Списък с научните приноси на публикациите

на д-р Младен Светославов Савов

за участие в конкурс за доцент на БАН

(Май 2014)

1. Savov, M. (2008) "*Curve crossing for the reflected Lévy process at zero and infinity*", *Electron. J. of Probab.* **13**, No.7, 157–172, **IF: 0.72**

Научни приноси: За едномерен процес на Леви $(X_t)_{t\geq 0}$ с отразен процес $R_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s - X_t$ се разглеждат времевите моменти на пресичане на траекторията на R_t на полиномни криви, т.е. $\tau_\kappa(r) = \inf\{t \geq 0 : R_t > r(t+1)^\kappa\}, \kappa \geq 0$. Основният резултат гласи, че

$$\tau_\kappa(r) < \infty \ a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty, \, \kappa > 1$$

$$\tau_\kappa(r) < \infty \ a.s. \iff \mathbb{E}\left[X_1^-\right]^{1/\kappa} = \infty, \text{ или } \liminf_{t\to\infty} \frac{X_t}{t^\kappa} = \infty, \kappa \leq 1,$$

където $X_1^- = \max\{-X_1, 0\}$. Както се вижда необходимите и достатъчни условия (НДУ) зависят от поведението на X и се отнасят за далеч по-сложния проблем, касаещ $\tau_\kappa(r)$. Също така, критерии, зависещи само от случайната величина X_1, са намерени за $\mathbb{E}\left[\tau_{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}\left[X_1^2\right] r)\right] < \infty, r > 0$ и $\mathbb{E}\left[\tau_1(r)\right] < \infty, r > 0$.

Количеството $\limsup_{t\to 0} \frac{R_t}{t^\kappa} = a_\kappa \in [0, \infty]$ е пресметнато за всички процеси на Леви. Когато процесът на Леви е с крайна вариация, a_κ зависи от дрифта $d \geq 0$ и дали $\int_0^1 \overline{\Pi}_-(x^\kappa)\, dx \in [0, \infty]$ е крайно число или не. Когато процесът на Леви е с неограничена вариация, то a_κ зависи от това дали $\int_0^1 \overline{\Pi}_-(x^\kappa)\, dx \in [0, \infty]$ е крайно число или не и от крайността на $\liminf_{t\to 0} \frac{X_t}{t^\kappa}$.

В периода 2004-2008 имаше доста засилен интерес към това как процеси на Леви и отразените процеси на Леви , R_t, пресичат криви. Резултатът е основен, особено в частта си, когато $t \to 0$, тъй като в този случай процесът на Леви не може да се приближи със случайно блуждаене.

2. Savov, M. (2009) "*Small time two-sided LIL behavior for Levy processes at zero*", *Probab. Theory and Related Fields* **144**, No.1-2, 79–98, **IF: 1.39**

Научни приноси: За даден процес на Леви X с основни параметри (σ^2, γ, Π) $\big(\sigma^2$ - Браунов коефициент, γ - дрифт и Π - $sigma-$крайната мярка, описваща скоковете на процеса$\big)$ и функция $b : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ с някои естествени, но слаби ограничения, основният резултат на статията е семейство от интегрални критерии $I(a) := I(a; b, \sigma, \gamma, \Pi), \ > 0$, за които е вярно, че

$$\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b(t)}=\inf\{a: I(a)<\infty\}\in[0,\infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt<\infty$$

$$\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b(t)}=\infty\,,\text{ ако }\int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt=\infty.$$

Този резултат има две основни предимства: той е общ и се прилага към огромен клас от функции b и $I(a)$ зависи само от (σ^2,γ,Π). Така фундаменталният вероятностен проблем за изчислението на $\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b(t)}\in[0,\infty]$ се свежда до аналитичната задача да се пресметне $I(a)$ и $\int_0^1\overline{\Pi}(b(t))dt$. Така за дадена детерминистична функция b можем да установим директно как X расте спрямо b.

