АВТОРСКА СПРАВКА

за научните приноси на **доц. д-р Евгения Д. Попова**

в трудовете представени в конкурс за професор по математика
научна специалност 01.01.13 Математическо моделиране
(интервални методи и софтуер за линейни параметрични задачи с неточни данни)
обявен от ИМИ–БАН в ДВ бр. 42 от 05.06.2012г.

Общият брой на научните публикации е 93, от които 21 са в списания с импакт фактор. Общият брой на забелязаните цитирания от други автори е около 362.

За участие в конкурса са представени 31 тематично обединени научни статии. От тях две [K30] и [K31] са участвали в конкурс за ст.н.с. II ст., а останалите не са прилагани в друг конкурс.

Представените за участие в конкурса статии са разделени в следните три групи

1. Методи за линейни параметрични задачи с интервални данни
2. Интервален софтуер
3. Приложения

Поради естеството на математическото моделиране, обаче, много от статиите съдържат резултати и в трите области.

1 Методи за линейни параметрични задачи с интервални данни

Разглеждат се системи линейни алгебрични уравнения от вида $A(p)x = b(p)$, където елементите на матрицата и на вектора в дясната страна зависят или линейно или нелинейно от параметри $p_1, \ldots, p_k$ варииращи в дадени интервали.

За разлика от непараметричните интервални линейни системи, които са добре изучени, за системи линейни уравнения съдържащи интервални параметри има малко резултати, тъй като техните множества от решения са нелинейни в общия случай, дори при линейни зависимости между параметрите. Параметричните линейни системи, обаче, са изключително важни и се търсят ефективни методи за такива задачи поради това, че практическите задачи съдържат сложни зависимости между неточни параметри.

В секции 1.1, 1.2 и 1.3 се разглежда така-нареченото обединено множество от решения

$$\Sigma^p_{uni} = \Sigma(A(p), b(p), [p]) := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in [p], A(p)x = b(p)\}$$

и са представени нови или подобрени съществуващи числени методи, които намират гарантирано[1] външно включване за интервалната обвивка на това параметрично множество от решения и за класове задачи според типа на зависимостите между параметрите.

За системи с линейни зависимости, в секция 1.4 са представени резултати свързани със задачата за намиране на явно описание на параметрични множества от решения чрез

[1] Методите с автоматична верификация на резултата са интервални методи (отчитащи грешката от прекъсване на математическия метод), за които са създадени специални алгоритми (отчитащи грешките на компютърната аритметика в крайна прецизност), и чието компютърно изпълнение дава интервален резултат, който 100% съдържа точния математически резултат.

неравенства. В тази секция са представени и статии, в които за пръв път се разглежда един много по-голям и по-общ клас от параметрични множества от решения, така-наречените AE параметрични множества от решения, за $\mathcal{A} \cup \mathcal{E} = \{1, \ldots, k\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{E} = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \Sigma^p_{AE} &= \Sigma(A(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{E}}), b(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{E}}), [p]) \\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall p_{\mathcal{A}} \in [p_{\mathcal{A}}])(\exists p_{\mathcal{E}} \in [p_{\mathcal{E}}])(A(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{E}})x = b(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{E}}))\}. \end{aligned}$$

За AE параметрични множества от решения са намерени явни описания чрез неравенства и са публикувани методи за намиране на външно включване за решението.

1.1 Линейни системи с линейни зависимости

Методи за намиране на гарантирано външно и вътрешно включване за точната интервална обвивка на обединеното множество от решения на линейна система с линейни зависимости между набор от интервални параметри са публикувани в статиите: [K31], [29], [27], [23], [16], [20], [15]. В [13] е публикуван метод за визуализация на границата на обединеното множество от решения за разглежданите системи уравнения.

Основен резултат в [K31] е Теорема 3, където се предлага параметрично обобщение на класическия непараметричен интервален метод от тип Gauss-Seidel. Доказва се, че по-тясното включване за обхвата[2] на параметричния оператор от тип Gauss-Seidel осигурява получаване на по-тесни граници за параметричното множество от решения в сравнение с непараметричния оператор. Върху параметрична линейна система, получена при моделиране на електрически вериги (Okomura's example), е демонстрирано:

– приложението на предложения нов метод,

– използването на обобщена интервална аритметика върху собствени и несобствени интервали за точно външно и вътрешно включване на обхвата на параметричния оператор от тип Gauss-Seidel,

– преимуществата на предложения нов метод в сравнение с единствения по това време параметричен метод на S. Rump за решаване на параметрични линейни системи.

