Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертация

Дизайни в антиподални полиномиални метрични пространства

за научната и образователна степен „доктор“ на Христина Николова Кулина научна област 4. природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика научна специалност 01.01.02 Алгебра и Теория на числата Институт по математика и информатика, БАН

1. Данни за дисертанта. Христина Кулина е родена на 18.06.1970 г. През 1993 г. завършва висше образование специалност Математика и информатика в ПУ „Паисий Хилендарски“. От 1995 г. работи във ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“ като асистент (1995-2000), старши асистент (2005-2007) и главен асистент. В периода 01.01.2008 г. – 01.01. 2012 г. е задочен докторант в ИМИ - БАН, секция Математически основи на информатиката.

2. Данни за докторантурата. Христина Кулина е била задочен докторант в ИМИ - БАН, секция Математически основи на информатиката от 01.01.2008 г. до 01.01. 2012 г. Положила е успешно необподимите изпити и е отчислена от НС на ИМИ с право на защита. Предзащитата се състоя на 30.11.2012 г. и завърши с положително мнение на звеното. Представеният от Христина Николова Кулина комплект материали по дисертацията е в съответствие с Правилника на ИМИ за прилагане на ЗРАСПБ. Не са ми известни нарушения на процедурата при реализиране на дисертацията.

3. Данни за дисертацията и автореферата. Дисертацията е в обем на 129 страници и съдържа увод, четири глави и приложения. В библиографията са включени 72 заглавия.

В увода са представени основните дефиниции, понятия, необходими за изложението, като са представени и основните цели и задачите на дисертацията.

Основните структури, които се изследват в дисертацията са кодове и дизайни върху единичната сфера S^{n-1} и в двоичното Хемингово пространство $H(n, 2)$.

Всяко подмножество C на S^{n-1} се нарича сферичен код, като основните характеристики на такъв код са: мощност M, минимално разстояние $d(C)$ и максимално скаларно произведение $s(C)$. Съответният код се означава като (n, M, s) код. Даден сферичен код $C \subset S^{n-1}$ се нарича сферичен τ-дизайн, ако равенството

$$\int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} f(x)$$

е изпълнено за всеки полином $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от степен, ненадминаваща τ. Сила на дизайна се нарича най-голямото цяло неотрицателно число τ, за което C е сферичен τ-дизайн.

За код $C \subset H(n, 2)$ с мощност M разглеждаме матрицата $M \times n$, чийто редове са кодовите вектори. Код C се нарича τ-дизайн, ако всяка $M \times \tau$ подматрица съдържа всяка наредена τ-орка от $H(\tau, 2)$ точно $\frac{|C|}{2^\tau}$ пъти. Както и при сферичните дизайни, най-голямото неотрицателно цяло число τ, за което C е τ дизайн, се нарича сила на дизайна. Индекс на τ-дизайн се нарича числото $\lambda = \frac{|C|}{2^\tau}$.

Основна задача в изследването на дизайни е намиране на минималната мощност на τ-дизайн при фиксирано n. Тази стойност се бележи с $B(n, \tau)$. При дизайни в $H(n, 2)$ задачата за намиране на $B(n, \tau)$ е еквивалентна със задачата за намиране на

$$L(n, \tau) = \min\{\lambda : \text{ съществува } \tau - \text{дизайн } C\}.$$

Основните задачи за дизайни в $H(n, 2)$ са свързани с оценяване на функцията $L(n, \tau)$, както и с изследване на радиуса на покритие и моментите на дизайни.

При сферичните дизайни се изследва функцията $B(n, \tau)$, както и съществуването на дизайни с определени параметри n, τ и мощност M.

В Глава 1 са представени основните дефиниции и известни резултати, необходими за по-нататъшното изложение. Антиподалните полиномиални метрични пространства $H(n, 2)$ и S^{n-1} са разгледани със съответните зонални сферични функции – полиномите на Кравчук и полиномите на Гегенбауер. Представени са универсалните граници на Левенщейн за кодове и границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за дизайни. Въведени са еквивалентни дефиниции за τ-дизайни, чрез използването на разлагането на полином чрез зоналните сферични функции. Дефиниран е спектър на код C и са описани известните граници за основните параметри.