Нещо повече, използвайки

$$\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b(t)}=\inf\{a: I(a)<\infty\}\in[0,\infty] \iff \int_0^1 \overline{\Pi}(b(t))dt<\infty$$

ние можем да конструираме функцията $b^*(t)$ така че $\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b(t)}=1$. Това става чрез избор на $b(t)$, така че $\inf\{a: I(a)<\infty\}=1$. За съжаление това не е валидно за всеки процес X тъй като понякога $\int_0^1\overline{\Pi}(b^*(t))dt=\infty$. Намирането в явен вид на ръста b^*, така че $\limsup_{t\to 0}\frac{|X_t|}{b^*(t)}=1$, е все още отворен проблем, макар че съществуват НДУ за неговото съществуване.

3. Doney, R., Maller, R. and Savov, M. (2009) "*Renewal theorems and stability for the reflected process*", *Stochastic Process. Appl.* **119**, No.4 , 1270–1297, **IF: 1.54**

Научни приноси: Нека $S_n=X_1+\dots+X_n, n\geq 1$ е случайно блуждаене със стъпка X и $R_n=\max_{k\leq n}\{S_k\}-S_n$ е отразеният процес. Нека $\tau(r)=\min\{n\geq 1\,:\,R_n>r\}, r>0$, е първият момент на преминаване над ниво $r>0$ на процеса R_n.

Когато $\mathbb{E}\left[X\right]<0,\mathbb{E}\left[|X|\right]<\infty$ или $\mathbb{E}\left[X\right]=0,\mathbb{E}\left[X^2\right]<\infty$ доказваме, че

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[R_{\tau(r)}\right]}{r}=1.$$

В първия случай допълнително $\lim_{r\to\infty}\mathbb{E}\left[\tau(r)\right]/r=-1/\mathbb{E}\left[X\right]$ и във втория

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathbb{E}\left[\tau(r)\right]}{r^2}=\frac{1}{\mathbb{E}\left[X^2\right]}.$$

Също така се разискват и други ситуации, когато някое от условията $\mathbb{E}\left[X\right]<0,\mathbb{E}\left[|X|\right]<\infty$ или $\mathbb{E}\left[X\right]=0,\mathbb{E}\left[X^2\right]<\infty$ е нарушено.

Означавайки $e_{-a,b}(r) = \mathbb{P}\left(S_{T_{[-a,b]}(r)} < 0\right), a > 0, b > 0$, където $T_{[-a,b]}(r) = \min\{n \geq 1 : S_n \notin [-ar, br]\}$ с условието $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$, се добива резултатът, че

$$A := \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r} \in [\max\{1, c\}, 1 + c],$$

където $c \geq 0$ може да се пресметне явно. От особен интерес е случаят, когато $c = 0$ или $c = \infty$, тъй като тогава A може да се пресметне точно съответно 1 или ∞. Основният, но може би непреодолим, недостатък е изискването $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$, т.е. $\exists 0 < C_1(\lambda) < C_2(\lambda) < \infty$ такива че $C_1(\lambda)e_{-a,a}(r) \leq e_{-a,a}(\lambda r) \leq C_2(\lambda)e_{-a,a}(r)$, за достатъчно големи r.

Теоремите от този труд не са класически. Резултати относно позицията на случайното блуждаене, след като премине ниво $r > 0$, т.е. поведението на $S_{T(r)}, T(r) = \min\{n \geq 1 : S_n > r\}$, са известни. Те зависят от фундаменталните свойства на случайното блуждаене - независими и стационарни нараствания. В случая с R_n тези свойства са нарушени и методите са доста по-сложни. Това налага и изискването $e_{-a,a}(\lambda r) \asymp e_{-a,a}(r), \forall \lambda > 1$. В допълнение ще уточним, че проблеми свързани с пресмятането на $e_{-a,a}(r)$ са едни от най-сложните в теория на случайните разходки и затова по-нататъчен качествен напредък по изчислението на $A = \limsup_{r\to\infty} \frac{R_{\tau(r)}}{r}$ изглежда невъзможен.