В [27] е дефинирано понятието "силна регулярност" за параметрични матрици. Доказани са редица характеристични свойства на такива матрици (Теорема 1). Теорема 2 доказва, че условието за силна регулярност на параметрична матрица дава по-добра оценка за регулярността на една параметрична матрица отколкото условието за силна регулярност на съответната[3] непараметрична матрица. В случай на линейни зависимости между параметрите, Твърдения 1 и 2 съдържат изчислителен аналог на дефиниционното свойство и на Теорема 2. Централен резултат в [27] е Теорема 3, която съдържа компютърно проверяеми достатъчни условия за регулярност на параметрични интервални матрици. Условията са формулирани в термините на компютърна аритметика с насочени закръглявания, което осигурява гарантирано компютърно доказателство на математическото твърдение. Теорема 4 съдържа друга формулировка на Теорема 3.

Въз основа на публикуваните в [27] нови компютърно проверяеми достатъчни условия за регулярност на параметрични интервални матрици, в [23] е обобщен итерационен метод с автоматична верификация на резултата, разработен от З. Румп, за решаване на параметрични интервални линейни системи. Обобщеният метод изисква тясно включване за обхвата на итерационната матрица $\square\{I - RA(p) \mid p \in [p]\}$, има по-широка област на приложение и покрива задачи с така наречените стълбово зависими параметрични матрици, за разлика от оргиналния метод на Румп, който използва по-широката непараметрична матрица $A([p])$.

[2] множество от стойности

[3] получена като интервална обвивка на параметричната матрица

Преимуществата на обобщения метод и за намиране на по-тясно включване на параметричното множество от решения са демонстрирани върху числови примери в [23], [16] и върху системи уравнения получени при моделиране на строителни конструкции [24], [26], [28].

В [16], [29] е представена разработената методология за изчисляване на покомпонентно вътрешно включване на интервалната обвивка на обединеното множество от решения за система параметрични или непараметрични линейни интервални уравнения. Чрез покомпонентно вътрешно включване на интервалната обвивка се оценява *качеството* (точността[4]) на намереното решение (външно включване) за такива системи уравнения. Разработената методология се основава на свойства на алгебричната система от собствени и несобствени интервали и е реализирана като уникална функционалност в редица софтуерни средства за решаване на интервални линейни системи, виж Секция 2.1 и [29], [25], [16], [3].

В [20] е направено подобрение в итерационен метод за решаване на преопределени и недоопределени линейни системи, където входните данни са неточни и варират в дадени интервали. До такива системи водят, например, задачи за идентификация на параметри, където има неточности както в изходните, така и във входните променливи. Усъвършенстваният метод (Теорема 1 за преопределени и Теорема 2 за недоопределени системи) комбинира итерационен метод с автоматична верификация на резултата с метод за елиминиране на интервални зависимости и постига по-голяма точност на интервалното включване. Описан е реализационен алгоритъм, който отчита параметричната структура на решаваните линейни системи, поради което има по-добра ефективност както по отношение на точността на намереното решение, така и по отношение на изчислителната сложност. Методът е приложим както към преопределени и недоопределени линейни системи с независими елементи, така и към преопределени и недоопределени системи зависещи от интервални параметри. Числови резултати, демонстриращи предимствата на усъвършенстваните методи за решаване на непараметрични и параметрични пре- и недоопределени интервални линейни системи, са публикувани в [20].

В [15] е публикувана методология за компютърно числено доказателство на свойствата монотонност, изпъкналост/вдлъбнатост, или комбинаторна интервална обвивка за решението на параметрична линейна система с неточни данни. Доказването на такива свойства позволява намиране на точни граници за множествата от решения на линейни параметрични задачи с неточни данни. Предложената методология е много по-прецизна и по-ефективна в сравнение със сходния подход на J. Rohn за доказване на монотонност. Това е така, защото се решават параметрични системи за производните (вместо непараметрични) и се отчитат зависимостите от началното приближение в дясната страна на системи за производните; често когато не може да се докаже монотонност на решението по дадени параметри може да се докаже свойството комбинаторна интервална обвивка за решението. Демонстрирано е преимуществото на гарантираните числови доказателства използващи интервални методи и аритметика с плаваща точка в сравнение с използването на точна аритметика и аналитични методи, които имат експоненциална сложност, (виж цитираната в [15] статия на Ganesan et al [2]). В средата на системата за технически пресмятания *Mathematica* са създадени съответни софтуерни средства. Върху множество приложни задачи е демонстрирано преимуществото на този подход за гарантирано числено доказателство в сравнение с други методи и при атакуване на много повече класове от линейни параметрични задачи с неточни данни. Този подход е използван в работите [19], [24], [26] и [28], където се моделират задачи от механиката на деформируемото твърдо тяло, описвани с гредови, прътови и рамкови равнинни или пространствени крайни елементи.

