Р Е Ц Е Н З И Я

по конкурс за заемане на академичната длъжност „професор” в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление **4.5. Математика**, **научна специалност: „Изчислителна математика (Числен и теоретичен анализ на нелинейни частни диференциални уравнения)",**

обявен от ИМИ, БАН, в ДВ бр. 35/10.05.2016 г.

Представил рецензията: проф. д.м.н. Стефка Николаева Димова,
жив. гр. София, ж.к. „Хр. Смирненски”, бл. 62, вх. А, ап. 54

Единствен кандидат по конкурса е доц. д-р Наталия Тодорова Кольковска. През 1973 г. тя завършва висше образование във ФМИ, СУ, специалност Изчислителна математика. От 1973 г. до 1976 г. е н.с. в ИМИ, БАН. От 1976 г. до 1980 г. е докторант в Московския държавен университет, Факултет по изчислителна математика и кибернетика, където защитава дсертация на тема «Числено изследване на математическите модели на задачата за кристализация на метал във форми». От 1980 г. и до сега работи в ИМИ, БАН последователно като н.с. (1980-1993) и доцент (1993 до сега).

1. Общо описание на представените материали. За конкурса доц. Кольковска е представила 27 излезли от печат научни публикации от общо 51. Никоя от публикациите не е представяна за участие в други конкурси, както и при получаване на ОНС „доктор”. Единадесет от статиите са в чуждестранни списания с имакт фактор; четиринадест са в реферирани сборници с доклади на международни научни форуми в България, като 6 от тях са в LNCS и 7 - в AIP Conference Proceedings, всички със SJR индекс. Осем от публикациите за конкурса са самостоятелни, пет са с един съавтор, дванадесет са с двама съавтори, две са с трима съавтори.

2. Обща характеристика на научната, преподавателската и научно-приложната дейност на кандидата. Научната и научно-приложната дейност на Наталия Кольковска се вписват точно в тематиката на научната специалност **Изчислителна математика (числен и теоретичен анализ на нелинейни частни диференциални уравнения)**, в която е обявен конкурсът. Те включват теоретичен анализ на диферснциалните задачи и на свойствата на техните решения, както и конструиране и изследване (теоретично и числено) на ефективни числени методи и алгоритми за тяхното решаване. Изследваните диференциални задачи са математически модели на реални процеси – вълнови процеси от различно естество, процеси с фазов преход, така че сериозните научни резултати имат и съществен приложен характер.

Получените резултати са представяни широко на научни форуми и семинари у нас и в чужбина, като само след 2010 г. са изнесени над 25 доклада. Участвала е в организационните комитети на 5 международни конференции в България и в програмните комитети на две конференции «Математическо моделиране и изчислителна физика» (MMCP) в чужбина – в Дубна, Русия, и в Словакия. Била е председател на

Организационния комитет на МК NMA’2010, Боровец. В течение на 8 години е била ръководител на секция „Изчислителна математика” в ИМИ. Член е на SIAM.

Доц. Кольковска е участвала в изпълнението на 12 научно-изследователски проекта в периода 1980-1997 г. В момента участва в изпълнението на проект ДФН-И 02/9, 2014-2017 г. От 2007 г. до сега е ръководител на проекти в рамките на Плана за сътрудничество между ОИЯИ, Дубна и Българската агенция за ядрено регулиране. Участвала е в 4 международни проекта с МДУ, Москва, със СО на АНСССР, Новосибирск, с Полската АН и с Шведската АН.

В периода 1982-2000 г. доц. Кольковска е имала преподавателската дейност във ФМИ, СУ, която също се вписва в тематиката на конкурса - упражнения по Числени методи, спецкурсове по Диференчни методи, Числени методи за решаване на интегрални уравнения, Метод на крайните и граничните елементи; била е научен ръководител на 7 успешно защитени магистърски дипломни работи във ФМИ, СУ. Чела е лекции в Центъра по обучение на БАН през 1999 г. и 2004 г. Понастоящем е научен ръководител на двама докторанта - един редовен и един задочен. Това, че доц. Кольковска не изпълнява изискването за двама защитили кандидати, напълно се компенсира със сериозните и' научни и научно-приложни приноси.