4. Doney, R. and Savov, M. (2010) "*The asymptotic behavior of densities related to the supremum of a stable process*", *Ann. of Probab.* **38**, No.1, 316–326,**IF: 1.47**

Научни приноси: Нека X е устойчив процес на Леви с индекс $\alpha \in (0, 2)$ и $S_1 = \sup_{s\leq 1} X_s$. Ако $f(x) = \mathbb{P}(S_1 \in dx)/dx, x > 0$, то основен и труден въпрос е да се определи асимптотичното поведение на $f(x), x \to 0, x \to \infty$. Знае се поведението на $\mathbb{P}(S_1 > x) \sim A\alpha^{-1}x^{-\alpha}, x \to \infty$ и $\mathbb{P}(S_1 \leq x) \sim Bx^{\alpha\rho}$, където $\rho = \mathbb{P}(X_1 > 0)$ е коефициента на позитивност. Тези резултати са класически приложения на Тауберовите теореми. Производната $f(x)$ е много по-трудна за изучаване. Използвайки теория на екскурзиите (excursion theory) на процеса извън минимума и максимума, ние добихме уравнения, представящи $f(x)$ чрез основни количества от теория на екскурзиите и оттам асимтотиката.

Тази работа за момента 2008-2010 беше в основата на поредица от изследвания на максимума на общия процес на Леви и по-задълбочени разработки върху S_1 за устойчиви процеси на Леви. Броят на цитатите е атестат за това.

Трябва да се отбележи, че използвайки дълбок комплексен анализ, Кузнецов (2011), виж по-долу, успява да добие асимптотично развитие в ред на $f(x)$ и дори за клас от параметри α - да добие развитие в ред на $f(x)$. Тези резултати са естествения завършек на поредица от изследвания. Нашият вероятностен метод по същността си няма силата на комплексния анализ в случая, но е доста по-общ. Това се вижда от разработките на Шомон (2013) и Шомон и Малечки (2013+), които обобщават и използват нашата методология и където комплексният анализ е безсилен, предвид неявната форма на много количества от теория на процесите на Леви.

Библиографична справка:

(1) Kuznetsov, A. (2011) "*On extrema of stable processes*", *Ann. Probab.* **39**, No.3, 1027–1060, **IF: 1.79**

(2) Chaumont, L. (2013) "*On the law of the supremum of Lévy processes*", *Ann. Probab.* **41**, No.3A, 1191-–1217, **IF: 1.79**

(3) Chaumont , L. and Malecki, J. (2013) "*The asymptotic behavior of the density of the supremum of Lévy processes*", arXiv preprint arXiv:1310.1587

5. Doney, R. and Savov, M. (2010) "*Right inverses of Lévy processes*", *Ann. of Probab.* **38**, No.4, 1390–1400, **IF: 1.47**

Научни приноси: Нека X_t е процес на Леви. В тази статия ние характеризираме всички процеси на Леви, които притежават дясно-непрекъснат процес, т.е. за даден X съществува нарастващ процес на Леви $(K_x)_{x\geq 0}$, така че $X_{K_x} = x$ поне за $x \in [0, \varsigma]$, където $\varsigma > 0$ п.с. . Проблемът за съществуването се свързва директно с потенциалната теория на Марковските процеси и НДУ за неговото съществуване са дадени във Винкел (2002). Големият недостатък на тези НДУ е, че те зависят от количества, които са практически неизчислими при зададени основни характеристики на X, т.е. (σ^2, γ, Π). В нашата статия ние доказваме, използвайки теория на флуктуациите на процесите на Леви, че когато $\sigma^2 = 0$

$$\exists (K_x)_{x\geq 0} \iff \int_0^1 \frac{x^2}{\left(\int_0^x \int_y^1 \overline{\Pi}_-(s) ds dy\right)^2} \Pi(dx) < \infty,$$

където $\overline{\Pi}_-(x) = \Pi(\{-\infty, -x\}), x > 0$. В случая, когато $\sigma^2 > 0$ се знае, че $\exists K_x$. Така проблемът за съществуването на дясно-непрекъснат процес се свежда до изчислението на конкретен интеграл зависещ само от Π.

Библиографична справка:

(1) Winkel, M. (2002) *Right inverses of non-symmetric Lévy processes*, *Ann. Prob.*, **30**, 382-415

6. Doering, L. and Savov, M. (2010) "*Application of renewal theorems to exponential moments of local times*", *Electron. Comm. in Probab.* **38**, No.15, 263–269, **IF: 0.56**

Научни приноси: Тази кратка статия използва стандартни резултати, за да подобри асимптотични резултати за трансформацията на Лаплас на времето на престой в дадена точка на даден Марковски процес. Ако L_t^i е акумулираното посещение на състояние i, започвайки от i, то ние разглеждаме $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ за $\gamma \geq 0$ и показваме, че в зависимост от γ асимптотиката на $\mathbb{E}\left[e^{\gamma L_t^i}\right]$ при $t \to \infty$ може да се пресметне с помощта на вероятностите на предход $p_s(i,i)$.