[4] колко близко е намереното външно включване до точната интервална обвивка на множеството от решения

Разработен е оргинален метод за визуализиране границата на обединеното множество от решения на система линейни уравнения съдържаща линейни зависимости между интервални параметри. В [13] е представен подход, при който вградени графични функции в софтуерните системи *Mathematica* и Maple могат да бъдат използвани за визуализация на едно- и двупараметрични множества от решения. Направен е критичен анализ на този подход, при който 2D и 3D параметрични множества от решения се визуализират чрез параметрични криви, съотв. повърхнини в мрежа от точки върху интервалите, които не са параметри. Предложен е нов подход за визуализация само на границата $\partial\Sigma^p$ на параметричното множество от решения. Централно място в тази статия заемат Теорема 4.1 и Теорема 4.2, които характеризират $\partial\Sigma^p$ чрез части от параметрични хиперповърхнини, представени чрез координатни функции зависещи от не-повече от $n-1$ параметъра. Предложената нова методология е разработена с цел ефективна визуализация на параметрични множества от решения и може да бъде реализирана чрез използване на графични функции поддържани от софтуерните системи *Mathematica* и Maple. Това е *единственият* подход, чрез който могат да се визуализират проекции на множеството от решения в подпространства с размерност по-малка от n, или когато самото множество от решения има по-малка размерност. Така, единствено предложеният метод позволява визуализация на параметрични множества от решения с размерност по-голяма от 3 чрез визуализиране на проекциите им в двумерни подпространства. Това преимущество на метода е демонстрирано в [13] върху параметрични множества от решения на линейни системи генерирани при моделиране на елекрически вериги.

1.2 Линейни системи с нелинейни зависимости

Системи линейни уравнения съдържащи нелинейни зависимости между интервални параметри са разглеждани в [17], [17 а)], [11], [19], [8].

В [17], [17 а)] за пръв път са изследвани линейни системи, където елементите на матрицата и вектора в дясната страна са рационални функции на интервални параметри. Показано е, че обобщеният в [23] итерационен метод за линейни системи съдържащи линейни зависимости между интервални параметри е приложим и за системи с нелинейни зависимости, като се изисква тясно включване за интервалната обвивка на вектора на остатъците $Z(p)$ и на итерационната матрица $C(p)$, които са нелинейни (рационални) функции на интервалните параметри. В [17], [17 а)] итерационният метод е съчетан с техника за точно пресмятане на обхвати на рационални функции, която се базира на свойства на алгебричната система от собствени и несобствени интервали. Предложеният комбиниран метод е представен подробно в [17 а)] заедно с неговата формулировка в компютърна аритметика, алгоритмична схема и числови примери. Комбинираният метод и неговата реализация имат общ характер — те са приложими за линейни системи съдържащи произволни рационални зависимости. За сега няма друг метод с автоматична верификация на резултата, който има такъв общ характер. Методът е приложен в [17 а)] и [19] при моделиране на строителни конструкции и е демонстрирана неговата ефективност.

В [11] горният общ итерационен метод за параметрични линейни системи е комбиниран с ефективен метод за пресмятане на обхвати чрез развитие на многомерни полиноми в полиноми на Bernstein. Целта е да се получи по-тясно включване за множеството от решения когато зависимостите между параметрите са полиномиални. Чрез софтуерната реализация, която използва иновативна технология (виж секция 2.3) за влагане на външни C++ програми (пресмятащи обхватите) в *Mathematica*, се постига съществено ускорение при решаването на тези сложни задачи. Разработеният подход (методология, хибриден софтуер и бенчмарк примери от [19]) се използва съществено от колектива Smith, Garloff, Werke при решаване на практически задачи от механиката, виж статиите на този колектив цитиращи [17], [17 а)].

В [8] методът за линейни системи съдържащи нелинейни зависимости и разработеният софтуер са използвани за решаване на линейни системи съдържащи линейни зависимости между комплексно-значни интервални параметри получени при моделиране на елекрически вериги, виж по-долу.

1.3 Линейни системи с комплексно-значни параметри

Системи линейни уравнения съдържащи комплексно-значни параметри са разглеждани в [8] и [3]. В [8] са приложени и сравнени два подхода за решаване на линейни системи съдържащи линейни зависимости между комплексно-значни интервални параметри. При първия подход изходната линейна система се трансформира в двойно по-голяма, която съдържа два пъти повече реално-значни параметри, зависимостите между които, обаче, са нелинейни. Трансформираната линейна система се решава с методите и софтуера за нелинейни зависимости (виж секция 1.2). Вместо решаването на двойно по-големи задачи с много по-сложни зависимости, в [8] е предложено обобщение на итерационния метод за реално-значни параметри, което използва комплексна интервална аритметика за пресмятане на обхватите на комплексно-значни интервални функции, и решава изходната линейна система. Поради липса на комплексна интервална аритметика в *Mathematica*, създаденият пилотен софтуер е хибриден и използва комуникацинен протокол за да вложи C-XSC изчисления с комплексна интервална аритметика в *Mathematica*, виж секция 2.3. В случая когато обхватите на нелинейните функции се смятат точно, двата подхода произвеждат сравними по качество на включването резултати, но вторият подход е по-ефективен по скорост на изпълнение. Затова, в [3] е представен създадения оптимизиран C-XSC модул за решаване на линейни системи с комплексно-значни интервални параметри. Двата подхода, анализирани в [8], и софтуера представен в [3] са приложени към задача за worst-case анализ на модел на електрическа верига описан с такъв тип параметрична линейна система.

