АВТОРСКА СПРАВКА

за научните приноси на трудовете и за цитиранията

на доц. д-р Йорг Копиц

представени за участие в конкурс за професор

в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление: 4.5. Математика, научна специалност „Алгебра (Полугрупи от преобразувания)”

обявен в Държавен вестник № 84 от 21.10.2022 г.

Научни приноси на трудовете за участие в конкурса

Общият брой на научните ми публикации до момента е 97 (*виж List_publications_all.pdf*), като от тях представени за конкурса са 17 *(виж List_publications_competition.pdf)* и те не повтарят тези, с които съм придобил академичното звание „доцент“ и научно-образователната степен „доктор”.

Всичките 17 научни публикации, които са представени за участие в конкурса са в реферирани списания с импакт фактор (общ IF = 9,755).

От представените за конкурса научни публикации 10 са с един съавтор, 5 – с двама съавтори и 2 – с трима съавтори. Участието на всички съавтори е равноправно.

Представените за конкурса научни публикации могат да се разделят тематично в следните направления:

I. Полугрупи от преобразувания (Transformation semigroups) – публикации 1, 2, 3, 4, 7, 9, 14, 15.

II. Допелполугрупи (Doppelsemigroups) – публикации 8, 10, 11.

III. Полугрупи от гледна точка на универсалната алгебра (Semigroups under point of view of Universal Algebra) – публикации 5, 6, 13, 16, 17.

IV. Полухипергрупи (Semihypergroups) – публикация 12.

Представените за участие в конкурса научни публикации и техните приноси са описани по тематични направления.

I. Полугрупи от преобразувания (Transformation semigroups) – публикации 1, 2, 3, 4, 7, 9, 14, 15.

Добре известно е, че всяка полугрупа може да се вложи изоморфно в полугрупа от преобразувания на подходящо множество. Полугрупа от преобразувания е множество от изображения на едно множество в себе си, което е затворено относно операцията композиция на изображения. Освен това една инверсна полугрупа S, т.е полугрупа в която за всеки елемент *a* от S съществува единствен елемент *b* от S такъв, че *aba=a* и *bab=b*, е изоморфна на полугрупа от частични инекции на подходящо множество. Тези версии на теоремата на Кейли за полугрупи потвърждават важността на изучаването на алгебричните и комбинаторни свойства на крайните и на безкрайните полугрупи от пълни или частични преобразувания. Полугрупите от пълни (частични) преобразувания с определени свойства са били интензивно изучавани от редица автори, но все още има много на брой важни отворени въпроси, които засягат изследването както на крайните полугрупи от преобразувания, притежаващи определени свойства, така и на безкрайните полугрупи от преобразувания. Нашите изследвания запълват някои от тези празнини.

Полугрупите от запазващи наредбата преобразувания на крайна верига (т.е. линейно наредено множество) са били интензивно изучавани от много автори. Една частична наредба, близка до линейната в известен смисъл, е така наречената зиг-заг наредба. Съответното частично наредено множество се нарича ограда. Запазващите наредбата преобразувания на едно крайно множество със зиг-заг наредба (или ограда), т.е. преобразувания в които, ако два елемента от даденото множество са свързани чрез зиг-заг наредбата то и техните образи също са свързани, са изследвани от някои автори още от 90-те години на миналия век. Един отворен проблем беше пресмятането на ранга на полугрупата от всички запазващи зиг-заг наредбата инекции и полугрупата от всички запазващи зиг-заг наредбата пълни преобразувания, както и някои въпроси свързани с ранга на полугрупата от всички запазващи зиг-заг наредбата преобразувания на безкрайно множество. Рангът е един много важен индикатор в една полугрупа, който дава минималния брой пораждащи елементи. Тези въпроси са разгледани в статии [1, 9, 14, 15].