Резултатите илюстрират силата на теория на възстановяването за доказването на нови или подобряването известни резултати. Основната цел на публикацията е популяризирането на теория на възстановяването за опростяване на доказателствата на редица проблеми, които иначе използват спектрална теория.

7. Bertoin, J. and Savov, M. (2010) "*Some applications of duality for Lévy processes in a half-line*", *Bull. of London Math. Soc.* **43**, 97–111, **IF: 0.63**

Научни приноси: Нека ξ_t е процес на Леви с $\infty > \mathbb{E}[\xi_1] \geq 0$ (плюс естествено техническо ограничение, което няма да въвеждаме за яснота). Нека $T_x = \inf\{t \geq 0 : \xi_t \geq x\}, x > 0$. Знае се, че

$$\lim_{x\to\infty} (\xi_{T_x} - x, x - \xi_{T_x-}) \stackrel{d}{=} (O, U),$$

където O, U се наричат съответно "*надвишаващо ниво на преминаване*"(overshoot) и "*отстояние преди преминаване*"(undershoot). Нека също $\xi_t^\uparrow(x)$ означава консервативния Марковски процес (т.е. с безкраен "живот"), който описва процеса на Леви ξ стартиран от $x \geq 0$ с условие да приема само положителни стойности (conditioned to stay positive), виж Бертоан (1996) за цялостна експозиция на теорията на процесите на Леви.

С означенията по-горе нека означим процеса

$$\eta_t = \begin{cases} \xi_t + O & t \geq 0 \\ -\xi_{-t}^\uparrow(U) & t < 0 \end{cases},$$

където $\xi, \xi^\uparrow, (O, U)$ са независими копия на величините и процесите въведени по-горе. Тоест при зададени (O, U) стартираме надясно обикновен процес на Леви и прилепяме за отрицателни времена t процеса $-\xi_{-t}^\uparrow(U)$. В нашата статия ние изследваме свойствата на процеса η. Процесът има следните забележителни свойства:

I: Ако T_x е отново моментът на преход над x на $(\eta_{T_x+t})_{t\in\mathbb{R}} \stackrel{w}{=} (x+\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$, т.е. времевата транслация с количество T_x е еквивалентна на пространствената транслация с количество x.

II: $\eta_t \stackrel{d}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\xi^x_{t-T_x} - x\right), t \in \mathbb{R}$, т.е. η е слабата граница на траекториите на първоначалния процес на Леви, транслиран във времето в момента на преминаване на ниво x и в последтвие нивото се устремява към безкрайност.

III: Предходните свойства позволяват фундаменталното представяне на положителните себеподобни Марковски процеси, започващи от 0 като смяна на времето на η. Нека X^x_t е себеподобен положителен Марковски процес, т.е. за всяко $c > 0, x \geq 0$ имаме $(X^{cx}_t)_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} \left(cX^x_{tc^{-\alpha}}\right)_{t\geq 0}$ за някое $\alpha > 0$. Тогава имаме забележителното представяне

$$X^0_t = e^{\eta_{\tau_t}},$$

където τ_t е подходяща смяна на времето.

Последното свойство е от особено значение тъй като дава пълнота на така наречените представяния на Ламперти на положителните себеподобни Марковски процеси **стартиращи от** $x \geq 0$.

Библиографична справка:

(1) Bertoin, J. (1996) *Lévy Processes.* Cambridge University Press.

8. Savov, M. (2010) "*Small time one-sided LIL behaviour for Lévy processes at zero*", *J. of Theoret. Probab.* **23**, No.1, 209–236, **IF: 0.60**

Научни приноси: Естественото продължение на проблемите в статия 2 е да се изследва количеството

$$L(b) := \limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b(t)} \in [0,\infty]$$

или *едностранния закон за повторния логаритъм* за процеси на Леви X. В тази статия ние постигаме следните резултати, всичките от които са нови, тъй като се отнасят за поведението, когато $t \to 0$:

I: Дефинираме конкретна функция b_0 с помощта на на мярката на Леви Π и доказваме, че

$$\limsup_{t\to 0} \frac{X_t}{b_0(t)} \in [1, 1.8] \iff \int_0^1 \Pi\left(\{b_0(t),\infty\}\right) dt < \infty.$$

II: Тъй като b_0 не винаги е правилната функция, която да описва ръста на X, виж I, то ние разработваме интегрален критерии, който за произволна функция $b(t)$ (

с някои дребни стандартни ограничения), ни показва дали $L(b) = 0$, $L(b) \in (0, \infty)$ или $L(b) = \infty$.