Във втора глава се изследват дизайни в $H(n,2)$ чрез определяне на възможните спектри за всяка точка $y \in H(n,2)$. За даден τ-дизайн C и произволно $y \in H(n,2)$ се дефинира

$$A_y(C) = (q_0(y), q_1(y), \ldots, q_n(y)),$$

където $q_k(y) = |\{x \in C : d(x,y) = k\}|$ за $k = 0, 1, \ldots, n$. Предложен е метод за намиране на всички възможни спектри за даден дизайн. Намирането на тези спектри се свежда до решаване на система от $\tau + 1$ уравнения с $n + 1$ (или n) неизвестни за вътрешна или външна за дизайна точка. Решенията на тази система се определят от стойностите на $n-\tau$ (или $n-\tau-1$) свободни неизвестни. Получаването на всички възможни спектри за дадени n, τ и λ се реализира с помощта на Matematica 7.0.

В тази глава са предложени и два алгоритъма за определяне на възможните спектри. Първият алгоритъм дава връзка между спектрите на дизайни с дължина n и $n-1$, както и необходимо условие за това, получен от решаването на описаната по-горе система спектър, да е спектър на вътрешна точка за съответния дизайн.

Вторият алгоритъм се базира на връзки между спектрите на точки от C с тегла τ_0, ненадминаващи τ и спектрите на дизайни C' с параметри $\tau - (n - \tau_0, |C|)$.

Не е дискутиран въпроса за допустимостта на последователното прилагане на двата алгоритъма.

Част от резултатите от тази глава са докладвани на международна конференция ACCT2010. Предложена за публикуване в Problemy Peredachi Informaciib е статия, включваща резултатите, получени чрез съвместно прилагане на двата теглови алгоритъма.

В трета глава се използват полиномиални техники за изследване на радиус на покритие на дизайни. Въвежда се и се изследва една нова числова характеристика на кодове и дизайни в $H(n,2)$ - момент.

Радиус на покритие на код C се нарича най-малкото ρ, за което метричните кълба с радиус ρ и центрове точките от C покриват цялото пространство $H(n,2)$. Получаването на граници за радиуса на покритие на дизайни се свежда до намирането на полиноми с дадени свойства.

Въвеждането на моментите като характеристика на даден дизайн е мотивирано от равенството, представено в Теорема 1.2.4

$$|C|f(1) + \sum_{x,y\in C, x\neq y} f(\sigma_M(d(x,y))) = |C|^2 f_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} \left| \sum_{x\in C} v_{ij}(x) \right|^2.$$

С k_i се означава броят на наредените двойки в C на разстояние $n-i$, т. е.

$$k_i = |\{(x,y) \in C : \langle x,y \rangle = \sigma_i\}|, i = 0,1,\ldots,n-1, k_n = |C|.$$

Връзката между моментите и числата k_i е представена в Лема 3.2.3. Тя се изразява чрез следното равенство:

$$f(1)|C| + \sum_{i=0}^{n-1} k_i f(\sigma_i) = f_0|C|^2 + \sum_{i=r+1}^{deg(f)} f_i M_i.$$

В Теорема 3.2.8 и Следствие 3.2.9 е доказано, че всеки $\tau+1$ на брой от неизвестните $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ могат да се изразят чрез останалите, откъдето следва, че всеки момент $M_j, j = \tau+1, \ldots, n$ може да се изрази чрез $n-\tau-1$ от неизвестните k_i. Следователно намирането на точните стойности на моментите или получаването на граници позволява да се получават граници за числата k_i. Оттук могат да се намерят и ограничения за спектрите на вътрешни за разглеждания дизайн точки.

Резултатите от тази глава са докладвани на международни конференции Optimal codes and related topics, 2009 и Algebraic and Combinatorial Coding theory, 2012.