1.4 Явно описание на параметрични множества от решения

Явно описание на параметрични множества от решения за линейни системи съдържащи линейни зависимости между интервални параметри се разглежда в статиите [К30], [9], [2], [4]. Явното описание на едно параметрично множество от решения чрез неравенства, които не съдържат параметрите, е фундаментална задача, която е от съществено значение за изследване свойствата на параметричните множества от решения и, съответно, за конструиране на по-добри числени методи; за намиране на точната обвивка на множеството от решения и съответно при тестване на различни методи. Задачата е всеобщо призната в логиката и компютърната алгебра за много сложна. Един общ подход за решаване на тази задача е предложеният от А. Тарски метод за елиминация на квантори. Този подход е много тежък, не винаги достига до решение и е двойно експоненциален по броя на генерираните неравенства. Затова, литературата изобилства от статии, които изследват частни случаи с полиномиална степен на разрешимост.

В [К30] са доказани необходими и достатъчни условия, при които интервалната обвивка на обединеното множество от решения на една параметрична линейна система съвпада с обвивката на решението на съответната непараметрична система. За непараметрични лиейни интервални системи, обаче, съществуват методи за пресмятане на интервалната обвивка. Намерен е лесен изчислителен аналог на доказаните условия. За редица частни случаи (напр. inverse-stable матрица) са изведени и лесно проверяеми достатъчни условия за съвпадане на интервалните обвивки за двата класа задачи. В този случай имаме и явно представяне на обвивката на параметричното множество от решения.

В [9] е предложена нова класификация на интервалните параметри участващи в системи линейни алгебрични уравнения с линейни зависимости. В [9] и [2] е показано, че тази класификация е от съществено значение за така-нар. Fourier-Motzkin процес на елиминация на параметрите. За системи, в които всеки параметър се среща само в едно уравнение (независимо колко пъти), е намерена явна характеризация на параметричното множество от решения. Характеризационните неравенства за този клас задачи са много семпли и подобни на неравенствата от известната теорема на Oettly-Prager за непараметрични линейни системи. Числени примери и сравнение с характеризация чрез елиминация на квантори в КАС *Mathematica* са представени в [9].

Изследванията започнати в [9] са продължени и обобщени в [2], където е направена съществена модификация на елиминационен процес от тип Fourier-Motzkin, позволяващ явно описание на множеството от решения на параметрична интервална линейна система чрез неравенства. Чрез модифицирания елиминационен процес (Теорема 3.1) характеризиращите неравенства са много по-малко на брой и имат общо представяне, което не зависи от конкретен ортант. Доказано е, че елиминацията на параметрите срещащи се само в едно уравнение не увеличава броя на характеризиращите неравенства и "комутира" с елиминацията на останалите параметри. За двумерни системи с призволен брой параметри е доказано кои от генерираните характеризационни неравенства са излишни (повтарят се или не допринасят за описване на границата на множеството от решения). Благодарение на това, е получено минимално явно описание на множеството от решения за двумерни параметрични линейни системи, Теорема 4.1. Примери 5.2 и 5.3 илюстрират приложението на Теорема 4.1 при елиминация на параметри за системи с размерност по-голяма от две.

В [4] са започнати изследвания върху **множества от решения на линейни системи съдържащи линейни зависимости между интервални параметри, където параметрите се описват освен с квантора за съществуване и с квантора за общност**. Разглеждат се параметрични множества от решения, в чието описание всички квантори за общност предшестват всички квантори за съществуване, наречени AE параметрични множества от решения. Доказани са необходими условия за съществуване на непразно множество от решения в три еквивалентни форми: теоретико-множествена, интервално включване, неравенства. Намерено е явно представяне на параметричните AE множества от решения в частния случай за системи, където всеки параметър участва само в едно уравнение на системата. Изследвани са числови примери, които илюстрират теоретичните резултати и свойства на AE параметрични множества от решения. Явното описание на параметрични AE множества от решения е обобщено и завършено в статията [2] от пълния списък с публикации, която е в процес на рецензиране.