Основните трудности при тези задачи е да се изработи техника, специфична за процесите на Леви, тъй като поведението когато $t \to 0$ няма аналог при случайното блуждаене. Последното дава добри индикации и методи за свойствата на процесите на Леви когато $t \to \infty$ чрез различни влагания. Пример $(X_n)_{n\geq 1} = (X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}))_{n\geq 1}$ дефинира случайно блуждаене.

По принцип *едностранния закон за повторния логаритъм* е по-сложен от задачата разгледана в статия 2 и това се отразява в самите резултати. Те са по-неточни и не позволяват точнито изчисление на $L(b)$.

9. Savov, M. and Winkel, M. (2010) "*Right inverses of Levy processes: the excursion measure in the general case*", *Electron. Comm. in Probab.* **38**, No. 15, 572–584, **IF: 0.56**

Научни приноси: В тази кратка статия ние развиваме идеите от статия 5. Нека примомним проблема. Нека X_t е процес на Леви. В статия 5 характеризираме всички процеси на Леви, които притежават дясно-непрекъснат процес, т.е. за даден X съществува нарастващ процес на Леви K_x така че $X_{K_x} = x$ поне за $x \in [0, \varsigma]$, където $\varsigma > 0$ п.с..

Следваща естествена стъпка е характеризирането на процеса K_x, който е и нарастващ процес на Леви (*субординатор*). Целта на тази статия е да опише мярката на Леви, асоциирана с K_x. Статията постига това. Доказваме, че скоковете на K_x са сумата от следните количества : вземаме една екскурзия на процеса X извън максимума (тоест ***времето до достигането*** на нов максимум на X след като попаднем в текущ максикум); пресмятайки разликата от новия максимум на X, реализиран чрез тази екскурзия и предходния максимум, да приемем, че разликата е T, стартираме процес на Леви от ниво T и вземаме ***времето до първо завръщане в нулата***. Събирайки дължините на двете времена получаваме типичния скок на K_x. Технически, използваме теория на екскурзиите, за да докажем този факт.

Погледнато през призмата на случайните разходки, резултатът е естествен, но добиването му за процеси на Леви изисква определено ниво на техника.

10. Chan, T., Kyprianou A. and Savov, M. (2011) "*Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes*", *Probab. Theory and Related Fields* **150**, 691–708, **IF: 1.53**

Научни приноси: Нека както е обикновено X е процес на Леви. Нека допуснем, че X има само отрицателни скокове. Тогава казваме, че процесът е спектрално-отрицателен процес на Леви. Тъй като този процес има скокове само когато се движи надолу, то доста количества имат полуявен вид. В основата на много сметки стои така наречената *скалираща функция* (scale function). Вероятностно ролята на тази функция най-добре се вижда в съотношението

$$\mathbb{P}_x\left(\tau_{(a,\infty)} < \tau_{(-\infty,0)}\right) = \frac{W(x)}{W(a)},$$

където $\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}$ и $a \geq x \geq 0$. Тоест функцията описва вероятността на процеса X, стартиран от позиция x, да премине a преди да премине под 0.

Функцията W присъства в много други количества и съотношения. Нейните свойства са от интерес не само за теорията, но и за приложенията, особено за теория на застраховането, където случайните процеси на приходи и разходи естествено се моделират със спектрално-отрицателни процеси на Леви.