3. **Анализ на научните и научно-приложните постижения на кандидата**. Ще отбележа, че по-голямата част от работите, представени за конкурса, са от последните 7 години, 2010-2016. Това е обещаващо и за бъдещото развитие на доц. Кольковска. Всички тези 22 работи са посветени на численото и теоретичното изследване на задачата на Коши за нелинейни ЧДУ от тип на Бусинеск (УБ):

$$\beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta^2 u = \Delta f(u), \quad x \in \text{Ÿ}^n,$$

$$f(u) = \alpha |u|^p, \;\; p \ge 2 \quad \textit{или} \quad f(u) = a\,|u|^p u + b|u|^{2p} u, \quad p \ge 1 \;\; \textit{(нелинейност на Бернули).}$$

Това са задачи, зависещи от поне 4 параметъра – дисперсните параметри *β_1 и β_2* пред производните по времето, α , *p* , *a*, *b* в нелинейния член *f(u)*. Различните им комбинации и интервали на изменение определят различните свойства и поведение на решенията и изискват различни методи на изследване.

Работите [A5] – [A11], [B6], [B11] – [B13] съдържат основно теоретични изследвания, работите [A4], [B3] – [B5], [B7] – [B10], [B14] – [B16] - конструиране на числени методи и алгоритми и числени изследвания. Кзавам „основно”, понеже работите с теоретични изследвания съдържат и резултати от числени експерименти, които илюстрират теоретичните.

Най-съществените проблеми, свързани с тези задачи, са намирането на условия за съществуване на глобални (съществуващи за всяко *t>0*) и сингулярни по времето (избухващи за крайно време *T_0*, *blow-up*) решения. От вариационна гледна точка има 2 естествени функционала, свързани с тези задачи:

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_1}+\int_R F(u)dx, \quad F(u)=\int_0^u f(s)ds,$$ F(u) - трансформация на Кирхоф на f(u),

който може да се разглежда като функционал на потенциалната енергия,

и функционала на Нехари: $I(u)=J'(u)u=\|u\|^2_{H_1}+\int_R uf(u)dx.$

С помощта на *J(u)* и *I(u)* се дефинира критичната енергетична константа (КЕК) *d*:

$d=\inf_{u\subset N} J(u), \quad N=\{u\subset H^1 : I(u)=0, \|u\|_{H_1}\neq 0$, N - *многообразие на Нехари,*

която определя т.н. субкритична (*E(0)<d*) и суперкритична (*E(0)>d*) начална енергия *E(0)*. В работа [B6] тази константа е намерена явно (Теорема 2) в едномерния случай (*n=1*) при нелинейност $f(u)=\alpha|u|^p, \quad p\geq 2$, като е използвана точната константа в Соболевата теорема за влагане. Числените експерименти при *n=1* показват, че намерената константа *d* е точна. В Теорема 3 са намерени условия върху начални данни, близки до известното точно стационарно решение (солитон) при *p=2,* които осигуряват съществуване на глобално решение.

Известните в литературата резултати (основно при *n=1*), че за $f(u)=\alpha|u|^p, \quad p\geq 2$ решението на УБ избухва, ако *E(0)<0,* и че за *0<E(0)<d* глобалното съществуване или избухване се определя напълно от знака на функционала на Нехари, са развити и обобщени в пречислените по-горе работи ([A5] – [A11], [B6], [B11] – [B13]). Развитието и обобщението са в смисъл за задачи със суперкритична енергия *E(0)>d,* за задачи с нелинейности от по-общ вид, за задачи с линейна възстановяваща сила, както и за други типове дисперсни задачи.

Съществуването на глобално решение при *E(0)>d* и при нелинейност $f(u)=\alpha|u|^p, \quad p\geq 2$, е доказано в работа A5 (Теорема 7.) чрез въвеждане на два нови функционала (единият е обощение на *J(u)* , другият зависи от началния профил u_0 и началната скорост u_1 на решението).