В [1, 15] сме получили ранга на полугрупата FIn от всички запазващи зиг-заг наредбата частични автоморфизми на една n-елементна ограда. В [15] сме дали описание на релациите на Грийн на тази инверсна полугрупа. Релациите на Грийн показват колко „далеч“ е една полугрупа (моноид) от група. Изучаването на релациите на Грийн е едно от основните неща при изследването на дадена полугрупа. Тъй като релациите на Грийн L, R, и H са вече известни за всяка инверсна полугрупа, ние сме дали пълно описание на релацията J. Също така в [15] сме показали, че FIn се поражда от преобразувания с ранг по-голям от n−3, т.е. от преобразувания с множество от образи съдържащо повече от n−3 елемента. Използвайки програмата GAP може да се покаже, че FIn не може да се породи само с преобразувания с ранг по-голям от n-2 и освен това няма най-малко пораждащо множество на в случая на нечетно n. Когато обаче n е четно имаме най-малко пораждащо множество и то съдържа само елементи с ранг n или n-1. Ние сме намерили това най-малко пораждащо множество и сме пресметнали неговата кардиналност, което ни дава ранга на моноида FIn. Рангът на моноида FIn при нечетно n сме изследвали по-късно в [1]. Тази статия обобщава също така методите, които сме използвали и резултатите, които сме получили в [15]. Получили сме пораждащо множество за моноида FIn при нечетно n и сме показали, че неговата кардиналност е ранга на FIn, т.е. намерили сме пораждащо множество с минимален брой елементи.

Едно безкрайно изброимо множество X може също да бъде наредено чрез зиг-заг наредба. Тогава съответният моноид от всички запазващи зиг-заг наредбата (частични) преобразувания на X притежава свойства, съществено различни от тези в случая на крайно множество. В частност, ранга на този моноид е безкраен и по-полезно е да се изследва относителния ранг (по модул дадено подмножество Y на X), т.е. да се изчисли най-малкият размер на множество, което заедно с Y поражда полугрупата. В [14] сме разгледали зиг-заг наредбата в множеството на естествените числа N и сме определили относителния ранг на полугрупата PF_N от всички запазващи зиг-заг наредбата частични преобразувания на N. За Y сме избрали множеството от всички идемпотенти и всички сюрективни преобразувания на PF_N. В частност сме показали, че всички преобразувания на PF_N с краен ранг, т.е. преобразувания чието множеството от образи е крайно, могат да бъдат породени от идемпотентите на PF_N с краен ранг и пълното преобразувание, което изобразява всяко естествено число n в n+2.

В [9] сме изследвали пълни преобразувания, запазващи зиг-заг наредбата. Направили сме характеристика на елементите на моноида TFn от всички запазващи зиг-заг наредбата пълни преобразувания на дадено n-елементно множество. Това описание на елементите на TFn е ново и дава много полезен инструмент за изследване на моноида TFn. Редица свойства, като например кардиналността, на TFn вече бяха проучени през 90-те години на миналия век. Въпреки това, все още има редица отворени въпроси свързани с този моноид. Ние сме намерили формула за броя на идемпотентите в TFn. Също така свойствата на ранга на TFn все още не бяха изследвани, което означава, че нямаше и информация за пораждащите го множества. В [9] сме дали формула за ранга на TFn и сме получили пораждащо множество с минимален брой елементи. Интересно е да се отбележи, че формулата за ранга е различна за четно и за нечетно n. Тази статия дава относителна компилация от изследвания за моноида TFn.