За да се използва в редица изследвания е необходимо да се знае гладкостта на функцията $W : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$. В този труд ние изледваме гладкостта на функцията в зависимост от трите основни характеристики на процеса на Леви - (σ^2, γ, Π). Почти изчерпателно показваме, че

$$W \in C^{n+3}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty,-x)\}\in C^n([0,\infty)), \text{ ако } \sigma^2 > 0,$$

включително и, че винаги $W \in C^2([0,\infty))$, когато $\sigma^2 > 0$. Също така разсикваме и случая когато $\Pi\left(\{-\infty,0\}\right) < \infty$ и показваме, че при някои допълнителни условия

$$W \in C^{n+1}([0,\infty)) \iff \Pi\left(\{-\infty,-x\}\right) \in C^n([0,\infty)) \text{ ако } \sigma^2 = 0,\ \Pi\left(\{-\infty,0\}\right) < \infty.$$

Методът ни се базира на факта, че W удовлетворява уравнение на Волтера от втори вид базирано на мярката на Леви Π. Макар и добре изучени, защото решенията на тези уравнения се развиват в ред на фон Нойман, когато $\Pi\left(\{-\infty,0\}\right) = \infty$, изледването на този ред е технически нелека задача. Използвайки различни основни техники от анализа, ние получаваме горните резултати.

Когато $\sigma^2 = 0, \Pi\left(\{-\infty,0\}\right) = \infty$, уравненията на Волтера са от първи вид и изледването им е доста по-трудно. За този случай нямаме добити резултати и съществуват няколко хипотези за зависимостта на гладкостта на W от гладкостта на Π.

Стандартни експоненциални функционали на процеси на Леви

13. Pardo, J.C., Patie, P. and Savov, M. (2012) "*A Wiener-Hopf type of factorization for the exponential functional of Lévy processes*", *J. of London Math. Soc.* **96** (2), 930–956, **IF: 0.80**

14. Patie, P. and Savov, M. (2012) "*Extended factorizations of exponential functionals of Lévy processes*", *Electron. J. of Probab.* **17**, No.38, 1–22, **IF: 0.785**

17. Patie, P. and Savov, M. (2013) "*Exponential functional of Lévy processes: Generalized Weierstrass products and Wiener-Hopf factorization*", *Comptes Rendus Mathematique* **351**, No.9-10, 393–396. **IF: 0.477**

Научни приноси: Нека ξ_t е процес на Леви. Да дефинираме експоненциалните функционали (с неявно допускане за добра дефинираност)

$$I = \int_0^\infty e^{-\xi_s} ds; \quad I_{e_q} = \int_0^{e_q} e^{-\xi_s} ds,$$

където e_q, $q > 0$, е независима от ξ експоненциално разпределена случайна величина. Нека

$$\psi(z) = \ln\left(\mathbb{E}\left[e^{zX_1}\right]\right) = bz + \frac{\sigma^2}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{zy} - 1 - zy1_{|y|<1}\right)\Pi(dy).$$

Да означим с $\mathcal{M}_q(s) = \mathbb{E}\left[I_{e_q}^{s-1}\right]$ и $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}\right]$. Знае се, че когато $\psi(z)$ е аналитична функция поне на ивицата $Re(z) \in (0,a)$ и $\psi(Re(z)) < 0$, за $Re(z) \in (0,a)$, то

$$\mathcal{M}(z+1) = -\frac{z}{\psi(z)}\mathcal{M}(z) \qquad \mathcal{M}_q(z+1) = -\frac{z}{\psi(z)-q}\mathcal{M}_q(z)\,; \text{ за } Re(z) \in (0,a). \tag{0.1}$$

Уравненията (0.1) са от вида $f(x+1) = g(x)f(x)$. В трите статии, използвайки стандартното представяне (за $\mathcal{M}_q$ е сходен подходът),

$$\psi(z) = -\phi_+(-z)\phi_-(z), \tag{0.2}$$

наричано Винер-Хопф факторизация, което води до

$$\mathcal{M}(z+1) = \frac{z}{\phi_+(-z)\phi_-(z)}\mathcal{M}(z) \text{ за } Re(z) \in (0,a), \tag{0.3}$$

ние успяхме да докажем, че

$$\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z),$$

където

$$\mathcal{M}_1(z+1) = \frac{z}{\phi_+(-z)}\mathcal{M}_1(z); \quad \mathcal{M}_2(z+1) = \frac{1}{\phi_-(z)}\mathcal{M}_2(z).$$

Това не е тривиална задача, макар на пръв поглед да е естествено, че $\mathcal{M}(z) = \mathcal{M}_1(z) \times \mathcal{M}_2(z)$. Използваните техники варират от стационарни Марковски процеси и техните стационарни разпределения до теория на аналитичните функции. Освен чисто аналитичния проблем (0.1) ние намираме като следствие, че

$$I = I_1 \times I_2,$$

където случайните величини I_1, I_2 са доста по-лесни за описване и така гарантират подробното изучаване на свойствата на I.