Случаят на нелинейност от типа на Бернули при почти всички възможни комбинации на знаците на *a* и *b* и на едно съотношение между тях (Случай 1.- Случай 5) е изследван в работите A6 и B11. Работа A6 е особено богата на интересни резултати. Изследвано е съществуването на стационарни решения в 5-те различни случая. Показано е, че в Случаите 1. и 2. съществува стационарно (ground state) решение при условията $|\psi(x)|\to 0, |x|\to\infty$, в Случай 3. съществуват 2 решения от тип кинк при условията $|\psi'(x)|\to 0, |\psi''|\to 0, \ |x|\to\infty$. Показано е, че в Случаите 4. и 5. не съществуват нетривиални стационарни решения, но УБ има единствено глобално решение при начални данни с произволна енергия (Теорема 4.3). В Случая 1. (*b<0*) и произволно *p>0* е намерена КЕК *d* (Теорема 5.5). За изследване на Случай 2. е предложен и използван нестандартен метод на потенциалната яма и нова КЕК d_+ $(d=-\infty)$, също намерена за $\forall p>0$ (6.10) и за $p=2$ (6.11). Доказано е, че при $E(0)<d_+$ съществува единствено глобално решение (Теорема 6.4). Ще отбележа, че Случай 2. не е разглеждан в литературата.

Случаят 3. е изследван в работа B11. Тук също е дефинирана нова КЕК d_+ , но за нея са намереми само оценки отдолу и отгоре (Теорема 5.). Глобално съществуване на решението на УБ при $E(0)<d_+$ и при ограничения за началните данни е доказано чрез нестандартния метод на потенциалните ями (Теорема 2.). За малко по-различен от Случай 3., когато $a<0$, без ограничения върху началните данни е доказано съществуване на глобално решение чрез закона за запазване на енергията.

Глобалното съществуване и избухване на решенията на УБ с линейна възстановяваща сила и за уравнение на Клайн-Гордон с обща нелинейност от вид H1 или H2 са изследвани в работите A7 – A10, B13. При изследванията е използван изпъкналият метод на Левин с неговото оригинално диференциално неравенство (работи A7, A8, B13) и с предложеното тук ново диференциално неравенство, по-подходящо за дисперсни уравнения (работи A9, A10).

В A7 за уравнението на Клайн-Гордън е доказано (Теорема 2.2) съществуване на blow-up решение при произволно висока положителна енергия на началните данни и е предложен алгоритъм за конструиране на начални данни, за които условията на тази теорема са изпълнени, а теоремите от известните до сега работи не са приложими.

В A9 основният резултат е несъществуването на глобално решение на новото диференциално неравенство (Теорема 3.1). С използване на това неравенство и при някои условия за началните данни u_0 и u_1 е доказано, че всяко слабо решение на УБ с линейна възстановяваща сила и нелинейност от вида H1 или H2 избухва за крайно време t^*. Намерена е (Теорема 4.5) оценка отгоре за t^* при някои допълнителни условия. В A10 подобен резултат с оценки отгоре за времето на съществуване са направени за уравнението на Клайн-Гордон (Теорема 5).

В работа B13 за едномерното УБ с линейна възстановяваща сила и нелинейност от вида H1 или H2 са въведени 3 обобщени функционала на Нехари, $I_k(t), k=1,2,3.$ Доказано е, че ако $I_k(0)<0,$ то $I_k(t)<0$ за всички достатъчно големи $t>0$ (Теореми 4., 5. и 6.) и при някои допълнителни условия за началните данни решението избухва за крайно време (Теорема 7.).

Числени експерименти, илюстриращи теоретичните резултати, има в работи A5, A6, B6, B11, B12. Във всички тях експериментите са направени върху равномерни мрежи по пространството и по времето, което в случаите, когато се демострира blow-up, може да даде само качествен, не и количествен резултат. Във сички тези работи има изречение (нарочно го цитирам на английски): „In addition, mesh refinement analysis is performed.”, но никъде не е обяснено в какво се състои той и какво е показал.