От 1975 г. се изучава една конкретна подполугрупа на моноида от всички (пълни) преобразувания на множеството X, а именно полугрупата T(X,Y) от всички (пълни) преобразувания на X с образ във фиксирано подмножество Y на X. Тези полугрупи се наричат полугрупи с ограничено множество от образи. След въвеждането на тази полугрупа, полугрупите с ограничено множество от образи бяха интензивно изследвани от голям брой автори и от различни гледни точки. По-специално, рангът на такива полугрупи беше изчислен от Fernandes и Sanwong през 2014 г. [FS, 2014]. Те показват, че ранга е равен на стирлинговото число S(|X|,|Y|) от втори род. С оглед на това да се намали броят на пораждащите елементи, може да се разглеждат относителни пораждащи множества по модул дадено множество A, т.е. множества, които заедно с A пораждат полугрупата. Концепцията за относителни пораждащи множества се използва главно за безкрайни полугрупи, но също така може да даде интересна информация за крайни полугрупи. Моноидът O(X) от всички запазващи наредбата преобразувания на крайна верига X и моноидът OP(X) от всички запазващи ориентацията преобразувания на крайна верига X принадлежат към най-изучаваните крайни полугрупи от преобразувания. Относителният ранг на полугрупата T(X,Y) по модул полугрупата O(X,Y) от всички запазващи наредбата преобразувания вече беше определен, но относителният ранг на T(X,Y) по модул полугрупата OP(X,Y) от всички запазващи ориентацията преобразувания все още беше отворен проблем, който ние решихме в [2]. В [2] сме представили формула за относителния ранг на T(X,Y) по модул OP(X,Y) и сме характеризирали всички относителни пораждащи множества на T(X,Y) по модул OP(X,Y) с минимален брой елементи. Освен това сме изчислили относителния ранг на OP(X,Y) по модул O(X,Y) и сме характеризирали всички относителни пораждащи множества с минимален брой елементи. Като следствие сме получили относителния ранг на OP(X) по модул O(X). Този относителен ранг е равен на 1 и е известен от 1999г.

Относителният ранг на OP(X) по модул O(X) за дадено безкрайно множество X също беше един отворен въпрос, формулиран в [FJS,2021] от Fernandes и съавтори. В [3] даваме пълен отговор на този въпрос за определен клас безкрайни вериги. Този клас обхваща всички класически безкрайни вериги. Разглеждаме едно безкрайно гъсто напълно наредено множество X, така че всеки две изпъкнали подмножества на X да са о-изоморфни (т.е. изоморфизъм, който запазва наредбата). Ако множеството X няма минимум и максимум, K. Tinpun е показал в дисертацията си, че относителния ранг на OP(X) по модул O(X) е равен на две. В [3] сме разгледали останалите случаи за множеството X и сме показали, че относителния ранг на OP(X) по модул O(X) е равен на едно.

По-нататък ще обсъдим някои проблеми, които принадлежат към алгебричната теория на графите. Ще използваме нашите техники за решаване на някои проблеми в алгебричната теория на графите. Това сме направили в [4 и 7]. В тези две статии разглеждаме краен неориентиран път Pn. Освен това ендоморфизмите установяват естествена връзка между теорията на графите и теорията на полугрупите. Следователно, важно е да се знае структурата на моноидите от ендоморфизми. В [4] изучаваме свойствата на ранга, кардиналността и релациите на Грийн на моноида IEnd(Pn) от всички инективни частични ендоморфизми и моноида PAut(Pn) от всички частични автоморфизми на Pn. Както IEnd(Pn), така и PAut(Pn) са подмоноиди на симетричния моноид, а освен това PAut(Pn) е инверсна полугрупа. Тъй като IEnd(Pn) не е регулярен, трябва да разгледаме всичките четири релации на Грийн. За PAut(Pn) сме определили релацията J. Намерили сме формули за мощността на двата моноида. Показали сме, че PAut(Pn) има ранг n при $n < 4$ и ранг n-1 в противен случай. Също така даваме формули за ранга на двата моноида и съответните пораждащи множества с минимален брой елементи. И така, в [4] сме направили алгебрично описание на двата моноида IEnd(Pn) и PAut(Pn). В [7] разглеждаме следните два моноида: моноидът от всички ендоморфизми на Pn (означен с EndPn) и моноидът от всички слаби ендоморфизми на Pn (означен с wEndPn). В тази работа сме изчислили ранга и мощността на тези два моноида. По-специално, наблюдаваме, че автоморфизмите и слабите ендоморфизми съвпадат. Един класически въпрос в алгебрата, публикуван от Marki през 1988 г. [M,88], е характеризирането на регулярните ендоморфизми на даден граф и посочването на графи с регулярен моноид от ендоморфизми. Показали сме, че EndPn, както и wEndPn са регулярни тогава и само тогава, когато n=1,2,3 и n=1,2,3,4,5 съответно. Освен това сме характеризирали регулярните елементи в EndPn за $n > 3$ и в wEndPn за $n > 5$.