[1] е първата публикация в интервалната литература, където се предлагат и анализират три подхода за *намиране на външна оценка (въшно интервално включване) за непразно и ограничено параметрично AE множество от решения в най-общ вид.* При първия метод, параметричното AE множество от решения се представя като сечение на обединени параметрични множества от решения във всевъзможните краища на интервалите за параметрите описвани с квантора за общност (A-параметри), Теорема 1. От тук следва възможността да се намери външна или вътрешна оценка (включване) за параметричното AE множество от решения чрез сечение на съответните оценки за обединени параметрични множества от решения във всевъзможните краища на интервалите за A-параметрите. Предложено е параметрично AE-обобщение в две форми (Теорема 3 и Теорема 4) на метод, наречен Bauer-Skeel, и разглеждан преди това само за параметрични обединени множества от решения и за непараметрични AE-множества от решения. Първата форма на параметричния Bauer-

Skeel AE-метод потвърждава резултатите за намиране на външно включване чрез първия разглеждан подход, Следствие 4. Във втората намерена форма (Теорема 4), параметричният Bauer-Skeel AE-метод е едностъпков метод с полиномиална сложност. Приложението, свойствата и ефективността на двата подхода (по отношение на изчислителна сложност и качество на намерената външна оценка) са анализирани и сравнени върху двата най-често използвани класове от решения (т.нар. толерансни и управляеми множества от решения) чрез редица числови примери и теоретично (Твърдение 1). Секция 6 на [1] демонстрира приложението на методите на линейното програмиране за намиране на външно включване за параметричното толерансно множество от решения и кога оценката е оптимална. Статията [1] съдържа доста подробен анализ на свойствата на предлаганите методи и насоки за бъдещи изследвания. Очаква се резултатите в [4], обобщението [2, от пълния списък] и [1] да стимулират изследвания върху методи за параметрични AE-множества от решения, които имат много повече приложения от методите за непараметрични AE-множества от решения, тъй като приложните задачи по своето естество са параметрични.

2 Интервален софтуер

Създаването на специализиран софтуер е част от процеса на математическо моделиране. Решаването на практически задачи, или дори извършването само на числови експерименти, е невъзможно без съответен софтуер.

2.1 Софтуерни средства за решаване на линейни параметрични системи с интервални данни

В [29] е представен създаденият програмен модул ParLinSys към библиотеката C-XSC[5], който разширява библиотеката CToolbox[6] със средства за решаване на параметрични интервални линейни системи. Създаденият програмен модул е първият, който реализира общ метод с автоматична верификация на резултата за решаване на параметрични интервални линейни системи в езикова среда и чрез изцяло числово представяне на входните данни. С изключение на описания по-долу *Mathematica* софтуер, това е единственият интервален софтуер в езикова среда, който пресмята не само външна оценка на интервалната обвивка на решението, но и чрез оргинално разработена методология пресмята съответна вътрешна оценка, което позволява да се определи качеството на намерената външна оценка. След разширяването на библиотеката C-XSC с типове данни поддържащи разредени (sparse) вектори и матрици и ново скаларно произведение с променлива (K-fold) прецизност (дължина на мантисата), е създадена нова оптимизирана реализация на C-XSC модулите за линейни параметрични системи, представена в [3]. Двата нови програмни модула за линейни системи с линейни зависимости между

(а) реално-значни, или

(б) комплексно-значни интервални параметри

поддържат всички уникални функционални особености на първоначалния модул за реални интервални параметри. Новата оптимизирана реализация използва:

– вложени подходящи функции от библиотеките BLAS/LAPACK,

– скаларно произведение с променлива (K-fold) дължина на мантисата,

[5]C-XSC е библиотека от C++ класове за научни изчисления (eXtended Scientific Computations) поддържаща типове данни използвани в числените методи и осигуряваща извършване на изчисления с автоматична верификация на резултата.

[6]библиотека от програмни модули за решаване на стандартни задачи от численния анализ с автоматична верификация на резултата.

– ефективно представяне на разредени входни данни,

– специална реализация за многокорова или многопроцесорна хардуерна среда.

Новата реализация позволява много по-ефективно (както по време, така и по използвана оперативна памет) решаване на линейни параметрични системи, което е демонстрирано в [3] с числени експерименти.