Като допълнителна информация получихме доста точното поведение на $f(\theta) = \mathcal{M}(a + i\theta), |\theta| \to \infty$. Това ще бъде съществено използвано в последващото ни изучаване на спектралната теория на себеподбните Марковски процеси.

Нещо повече с помощта на приближения и вероятностни методи успяхме да решим (0.1) и когато $\psi(z)$ е дефинирана само за $z \in i\mathbb{R}$, което не е априори възможно с аналитични средства. Това даде възможност за пълното пресмятане на трансформациите на Мелин, т.е. на $\mathcal{M}(z)$ на всички екпоненциални функционали на Леви чрез функциите $\phi_\pm$.

На сегашния етап резултатите ни са най-точните за тези функционали, които играят основна роля в финансите, застраховането, някои физични модели и не на последно място заемат важна роля в теория на вероятностите.

Обобщени експоненциални функционали на процеси на Леви

12. Kuznetsov A., Pardo J.C. and Savov, M. (2012) "*Distributional properties of exponential functionals of Lévy processes*", *Electron. J. of Probab.* **17**, No.8, 1–35, **IF: 0.785**

Научни приноси: Нека ξ, η са два независими процеса на Леви. Дефинираме формално

$$I := I(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\xi_{s-}} d\eta_s.$$

Когато $\eta_s = s$, то имаме стандартен експоненциален функционал, тъй като $\xi_s = \xi_{s-}, ds-$ почти сигурно. Нека $m(dx) := \mathbb{P}(I \in dx)$.

Тъй като I е стационарното разпределение на класа стационарни процеси на Орнщайн-Уленбек с генератор $\mathcal{L}$, имаме за всяко $f \in Domain(\mathcal{L})$

$$0 = \langle \mathcal{L}f, m \rangle = \langle f, \mathcal{L}^* m \rangle,$$

където $\mathcal{L}^*$ е генераторът на дуалния процес на Орнщайн-Уленбек. След това с помощта на теория на разпределенията на Шварц доказваме, че дори $\mathcal{L}^* m = 0$, което дава интегро-диференциално уравнение за разпределинието на I, т.е. $m(dx)$.

Във втората част на статията изследваме $m(dx) = \kappa(x)dx$ в случая когато $\eta_s = \sigma B_s + \mu s$, т.е. когато имаме Брауново движение. Доказваме различни свойства за $\kappa(x)$ като поведението при $x \to 0, x \to \pm\infty$, гладкостта на функцията κ и дори нейното развитие в ред. За изследването използваме трансформацията на Мелин $\mathcal{M}(s) = \mathbb{E}\left[I^{s-1}, I > 0\right]$. Доказваме редица нейни представяния с помощта на хипергеометрични функции, изучаваме нейните свойства като аналитична функция, нейното повение по протежение на комплексните прави, т.е. $\mathcal{M}(x + i\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Последващо обръщане на трансформацията на Мелин ни дава възможност да получим свойсвата на $\kappa(x)$, изброени по-горе.

11. Doering, L. and Savov, M. (2011) "*(Non) Differentiability and asymptotics for renewal densities of subordinators*", *Electron. J. of Probab.* **16**, No.17, 470–503, **IF: 0.79**

Научни приноси: Нека ξ_s е нарастващ Леви процес с дрифт, тоест $\xi_s = \delta s + \sum_{v \leq s} \Delta_v$ е сума на линеен дрифт и положителни скокове. Нека

$$U^q(dx) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}\left(\xi_t \in dx\right) dt, \ q \geq 0$$

са $q-$потенциалите. Когато $\delta > 0$ знаем, че $U^q(dx) = u^q(x)dx$ и е в сила уравнението

$$\delta u^q(x) = 1 - \int_0^x u^q(x-y)\left(\bar{\Pi}(x) + q\right) dy, \tag{0.4}$$