II. Допелполугрупи (Doppelsemigroups) – публикации 8, 10, 11.

Допелполугрупите, които са естествено обобщение на полугрупите, формират едно важно многообразие от алгебри произтичащо от допелалгебри и интер- асоциативни полугрупи. Допелполугрупите бяха въведени от B. Richter в [R,97]. Допелполугрупа е алгебрична структура от едно непразно множество и две бинарни асоциативни операции, удовлетворяващи две допълнителни аксиоми. Допелалгебрите са линейни аналози на допелполугрупите. Понятието интерасоциативност за полугрупи беше въведено в [GR,83] и интензивно изучавано впоследствие. Две интерасоциативни полугрупи пораждат допелполугрупа. Този факт ни позволява да изучаваме интерасоциативни полугрупи чрез допелполугрупи, използвайки методите на универсалната алгебра. Допелполугрупите са интензивно изучавани. Първите резултати за допелполугрупите са свързани с описанието на свободните обекти като свободната допелполугрупа, свободната комутативна допелполугрупа и свободната n-нилпотентна допелполугрупа.

В [8] ние допринасяме за това изследване чрез изучаването на правоъгълни допелполугрупи. Допелполугрупата се нарича правоъгълна, ако и двете полугрупи са правоъгълни. Полугрупата S се нарича правоъгълна, ако $abc=ac$ за всички елементи a, b и c от S. Една от най-полезните концепции в алгебрата е свободният обект. Всяко многообразие съдържа свободни обекти и свободните алгебри са важни за изучаването на това многообразие. Свободните алгебри могат да бъдат много точно характеризирани от гледна точка на тъждествата. В [8] сме конструирали свободната правоъгълна допелполугрупа от произволен ранг. Като следствие сме получили свободната правоъгълна полугрупа. Също така сме определили реда на свободната правоъгълна допелполугрупа и сме показали, че нейната група от автоморфизми е изоморфна на симетричната група. Освен това изучаваме моноида от ендоморфизми на свободната правоъгълна допелполугрупа. Разглеждаме и някои други алгебрични свойства на свободната правоъгълна допелполугрупа. Следователно, [8] представя относително „пълно“ описание на свободните обекти в многообразието от правоъгълни допелполугрупи, което също така дава информация за свободната правоъгълна полугрупа.

За наредени полугрупи, подобно на теоремата на Кейли за полугрупи, твърдение е доказано от K.A. Zaretskiy [Z,59]: Всяка наредена полугрупа може да бъде вложена изоморфно в наредената полугрупа на всички бинарни релации на подходящо множество. Известен е също така аналог на теоремата на Zaretskiy в класа на наредените димоноиди, където има връзка между димоноидите и допелполугрупите. Аналогичен въпрос за допелполугрупите беше отворен проблем, който сме решили в [10]. В тази статия сме въвели концепцията за наредена допелполугрупа, базирана на концепцията за нареден допелмоноид. Показали сме, че всяка допелполугрупа може да бъде вложена изоморфно в наредена допелполугрупа от бинарни релации на подходящо множество. Наредената допелполугрупа от бинарни релации се конструира чрез използване на полугрупата от бинарни релации и определен неин вариант. Основният резултат в [10] е теоремата за представяния на наредени допелполугрупи.