В средата на системата за технически пресмятания *Mathematica* са създадени множество функции, които реализират представените в секция 1 нови методи и алгоритмични подходи, които са използвани при анализа на описаните в секция 3 приложни модели. Реализираните функции се различават както по типа на системите за чието решаване са предназначени – преопределени или недоопределени, непараметрични или параметрични, така и по методите които са използвани, виж [25]. Според типа на задачата и входните данни новосъздадените *Mathematica* функции решават следните типове интервални линейни системи:

- непараметрични интервални линейни системи
  - * квадратни * преопределени * недоопределени
  - * боравене с плътни или разредени матрици
- параметрични интервални линейни системи съдържащи линейни зависимости
  - * квадратни * преопределени * недоопределени
  - * боравене с плътни или разредени матрици
- параметрични интервални линейни системи съдържащи рационални зависимости между параметрите
  - * квадратни * преопределени * недоопределени
  - * боравене с плътни или разредени матрици

Разработените функции са снабдени с редица опционни параметри, които контролират изчислителния процес или изходните резултати, виж [25]. Числови резултати получени чрез разработените софтуерни средства са публикувани в [28], [26], [24], [20], [19], [17], [17 a)],[15], [12], [11], [8], [7].

2.2 Уеб-достъпни интерактивни изчисления и графика

Основавайки се на иновационна web*Mathematica* технология, която интегрира системата *Mathematica* в уеб сървър и позволява генериране на динамични уеб-достъпни изчисления, е разработен уеб портал осигуряващ достъп до **уеб-достъпни интерактивни математически изчисления и графика**.

В [18] е представена концепцията и общата рамка на уеб сървър

http://cose.math.bas.bg/webComputing/

предлагащ отдалечен достъп:

- директно до изчислителните ресурси на сървъра — напр. *Mathematica* и C++ софтуер за начни изчисления: C-XSC, CToolbox, filib++,
- до множество разнообразни услуги свързани с динамични и интерактивни уеб-достъпни изчисления и графична визуализация,
- до ресурси за дистанционно обучение и за разработка на интерактивни и динамични средства за **дистанционно обучение**

  http://biocose.math.bas.bg/webMathematica/

Предлаганите отдалечено ресурси и услуги са предназначени както за масово потребление от неспециалисти, за образователни цели, така и за извършване на уникални специализирани изчисления. Разработените уеб интерфейси към динамични изчисления и графика са замислени да бъдат многофункционални като осигуряват както изчислителна мощ, така и интерактивна образователна среда. Някой важни особености на интерфейса към числови пресмятания се състоят в изпращането върху сървъра на големи файлове с данни в различни формати и получаването върху машината на клиента генерираните числови, аналитични или графични резултати също в разнообразие от файлови формати.

В [22] са представени възможностите на разработения уеб портал

`http://cose.math.bas.bg/Sci_Visualization/`

за динамично генериране и доставка на графични услуги. Предоставени са повече от 20 уеб страници позволяващи интерактивно генериране на графика на функции, данни и специални обекти. Услугата е предназначена за широк кръг потребители, както и за нуждите на образованието.

За да бъдат популяризирани разработените нови методи и софтуерни средства, както и за да се осигури широк свободен достъп на учени и инженери (които не са специалисти в интервални методи) до тези средства, е създаден уеб интерфейс към *Mathematica* функциите за решаване на параметрични интервални линейни системи. Уеб порталът за доставка на интерактивни динамични математически услуги `webComputing` е разширен с редица нови функционални възможности за визуализиране на 2D и 3D параметрични и непараметрични множества от решения, както и със специализирани услуги за решаване на параметрични интервални линейни системи. Интерфейсът е разширен със средства за обработка на големи по обем данни и съхраняване на числови и графични резултати. Този нов клас динамични уеб услуги е представен в [21].

2.3 Комуникация и взаимодействие на интервален софтуер

В [14], [10] е предложено използването на **нов методологичен подход при разработване и тестване на интервален софтуер — подход основан на интегриране и взаимодействие на съществуващ интервален софтуер чрез комуникационни протоколи**. Направен е анализ на някои аспекти при осъществяване на обмен между интервален софтуер разработван в различни програмни среди. Представена е технологията осъществяваща взаимодействие на *Mathematica* с външен интервален софтуер чрез комуникационния протокол *MathLink*. Установена е комуникация между *Mathematica* и външен интервален софтуер в компилаторен език, в частност със C++ библиотеките `C-XSC` [14] и `filib++` [10] чрез комуникационния протокол *MathLink*. Осъществените общи изследвания върху комуникация на числови интервали демонстрират: разширени функционални възможности, съвместимост на интервалните представяния, разширени възможности за сравнение и тестване, достъпност от много по-голям брой потребители. Показано е преимуществото при взаимодействие между компютърно-алгебрична система и външен компилиран софтуер: първите разширяват функционалните си възможности и повишават производителността, докато външният софтуер се облагодетелства от символните манипулации, мощните графични възможности, интерфейсни и други аспекти на компютърно-алгебричните системи.