където Π е мярката на Леви на скоковете на ξ и $\bar{\Pi}(x) = \Pi\{x, \infty\}, x > 0$. Използвайки (0.4), ние доказваме, че u^q се развива в ред от конволюции на $\bar{\Pi}(x) + q$

$$u^q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta^{n+1}} \left(1 * (\bar{\Pi}(x) + q)\right)^{*n}(x).$$

Това уравнение и трансформации на Фурие позволяват в детайл да се изследва гладкостта на u^q в зависимост от гладкостта на $\bar{\Pi}$. Най-забележителният резултат е, че $(u^q)'$ е непрекъсната тогава и само тогава, когато x не е атом на Π, т.е. $\Pi\left(\{x\}\right) = 0$. В противен случай $(u^q)'(x+) - (u^q)'(x-) = \delta^{-2}\Pi\left(\{x\}\right)$.

15. Kolb, M., Savov, M. and Wübcker, A. (2013) "*Geometric ergodicity of a hypoelliptic diffusion modelling the melt-spinning process of nonwoven materials*", *SIAM J. Math. Anal.* **45** No.1, 1–13, **IF: 1.573**

Научни приноси: Тази разработка разглежда задача от индустрията, която поставя интерестни проблеми. При производството на филтри и материали за изолация често се използва следния подход: в турбулентен въздушен поток от височина се изпускат влакна от полимери (неподлежащи на тъкане), тези влакна падат върху стационарна или движеща се повърхност, като се усукват и образуват подобие на нерегулярна мрежа. Естествените въпроси са свързани с това дали добитата мрежа ще е достатъчно финна, за да бъде добър филтър или да изолира. Ясно е, че тази нерегулярност води до по-голям разход на материал за по-финна мрежа спрямо обикновената мрежа, но използваните материали и простотата на методологията компенсират цената.

Процесът на първо приближение се моделира чрез уравненията:

$$d\xi_t = \tau(\alpha_t)dt d\alpha_t = \sigma dB_t - \nabla\varphi(\xi_t)\cdot\tau^{\perp}(\alpha_t)dt, \tag{0.5}$$

където $\tau(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Имаме, че ξ е двумерната крива върху конвейра, която описва влакното, и α е нормалният към влакното вектор. B е Брауново движение, описващо турбулентния въздушен поток. В статията изследваме различни свойства на Марковския процес (ξ, α) и добиваме общи условия за неговата геометрична ергодичност. Тя гарантира, че процесът ще се се завръща около центъра на координатната система (конвейра) и така ще се получи добро наслагване на влакната и съответно добър филтер, изолационен материал. Методите, които ползваме са класически и разчитат основно на намирането на точна функция на Ляпунов.

16. Aurzada, F., Doering, L. and Savov, M. (2013) "*Chung LIL for Lévy processes at small times*", *Bernoulli* **19**, No.1, 115–136, **IF: 0.94**

Научни приноси: Нека X е процес на Леви. В този труд ние идентифицираме клас от функции $b_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, които се изчисляват с помощта само на мярката на Леви Π (случаят $\sigma^2 > 0$, т.е. процесът на Леви е сумата на Брауново движение плюс скокове, е класически) такива, че $\exists 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, така че

$$\liminf_{t\to 0}\frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_1}(t)} \le 1 \le \liminf_{t\to 0}\frac{\sup_{s\le t} X_s}{b_{\lambda_2}(t)}.$$

Този тип закони се наричат закони на Чънг за повторния логаритъм. За голям клас от процеси на Леви намираме $0 < \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 < \infty$

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\leq t} X_s}{b_\lambda(t)} = 1.$$

Техниките се базират на резултати в статията на Аурзада и Дирайх по-долу, но по характера си са класически и използват оценки на малките девиации, подобрени леми на Борел-Кантели и др.

Резултатите са по-добри от съществуващите, тъй като условията са аналитични, т.е. се пресмятат с помощта на Π, докато предходните зависят от $\liminf_{0\to 0} \mathbb{P}\left(X_t > 0\right) = \rho \in (0,1)$, за което няма удовлетворителни критерии.

Библиографична справка:

(1) Aurzada, F. and Dereich, S. (2009). Small deviations of general Lévy processes. *Ann. Probab.*, **37**, 2066–2092.

Младен Светославов Савов

Подпис :