Едно множество G заедно с n асоциативни операции дефинирани върху него и удовлетворяващи една допълнителна аксиома, се нарича n-орна полугрупа. Различни аспекти и свойства на n-орните полугрупи са изследвани от редица автори. В [11] сме продължили изследването на n-орните полугрупи. Отворени проблеми бяха описанието на свободните произведения на n-орни полугрупи, както и изследването на n-орни полугрупи с конкретни свойства. В [11] сме представили свободното произведение на произволни n-орни полугрупи. Освен това сме конструирали свободната комутативна n-орна полугрупа от произволен ранг. Показали сме, че полугрупите на свободните комутативни n-орни полугрупи са изоморфни и че групата от автоморфизми на свободната комутативна n-орна полугрупа е изоморфна на симетричната група. Също така сме описали най-малката комутативна конгруенция на свободната n-орна полугрупа. И така, [11] дава фундаментално описание на многообразието от всички комутативни n-орни полугрупи.

III. Полугрупи от гледна точка на универсалната алгебра (Semigroups under point of view of Universal Algebra) – публикации 5, 6, 13, 16, 17.

Някои подмножества на симетричната полугрупа T(X,Y) имат важна интерпретация в теория на автоматите и по този начин в по-широк смисъл също и в теоретичната информатика, а именно полугрупите от недетерминистични преобразувания. Недетерминистично преобразувание от X към Y е изображение на X в множеството от всички непразни подмножества на Y. От алгебрична гледна точка едно недетерминистично преобразувание може да се разглежда като множество от преобразувания, т.е. като елемент на множеството $T_P(X,Y)$ от всички непразни подмножества на T(X,Y). По каноничен начин може да се дефинира асоциативна операция в $T_P(X,Y)$. Полугрупата от недетерминистични операции върху X с домейн в някое непразно подмножество на множество от всички подмножества на Y може да бъде вложена в полугрупата $T_P(X,Y)$. Това мотивира изследването на полугрупата $T_P(X,Y)$. Вече са известни някои свойства и изоморфни полугрупи на $T_P(X,Y)$ (виж например [S,17]).

В [6, 13, 16] сме се ограничили до случая, когато Y е двуелементно множество. Това е един интересен случай, тъй като ако Y има два елемента, то полугрупата от недетерминирани булеви операции може да бъде вложена в $T_P(X,Y)$. За изследването на $T_P(X,Y)$ от съществено значение е структурата на моноида T(X,Y). Приемаме, че T(X,Y) е така наречената 4-частна полугрупа. Тъй като $T_P(X,Y)$ не е регулярна, е важно да се изследват релациите на Грийн. Този въпрос е решен в [13]. Тъй като всички релации на Грийн не са конгруенции, ние сме определили най-голямата конгруенция, която се съдържа в съответната релация на Грийн. Това дава важна информация за конгруентната структура на полугрупата, така например за моноида от ендоморфизмите. В [6] продължаваме изследването на алгебричната структура на $T_P(X,Y)$, а именно структурата на идеалите й. Характеризирали сме всички идеали, както и всички главни идеали на $T_P(X,Y)$. В [16] сме разгледали друга фундаментална концепция относно полугрупата $T_P(X,Y)$. Изследвали сме регулярните елементи и идемпотентите. Намерили сме всички максимални регулярни подполугрупи на $T_P(X,Y)$. Тъй като идемпотентите са много полезни за изследване на пораждащите множества, в тази статия сме характеризирали идемпотентите и всички максимални идемпотентни подполугрупи на $T_P(X,Y)$.