Комуникацията на функционални изрази от системата *Mathematica* към интервалната библиотека C-XSC е съществена стъпка за създаване на общ интерфейс позволяващ изпълнение на C-XSC програми от средата на *Mathematica*. Тъй-като всички C-XSC програмни модули за решаване на задачи с нелинейни функции използват три C-XSC модула за аритметика с автоматично диференциране (АД), осъществяването на съвместимост между функционални изрази зададени в *Mathematica* и специфичните обектни типове данни използвани от C-XSC модулите за АД е осъществено чрез специално създаден софтуер, наречен ADExpressions. Методологията за динамична комуникация на функционални изрази и особености при реализацията на ADExpressions са представени в [6]. Създаденият софтуер е с отворен код и публично достъпен. Въпреки, че използва *MathLink* протокол за комуникация на функционалните изрази, ADExpressions не съдържа функции инсталируеми в *Mathematica*, а е предназначен да улеснява създаването на *MathLink* програми, които интегрират C-XSC програми за АД или програми използващи C-XSC аритметиката за АД. Като доказателство за реализираната концепция и за да се илюстрира приложението на софтуера ADExpressions са създадени три *MathLinк*-съвместими интерфейсни програми (ddfAri, gradAri, hessAri), които влагат в *Mathematica* съответните C-XSC модули за АД като *Mathematica* пакети, виж [5]. Влагането в *Mathematica* на C-XSC модулите за решаване на нелинейни задачи (изолиране нулите на едно- и многомерни нелинейни функции, едно- и многомерна глобална оптимизация) е осъществено чрез новосъздадена *MathLinк*-съвместима интерфейсна програма nlADproblems. Всяка от горните *MathLinк*-съвместими програми съдържа сложно взаимодействие между външния C-XSC код, софтуера ADExpressions, който комуникира функционални изрази, кода на новосъздадените Mathematica пакети и ядрото на *Mathematica*. Някой важни реализационни концепции, както и аспекти на *MathLinк* технологията са представени в [5]. Всички *MathLinк* интерфейсни програми също са с отворен код и достъпни. Дистрибуцията им съдържа демонстрационни *Mathematica* документи илюстриращи употребата им и някои специфични особености.

Предложеният в [14], [10], [6], [5] нов подход за бързо създаване на ефективен интервален софтуер е приложен при:

- пилотно изследване върху решаване на линейни системи с комплексно-значни интервални параметри [8] (виж също секция 1.3),
- пилотно изследване върху нов подход за решаване на линейни системи съдържащи полиномиални зависимости между интервални параметри [11] (виж също секция 1.2) и създаденият нов по-ефективен интегриран софтуер за решаване на такива задачи,
- решаване на множество приложни задачи от колектив с ръководител J. Garloff от Унив. в гр. Констанц, Германия, виж публикациите на този колектив цитиращи [17] (от публикациите за конкурса).

3 Приложения

Моделирането на практически процеси и явления обикновено съдържа неточности от различно естество, виж напр. [28]. Когато за дадена величина в модела няма достатъчно информация за да се използва стохастичен подход, тогава се използват интервални методи. Използването на интервални методи нараства и поради необходимостта от сигурност (напр. при моделиране на строителни конструкции) или когато трябва да се вземат критични решения в условия на неопределеност.

Приложения на създадени методи и софтуерни средства към задачи за worst-case анализ на модели на електрически вериги са публикувани в [K31], [13], [8], [3] и представени в секции 1.1 и 1.3.

Създаването на ефективни методи за решаване а механо-математични модели с неточности в моделните характеристики е от съществено значение за инженерната практика. Чрез съчетаване на класически методи от изчислителната механика с общи методи на интервалния анализ в статиите [19], [24], [26] и [28] е въведен един нов подход при моделиране на класове задачи от механиката на деформируемото твърдо тяло. При този подход се отчита неопределеността в параметрите на модела (неточността на данните) и по този начин се внася по-голям реализъм и сигурност в процеса на моделиране.

В [28] е решена задача за композитен материал с два пълнитела, като еластичните показатели на матрицата и пълнителите са неточни, но ограничени в дадени интервали. Сравнявани са различни интервални методи по отношение на качеството на интервалната обвивка, която доставят за множеството от решения на разглежданата параметрична система, получена след крайно-елементна дискретизация на модела. Намирането на много тесни включвания за вектора на преместванията се извършва с помощта на хибриден подход, при който се решават параметрични интервални линейни системи във фиксирани краища на интервалите за параметрите, по които решението е монотонно. Този методология е разширена и приложена за първи път в [28] и [24] за намиране на точния обхват на напреженията в елементите на модела. В [28] е предложен и нов робастен подход за оценка на напреженията във възлите на модела.

