До Научния съвет
на Института по математика
и информатика на БАН

СТАНОВИЩЕ

от: проф. дмн Гено Николов, Факултет по математика и информатика
на СУ "Св. Климент Охридски "

за дисертационния труд на Иван Иванов Гаджев
"Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер"
за присъждане на образователната и научна степен *Доктор*
по научна специалност *Математически анализ*

Представеният дисертационен труд *Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер* е с обем 106 страници и се състои от увод, три глави и списък на цитираната литература включващ 54 заглавия.

Основна задача в теорията на апроксимациите е дадена функция f да се замени с по-прости функции от даден клас (алгебрични, тригонометрични, експоненциални полиноми, рационални функции, сплайн-функции, уейвлети, и др.), които да са близки до нея в някакъв смисъл, например разликата. Най-често мярка за близост е подходяща норма на разликата на f и приближаващата функция. Важни въпроси са: 1) за даден апроксимационен процес (дефиниран, например, от редица от линейни оператори) да се оцени скоростта на сходимост при предположение, че приближаваните функции принадлежат на даден клас, и 2) знаейки скоростта на сходимост на апроксимационния процес за дадена функция, да се направят изводи за нейната гладкост. Резултатите от първия тип се наричат прави теореми (теореми от тип на Джексън), а от втория тип - обратни теореми (теореми от тип на Бернщайн), на имената на първите автори на такива резултати.

Именно с полиномите въведени от С. Н. Бернщайн са свързани някои от първите резултати в теория на апроксимациите, в частност с тях се дава едно от доказателствата на теоремата на Вайерщрас за гъстотата на множеството от алгебричните полиноми в класа от непрекъснатите функции върху краен затворен интервал. По-късно П. Коровкин обобщава резултата на Бернщайн за редици от линейни положителни оператори. В тези класически прави теореми оценката на грешката на приближение е в термините на класическия модул на непрекъснатост на функцията f за интервал $[a,b]$,

$$\omega(f;\delta) := \sup\{|f(x)-f(y)| \,:\, x,y\in[a,b],\, |x-y|\le\delta\}\,.$$

През 30-те години на миналия век Е. Вороновская показва, че скоростта на приближение с полиномите на Бернщайн е ограничена, независимо от гладкостта на приближаваната функция: ако f е ограничена в $[0,1]$, диференцируема в околност на точка $x\in(0,1)$, в която съществува $f''(x)$, тогава

$$\lim_{n\to\infty} n\big(B_n(f;x)-f(x)\big) = \frac{x(1-x)}{2}\, f''(x)\,,$$

т.е., независимо от гладкостта на f, ако не е линейна функция, порядъкът на приближение с полиномите на Бернщайн е $1/n$. Получените по-късно прави и обратни теореми в теорията на апроксимациите използват по-прецизни характеристики на приближаваните функции, а именно различни модули на гладкост от по-висок ред, като едни от най-широко използваните са модулите на Дициан и Тотик, въведени през 80-те години на миналия век. Оказва се, че по-удобни за доказването на такива теореми се явяват въведените през 1963г. от J. Petre K-функционали. За две Банахови пространства X_0 и X_1, $X_1 \subset X_0$, K-функционалът за $f \in X_0$ се задава посредством

$$K(f,t) := K(f,t;X_0,X_1) := \inf_{g\in X_1}\{||f-g||_{X_0} + t\,||g||_{X_1}\} \quad t \geq 0$$

(вместо норма, често се използва полунорма в X_1, и се изоставя изискването за влагане на X_1 в X_0). Фактът, който прави K-функционалите широко приложими за доказване на апроксимационни теореми, е че те се оказват еквивалентни на подходящи модули на гладкост (еквивалентността се изразява в двустранна ограниченост на частното им с положителни константи).

В една работа от 1993 г. З. Дициан и К. Иванов предлагат класификация от 4 типа обратни неравенства (A, B, C, и D) за даден апроксимационен процес, като същевременно разработват метод за получаване на такива резултати. Пак там, авторите доказват силно обратно обратно неравенство от тип B за приближенията с операторите на Бернщайн, и изказват хипотезата, че вероятно е изпълнено и силно обратно неравенство от тип A. Тази хипотеза е доказана от независимо от Тотик и от Кнооп и Жоу, с което е доказана пълната еквивалентност на грешката на приближенията с операторите на Бернщайн и съответния K-функционал $K_\phi(f,t)$, където $\phi(x) = x(1-x)$,

$$K_\phi(f,t^2) := \inf_g \left\{||f-g|| + t^2||\phi\, g''|| \,:\, g,\, g'' \in AC_{loc}\right\}$$

и нормата е равномерната в $I = (0,1)$. Статията на Дициан и Иванов дава силен тласък за получаването от редица автори на различни прави и обратни теореми за приближения с апарата на класически линейни оператори.