В [5] сме определяли идемпотентите и регулярните елементи на един друг моноид, който също е вдъхновен от въпроси на теоретичната информатика, а именно моноида от всички обобщени хиперсубституции за алгебрични системи. Моноидът от всички хиперсубституции (в универсалната алгебра) е интензивно изследван от 90-те години на миналия век от голям брой автори. През 2000 г. понятието за хиперсубституция беше обобщено до концепцията за обобщени хиперсубституции [LD,00], за да могат да се опишат допълнителни ситуации свързани с композицията на функции. Тъй като (обобщените) хиперсубституции са свързани с композицията на функции (терми), те се появиха с цел класификацията на универсални алгебри. Тази идея може да се пренесе за класификация на алгебрични системи в смисъла на Малцев. Една алгебрична система се състои от непразно множество от елементи заедно с операции и релации. Има различни подходи в концепцията за хиперсубституция на една алгебрична система. В [KP,18] авторите са намерили най-естествената и практична концепция. За да затвърдим тази „нова“ концепция за хиперсубституции на алгебрични системи в общността, работеща в тази област, ние определихме някои важни свойства на този моноид в [5]. По-точно, характеризирахме идемпотентите и регулярните елементи в моноида от всички обобщени хиперсубституции на алгебрични системи.

Термът може да се разглежда като дърво с възли, обозначени като символи на операции, и листа, обозначени като променливи или символи на нулеви операции. Това дава съществен аргумент за интензивното изучаване на термовете. В [17] допринасяме за това изследване от гледна точка на универсалната алгебра. Множеството от всички алгебри от даден тип, удовлетворяващи дадена съвкупност от тъждества от този тип, образува многообразие в смисъла на Birkhoff. Ако V е многообразие, тогава IdV, множеството от всички тъждества удовлетворени във V, е напълно инвариантна конгруенция на свободната алгебра от същия тип. Многообразията са интензивно изучавани. Ако V е едно солидно многообразие, то множеството IdV е напълно инвариантна конгруенция, затворена спрямо хиперсубституциите. Хиперсубституцията може да се разглежда като композиция на термове. В теоретичната информатика често се появява въпросът за композиция на термове. Класически примери са системите за пренаписване на термове (TRS). В [17] използваме TRS и прилагаме неговите добре разработени инструменти за изследване стабилността на някои многообразия от групоиди, които са клас алгебрични обекти играещи важна роля в теоретичната информатика. Едно многообразие V се нарича стабилно, ако IdV е затворено относно пет правила, които са свързани с така наречената сигма-композиция на термове. Подобна дефиниция имаме и за сигма-съществена композиция на термове. В последния случай получаваме s-стабилни многообразия. В [17] сме характеризирали всички стабилни многообразия от полугрупи. Имаме точно 10 стабилни многообразия от полугрупи, които са на дъното на решетката от всички многообразия от полугрупи. Този резултат е аналог на добре познатата характеристика на всички солидни многообразия от L. Polak [P,99]. Ние сме показали, че многообразието от комутативни и съответно идемпотентни групоиди е стабилно. Представили сме и някои други стабилни многообразия от групоиди, а също така и s-стабилни многообразия от групоиди. Концепцията за стабилност на групоиди (полугрупи) дава инструмент за определяне дали дърветата са едни и същи в контекста на тъждествата на стабилно многообразие, класически въпрос както в алгебрата така и в теоретичната информатика.

IV. Полухипергрупи (Semihypergroups) – публикация 12.

В [12] сме изследвали полухипергрупи от определена гледна точка. В общността на алгебристите изследването на хиперструктурите е противоречиво. Тази статия дава аргумент, че изследването на хиперструктури не е необходимо във всеки случай. В [12] сме доказали, че всяка полухипергрупа може да се разглежда като полугрупа.

Използвайки този факт сме характеризирали всички полухипергрупи от втори ред и сме показали, че има точно 17 такива. Освен това използвайки концепцията на Ляпин за така наречените „алтернативни тъждества“ (свободен превод от руски) сме класифицирали всички полухипергрупи от втори ред. Използвайки концепцията за „алтернативни тъждества“ сме получили по-подробна класификация на клас универсални алгебри, тъй като съответните класове, които се наричат „алтернативни многообразия“, не са затворени относно директното (декартово) произведение (като многообразията). Класификацията на класа полухипергрупи от втори ред в [12] показва, че концепцията за алтернативни тъждества може да бъде полезна в конкретни случаи.