В [26] е решена задача за деформиране на цилиндрична кухина в земна среда с неопределеност в еластичните материални характеристики. Граничните условия са приложено мигновено натоварване върху стените на кухината и нулево налягане на безкрайност. Тази задача симулира оценка на разпределение на напреженията и деформациите в околност на кухина в скален масив за който се предполага че материалните константи варират в даден интервал. Получените интервални решения са сравнени с дисретното (FE code MSC.MARC) и аналитичното решение на същата задача в детерминистична постановка. Извършени са множество числени експерименти чрез прилагане метода на S. Rump за решаване на параметрични интервални линейни системи и чрез разработения в [28] хибриден подход осигуряващ по-добро качество на намереното решение. Описан е отговорът на механичната система в случай на worst-case scenario при вариране на параметрите на модела.

Една добре известна и широко-използвана техника при моделиране на строителни конструкции е чрез представянето им като двумерна или тримерна ферма съставена от прътови или гредови крайни елементи подложени на статични или динамични натоварвания. В [17 a)], [19], и [15] са разглеждани разнообразни моделни задачи на строителни конструкции. Като интервални параметри са приети геометрични и материални характеристики на модела: еластичен модул, инерционен момент, дължина на елемента, ориентация на елемента и натоварване. Целта при разглеждането на моделните задачи е чрез комбинация от методи да се намери точната обвивка на параметричното множество от решения и да се изследва приложението на предложените нови методи за намиране на тясно гарантирано включване за решението.

Неточностите в геометричните характеристики на модела водят до параметрична интервална линейна система, която съдържа нелинейни зависимости между параметрите. Този тип задачи е много труден и все-още няма достатъчно добре развити интервални методи и средства за тяхното ефективно решаване. Ето защо, в [17 a)] е изследвано решението на една benchmark задача[7] моделираща едно-аркова метална рамка. Прилагайки представения в секция 1.2 метод за параметрични линейни системи с рационални зависимости и представения в секция 1.1 метод за компютърно-асистирано доказателство, е демонстрирана по-голямата ефективност на разработените от нас методи по отношение точността на получаваните решения.

В [19] сме създали два собствени benchmark примера на линейна система с рационални зависимости между моделните параметри, получени при моделиране на двуетажна сграда.

[7] Corliss, G., C. Foley, and R. B. Kearfott: *Formulation for Reliable Analysis of Structural Frames*. In R. L. Muhanna and R. L. Mullen, editors, Proceedings of NSF workshop on Reliable Engineering Computing, Savannah, Georgia, September 2004, USA.

Демонстрирано е приложението на метода за параметрични линейни системи с рационални зависимости към практически задачи, където неточностите присъстват във всички параметри на модела и интервалният метод не се влияе от начина, по който е конструирана параметричната система. За разлика от други подходи, където се експлоатира конкретна структура на зависимостите, обобщеният итерационен метод за линейни и нелинейни зависимости има общ характер. Хибридният подход и подразделяне на интервалите, основано на анализ на чувствителността, позволяват значително повишение на точността на решенията. В страницата на Уикипедия за "Интервални крайни елементи", виж цитат [63], се отбелязва, че в статията [19] "са получени много интересни резултати".

Биологични модели. Изследвайки динамичните свойства на числените методи за ОДУ обикновено е трудно да се балансира между запазване свойствата на решенията и постигането на прост числен метод. В [12], [7] са представени надеждни методи за конструиране и анализ на числова дискретизация за непрекъснати динамични системи. Съчетани са два подхода: методът на нестандартни крайни разлики и гарантирани числови пресмятания. В [7] е доказано достатъчно условие за нестандартен метод на крайни разлики да бъде топологично и динамично съвместим с една динамична система. Практическото значение на този резултат е демонстрирано върху SEIR(->S) епидемиологичен модел. За този модел е конструирана безусловно сходяща и динамично съвместима числова схема. Представени и анализирани са нейните свойства. Тъй като структурната стабилност на дискретизацията на модела не влече числова стабилност, за да се докаже последното са използвани интервални методи. В [12], [7] е разглеждана линейната параметрична система получена след структурно стабилната дискретизация на модела на разпространение на инфекциозна болест в дадена популация. Чрез методите за решаване на линейни системи с интервални параметри е направен анализ на чуствителността на компонентите на решението на системата по отношение на изменения в стойностите на параметрите на модела. Този анализ потвърждава количествено числовата стабилност на конструираната итерационна схема.

Трябва да подчертаем, че приложението на представените в предходните секции резултати не се изчерпва само с приложенията направени от автора. Интервални методи се използват много често в изследвания върху и използващи размити множества, виж цитиращите статии [5], [29], [92], [111], [123], [124], [139], [150]. Софтуерът за решаване на параметрични линейни системи и уеб-порталът webComputing са използвани съществено в цитиращите статии [93], [95] при моделиране на фармацевтични процеси, както и от [37]–[40], [42]. Поради тава, че доставя **свободно** уеб-достъпни изчисления и графика, уеб-порталът webComputing има множество други не-документирани приложения извън намерените цитати [53]–[58].

30 юли 2012г — Е. Попова