Четвърта глава е посветена на изследването на структурата на някои сферични дизайни. За целта за всяка точка $x \in S^{n-1}$ се разглежда множеството от скаларните произведения на тази точка с елементите на дизайна:

$$I(x) = \{\langle u,x \rangle : u \in C\}.$$

При това можем да считаме, че точките в C са подредени в редица $u_1, u_2, \ldots, u_{|C|}$ така, че

$$-1 \le \langle u_1, x \rangle \le \langle u_2, x \rangle \le \cdots \le \langle u_{|C|}, x \rangle \le 1.$$

При $t_i(x) = \langle u_i, x \rangle$ намирането на граници за стойностите на $t_i(x)$ (особено при $i = 1,2$ или $|C|$) позволява да се изследва структурата на даден дизайн. В частност са получени необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Получени са (съответно в Теорема 4.1.2 и Теорема 4.1.5) горна граница за максималното скаларно произведение на сферичен τ дизайн и долна граница за минималното скаларно произведение на сферичен τ дизайн, който не притежава двойка противоположни точки.

В парагараф 4.3 се получени резултати за несъществуване на 3-дизайни. За размерности $3 \leq n \leq 50$ от всички 94 от нерешените случаи е доказано несъществуване на дизайн с дадените параметри в 35 от случаите.

В параграф 4.4 са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни, като е доказано несъществуване на 5-дизайни във всички 42 нерешени случая. В Теорема 4.4.11, в която се обобщават резултатите, е доказано, че за да съществува 5-дизайн $C \subset S^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 25$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.

Резултатите от тази глава са публикувани в една статия в Designs, Codes and Cryptography, една статия в Journal of South-West University, Blagoevgrad и са докладвани на международна конференция Optimal Codes and Related Topics, 2007.

Авторефератът отговаря на съдържанието на дисертацията и представя коректно получените резултати.

4. Публикации. В дисертацията са представени резултати, публикувани в 6 статии и в една статия, която е предложена за печат.

Всички статии са в съавторство с научния ръководител на дисертанта, като в три от публикациите има още двама съавтори.

Една от статиите е публикувана в Designs, Codes and Cryptography. Четири от публикациите са в сборници от международни конференции: две в ACCT (Algebraic and Combinatorial Coding Theory), две в OC (Optimal Codes and Related Topics), една в Journal of South-West University, Blagoevgrad и една е предложена за публикуване в Problemy Peredachi Informacii. Повечето от резултатите са докладвани и на националния семинар по теория на кодирането.

5. Научни приноси. Основните научни приноси в дисертацията са следните:

1. Използвани са алгоритми да определяне на точните стойности на функцията $L(n,r)$ за: $\tau = 4$ при $9 \leq n \leq 12$ $\tau = 5$ при $10 \leq n \leq 13$ и $(\tau, n) = (6,10), (7,11), (8,12), (9,13), (10,14)$.

2. Намерени са граници за радиуса на покритие на дизайни в $H(n,2)$ и са въведени и изследвани моменти на кодове и дизайни. Получените резултати за

радиуса на покритие и за моментите спомагат за изясняване на структурата на тези дизайни и евентуално могат да се използват при получаване на класификационни резултати.

3. Получени са граници за екстремални скаларни произведения на сферични дизайни, като с тяхна помощ са получени необходими условия за съществуване на клас сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Получени са нови резултати за несъществуване на сферични 3- и 5- дизайни.

В представения дисертационен труд и материалите към него няма информация за цитирания на получените резултати.

6. Заключение. Изводите ми от представената от Христина Кулина дисертация, получените резултати, както и личните ми впечатления от нейната научна дейност, ми дават основание да считам, че всички изисквания на закона са спазени, и да предложа на уважаемото Жури да присъди на Христина Николова Кулина научната и образователна степен „доктор“.

София, 27.02.2013 г.

Подпис:

Доц. д-р Емил Колев