Забелязани цитирания

Общият брой на забелязаните цитирания (без самоцитиранията) е 102 (*виж List_citations_all.pdf*).

От тях, за участие в конкурса са приложени 26 цитирания (*виж List_citations_competition.pdf*).

Научни проекти

Общият брой на научните проекти е 5, от които ръководител на един и участник в 4. (*виж List_projects.pdf*).

Програмни и организационни комитети

Член на организационния комитет на пет международни конференции в Потсдам, Германия и член на програмния комитет на три международни конференции в Благоевград. (*виж List_organizing_committee.pdf*).

Редколегии

Член на научната редколегия на списанията „Discussiones Mathematicae” и „Asian-European Journal of Mathematics“. (*виж List_editor.pdf*).

Апробация на резултатите

Получените резултати са докладвани на 49 национални и международни конференции и семинари. (*виж List_conferences.pdf*).

Преподавателска дейност

- **Защитили докторанти**

Научен ръководител на 8 докторанти по „Алгебра“ към Института по математика на Университета в Потсдам – Германия, от които 1 действащ и 7 защитили. Втори научен ръководител на 1 успешно защитил докторант по „Алгебра“ към Университета в Кон Каен – Тайланд. (*виж List_PhD_students.pdf*).

- **Аудиторна заетост**

Лекции и упражнения по Алгебра, Линейна алгебра, Теория на числата, Аритметика, Теория на полугрупите, Анализ, Теория на графите и др. за студенти от специалностите Математика, Информатика, География към Университета в Потсдам – Германия. (*виж List_lectures_1.pdf*).

Лекции в редица други университети: Brno University of Technology, University of Szeged, South-West University Blagoevgrad, Universidade Nova de Lisboa, Luhansk Traras Shevchenko National University. (*виж List_lectures_2.pdf*).

15.12.2022 г. Изготвил:

София /доц. д-р Йорг Копиц/

Библиография

[FS; 2014] V. H. Fernandes and J. Sanwong, “On the rank of semigroups of transformations on a finite set with restricted range,” Algebra Colloq., 21, 497–510 (2014).

[FJSS,2021] V. H. Fernandes, M. M. Jesus and B. Singha, On orientation-preserving transformations of a chain, Communications in Algebra, 49(6), 2021, 2300-2325.

[GR,83] M. Gould and R. E. Richardson, Translational hulls of polynomially related semigroups, Czechoslovak Math. J. 33(1) (1983) 95–100.

[KP,18] J. Koppitz and D. Phusanga, The monoid of hypersubstitutions for algebraic systems, J. Announcements Union Sci. Sliven 33(1) (2018) 120–127.

[LD,00] S. Leeratanavalee and K. Denecke, Generalized hypersubstitutions and strongly solid varieties, General Algebra and Applications, Proc. of 59th Workshop on General Algebra; 15th Conf. for Young Algebraists Potsdam 2000 (Shaker Verlag, 2000), pp. 135–145.

[M,88] Marki, L.: Problem raised at the problem session of the Colloquium on Semigroups in Szeged. Semigroup Forum 37(1988), 367–373 (1987).

[P,99] l. Polak, All Solid Varieties of Semigroup, Journal of Algebra 219, 421–436 (1999).

[R,97] B. Richter, Dialgebren, Doppelalgebren und ihre Homologie, Diplomarbeit,Univ. Bonn. (1997), Available at http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/publications.html.

[S,17] Y. Susanti, Semiring of sets of boolean operations, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications 39 (1) (2017) 21-43.

[Z,59] Zaretskiy K. A., The representation of ordered semigroups by binary relations, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 6 (1959), 48–50 (in Russian).