpha_j} u(t) = Au(t) + f(t) \quad \text{и} \\ u'(t) = D_t^{1-\alpha} Au(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j D_t^{1-\alpha_j} Au(t) + f(t), \quad t > 0 \end{gathered}$$

в които $1 \ge \alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_m > 0$, $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, A е оператор пораждащ C_0 полугрупа. С принципа на субординация е получено представяне на решенията им (Теорема 6.1) с мултиномна функция на Митаг-Лефлер, от типа на Прабхакар. Получени са също и нови оценки на функциите на релаксация (Теорема 6.7).

- За дифузно-вълнови уравнения с няколко производни по времето от различен ред

$$c\,{}^C D_t^{\alpha} u(t) + \sum_{j=1}^{m} c_j\,{}^C D_t^{\alpha_j} u(t) = Au(t) \quad u(0) = a \in X, \quad u'(0) = 0,$$

в които $\alpha \in [1,2]$, $\alpha > \alpha_1 > \ldots > \alpha_m > 0$, $\alpha - \alpha_m \leq 1$, $c, c_j > 0$, A поражда силно непрекъсната косинусова операторна функция, е получено интегрално представяне на субординационното ядро (Теорема 7.4).

- За уравнения от разпределен ред, при допълнителни условиа, е доказано, че фундаменталното решение е вероятностна плътност. Това дава възможност за прилагане на принципа на субординация(Теорема 7.8)

- Доказано е, че модулите на релаксация за редица обобщени вискоеластични модели (Теореми 8.2 - 8.4) са напълно монотонни функции.

5) Авторефератът правилно отразява съдържанието и приносите в дисертационния труд.

6) Получените в дисертацията резултати от доц. Е. Бажлекова са нови, предмет са на 11 статии. Те са публикувани след 2015 г. в реномирани списания по математика, като например: Fract. Calc. Appl. Anal. - 2; Integr. Transf. Spec. Funct. - 2; Mathematics - 2; J. Comput. Appl. Math. - 1;Int. J. Appl. Math. - 1; Math. Met. Appl. Sci. - 1;AIP Conf. Proc. - 1; Fractal Fract. - 1. С импакт фактор (IF) са 8 публикации [10, 12 - 15, 18, 20, 22], 2 са с SJR [19, 25] и 1 [11] е индексирана в Scopus, но без IF/SJR (номерацията е по списъка на литература в дисертацията). От статиите 5 са в съавторство с I. Bazhlekov и S. Pchenichkov и 6 са самостоятелни. Като имам предвид теоритичните резултати получени в статиите и включени в дисертацията, приемам, че приносът на дисертанта в съвместните публикации е съществен. Също така резултатите на нито една от горните 11 публикации не са включени нито в дисертацията на доц. Е. Бажлекова за ОНС "доктор", нито в материалите по конкурса й за доцент през 2014г.

Във връзка с Правилника на БАН за прилагане на ЗРАСРБ за " минималните изисквани точки по групи показатели" за доц. Е. Бажлекова се получава следното:

А - 50 т.; Б - 100 т.; В - 200 т.; Г - 402 т.;Д - 540 т.; Е - 40 т..

Това означава, че тези изисквания са изпълнени. Ще подчертая, че за точките по показатели Г и Д са отчетени само публикациите включени в дисертацията и цитиранията им, които са 90 за периода след 2015 г..

7) Имам следните бележки:

а) В автореферата и десертацията се използват 3 различни номерации на цитираната литература. Според мен би трябвало да се използва само номерацията от дисертацията. Също така номерацията на секции както и теоремите в автореферата и дисертацията е различна.

б) Използват се едновременно термините фундаментално решение и функция на Грийн за едни и същи функции. Фундаментално решение е решение в смисъл на разпределения на диференциално уравнение с дясна част δ-функция на Дирак Функция на Грийн е решение на гранична задача с дясна част δ-функция или на начално - гранична задача с начално условие δ-функция. Считам, че дефинициите на фундаментално решение и на функция на Грийн е необходимо да бъдат дадени в гл. 1 в дисертацията.

Тези бележки не се отнасят за научните приноси получени в дисертацията.

с) Считам, че дисертацията би могла да се оформи и предложи за издаване като монография.

8) Заключение: Дисертацията на доц. Е. Бажлекова е в актуална и интензивно развиваща се област на математическия анализ. Подготвена е на високо научно ниво и напълно удовлетворява изискванията на ЗРАСРБ и на Правилниците на БАН и на ИМИ-БАН за неговото прилагане. Считам също така че в дисертацията и в статиите по нея няма плагиатство.

Препоръчвам на научното жури да присъди на доц. д-р Емилия Бажлекова научната степен "Доктор на науките" в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 "Математика", научна специалност Математически анализ.

Октомври 04, 2022 Подпис:

Ц. Рангелов