Както е видно от заглавието, предмет на дисертационния труд на Иван Гаджев са приближенията с операторите на Баскаков, Мейер-Кьониг и Целер. Операторът на Баскаков V_n се дефинира за функции от $C[0,\infty)$ посредством

$$V_n(f,x) := \sum_{k=0}^{\infty} V_{n,k}(x) f\Big(\frac{k}{n}\Big), \qquad V_{n,k}(x) = \binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(x+1)^{n+k}}\,.$$

Предмет на Глава 1 от дисертацията е установяване на еквивалвнтност между грешката на приближение $||V_n f - f||$ и подходящ K-функционал $K_\psi(f,\frac{1}{n})$ (и със съответния модул на гладкост на Дициан и Тотик от втори ред). Този резултат е съдържанието на Теорема 5 от дисертацията. Правата теорема за приближения с тези оператори е доказана в монографията на Дициан и Тотик. За доказването на силно обратно неравенство от тип A за приближенията с тези оператори се използва методът предложен от Дициан и Иванов. Следва да се отбележи, че при реализацията на този план дисертантът е получил резултати, които имат и самостоятелно значение. По-точно, доказателството преминава през установяването на неравенство от тип на Вороновская за класическия оператор на Баскаков, и неравенство от тип на Бернщайн за итерираните оператори на Баскаков (Теореми 6 и 7 от дисертацията), доказани също в тази глава. Публикацията [22] на дисертанта, която е съдържанието на първата глава на дисертацията, е с обем от 46 страници, което е едно косвено доказателство за преодолените значителни технически трудности от Иван Гаджев. Следва да се отбележи също, че резултатът в Теорема 5 остава в сила и ако n се интерпретира като параметър приемащ положителни стойности (а не като естествено число), при което факториелите в дефиницията на базисните функции се заместват със съответни стойности на гама-функцията.

Втората глава от дисертационния труд на Иван Гаджев е посветена на приближения с тегла с операторите на Баскаков. Акцентът тук е върху така наречените естествени тегла за редица от линейни оператори $\{Q_n\}$ в дадена норма, концепция, въведена наскоро от К. Иванов: това са такива тегла w, за които нормата на грешката $||w(f-Q_nf)||$ допуска съответстващи си прави и силни обратни неравенства за най-широкия клас от функции f, за които Q_nf е дефиниран. К. Иванов показва, че естествените тегла от тип на Якоби, $w(x) = x^{\gamma_0}(1-x)^{\gamma_1}$ за приближаване с полиномите на Бернщайн в $[0,1]$ са за γ_0, $\gamma_1 \in [-1,0]$. За приближения в интервала $[0,\infty)$ се разглеждат тегла от вида

$$w(x) = x^{\gamma_0}(1+x)^{\gamma_\infty}\,.$$

Основният резултат тук е Теорема 9, в която е установена пълната еквивалентност на грешката на приближенията с операторите на Баскаков с тегла от горния вид при $\gamma_0 \in [-1,0]$ и $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$ и съответния K-функционал с тегло за най-широкия естествен клас от функции,

$$f \in C(w)[0,\infty) + W^2(w\psi)[0,\infty)\,, \qquad \psi(x) = x(1+x)\,,$$

т.е., естествените тегла в този случай са $w(x) = x^{\gamma_0}(1+x)^{\gamma_\infty}$, $\gamma_0 \in [-1,0]$, $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$.

Други резултати в тази глава са теорема от тип на Вороновская за теглови приближения с операторите на Баскаков, и неравенство от тип на Бернщайн за теглови приближения с итерирания оператор на Баскаков (Теорема 10 и 11 от дисертацията). Резултатите от тази глава се основават на публикацията [21] на дисертанта.

Глава трета от дисертацията е посветена на апроксимация с операторите на Майер-Кьониг и Целер, които се задават за функции дефинирани в интервала $[0,1)$ посредством

$$M_n(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} M_{n,k}(x)\, f\Big(\frac{k}{n+k}\Big), \qquad M_{n,k}(x) = \binom{n+k}{k} x^k(1-x)^{n+1}\,.$$

С подходяща смяна на променливата изучаването на приближенията с тези оператори може да се сведе към изучаване на приближения с операторите на Баскаков с тегло. Дисертантът е експлоатирал този факт за да получи прави и силни обратни неравенства от тип А за приближенията с операторите на Майер-Кьониг и Целер със и без тегло (Теореми 8 и 12 от дисертационния труд).

Резултатите от дисертацията са отразени в 4 самостоятелни статии на дисертанта. Една от тях е в препринт на ИМИ, една е публикувана в списание издавано у нас *Serdica Math. J.*, една е в *J. Math. Anal. Appl.* (с импакт фактор 1.119 за 2013г.), и една е приета за печат в *Math. Ineq. Appl.* (с импакт фактор 0.485 за 2013г.). Не намерих цитирания на тези публикации, което е обяснимо с факта, че те са от 2014 - 2015 г.

Авторефератът на дисертационния труд е в обем от 22 страници, и отразява правилно съдържанието на дисертацията. Същото важи и за приложената *Справка за приносите на дисертацията и публикациите*. Отбелязвам несъответствие между списъците с цитираната литература в автореферата и дисертацията, както и в номерацията на теоремите на двете места.

4. Заключение.

Дисертационният труд “Характеризация на приближенията с оператори на Баскаков и на Майер-Кьониг и Целер” на Иван Иванов Гаджев отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ и на Правилника на ИМИ - БАН за придобиване на образователната и научна степен *Доктор*. Дисертантът е получил задълбочени познания за класически и за съвсем нови резултати в една област от математиката, в която има утвърдена българска школа. Тези свои познания той е приложил за получаване на значими резултати характеризиращи приближенията с операторите на Баскаков и Майер-Кьониг и Целер. При доказателството на тези резултати Иван Гаджев е проявил умение и изобретателност и е преодолял значителни технически трудности.

Въз основа на изложеното по-горе убедено препоръчвам на уважаемия Научен Съвет на ИМИ на БАН да присъди на Иван Иванов Гаджев образователната и научна степен “Доктор” по научната специалност “Математически анализ”.

София, 31 май, 2015 г. Подпис на рецензента:

(проф. дмн Гено Николов)