Втората група от работи [A4], [B3] – [B5], [B7] – [B10], [B14] – [B16] е посветена на конструиране и изследване на числени методи за решаване на УБ, както и на съответното стационарно уравнение. Методите са изложени в двумерния случай, но тяхната конструкция позволява обобщение и в многомерния. Числените експерименти са най-често за едномерния случай. Това, което трябва да се отбележи особено, е пълното теоретично изследване на предложените методи по отношение на консервативност, устойчивост, сходимост и точност, които свойства след това са илюсрирани в проведените числени експерименти. Дискретните задачи се решават в крайна област, достатъчно голяма, за да може асимптотичните гранични условия да се заменят с анулиране на решението и на лапласиана от него върху границата. При дискретизацията удачно се използва трансформацията на Кирхоф на нелинейния член, която при степенни нелинейности се пресмята в явен вид.

За конструиране на ефективни алгоритми решаването на УБ се свежда до решаване на две задачи – елиптична и хиперболична. С използване на този подход в работа B3 са предложени две семейства трислойни схеми с параметър σ - неитерационна (явна) и итерационна (неявна), които се различават по апроксимацията на нелинейния член. Показано е, че итерационната схема удовлетворява дискретния закон за запазване (Терема 2.), а неитерационната – не. Локалната грешка на апроксимация на двете схеми е $O(|h|^2+\tau^2)$. Числените експерименти, направени в едномерния случай върху едносолитонното точно решение на УБ и върху колизията на два солитона с различни скорости, показват втори ред на сходимост на двете схеми по метода на Рунге върху редици от вложени мрежи. Едносолитонното решение, получено с неитерационната схема, е с по-малка грешка от полученото по итерационната.

В работа B4 е доказан втори ред на сходимост за двете схеми в W_2^1 дискретна норма (Теореми 4. и 5.) при условие, че точното решение u е ограничено, $u \in C^{6,4}(R^2 \times (0,T))$ и при условие за параметъра σ. С използване на торемите за влагане са получени оценки в мрежова норма C (Следствие 2.) – оптимална в 1D и почти оптимална в 2D. Ще отбележа, че в оценките участва константа $M \ge \max(|u|,|u_{tt}|,|v|)$ и това налага в близост до времето на избухване стъпката по времето да се намалява съществено в зависимост от тази величина.

В работа A4 е предложено още едно семейство неявни диференчни схеми с параметър θ и нова апроксимация на нелинейния член. Доказана е (Теорема 3.1) консервативността на схемата, съществуване на ограничено решение в подходящ интервал от време при условия за τ и θ, както и втори ред на сходимост (Теорема 4.1) при условия за ограниченост на дискретното решение в мрежова норма C и на производните на точното до четвърти ред по x и по t. Числените експерименти в 1D случая илюстрират втория ред на сходимост върху едносолитонното точно решение на УБ и върху колизията на два солитона с различни скорости. Направено е сравнение на точността на приближените решения, получени с неявните схеми от A4 и B3. Трите семейства диференчни схеми (двете от работа B3 и тази от A4, са сравнени в 1D случая и в работа B7, като при алгоритмичната реализация е използвана факторизация на оператора B и експериментите са за нелинейност от вида $f(u) = \alpha |u|^{p}, \quad p = 2,3,4,5.$

Работа B5 съдържа числени резултати в двумерния случай и това са едни от първите такива резултати. Използвана е специална неравномерна мрежа в направление x . Реализирани са два вида гранични условия – нулеви в достатъчно голяма област, и апроксимасия на асимптотичните гранични условия, предложена от Хр. Христов. Дискретната задача е решавана с Метода на спрегнатия градиент с преобуславяне. Експериментите са с приближеното стационарно солитонно решение при различни скорости, при които има *(c=0.3)* или няма *(c=0.2)* blow-up. Реализирана е и колизия на две структури с различни скорости.

За решаване на 2D УБ в работа B8 е конструиран и изследван многокомпонентен метод на променливите направления, предложен от А. Абрашин. При предположение, че точното решенеие $u \in C^{6,6}(R^2 \times (0,T))$ и приближеното е ограничено в *(0,T)* е доказана сходимост на метода със скорост $O(h^2 + \tau)$ (Теорема 2.). Алгоритмично методът се свежда до решаване на петдиагонални линейни системи относно двете компоненти на решението. Експериментите са за двумерната задача и показват първи ред на сходимост по времето и малко повече от втори по пространството.

В работи B9 и B14 са предожени и изследвани явни четирислойни консервативни дифренчни схеми с два параметъра θ, μ . На всяка стъпка по времето се решават дискретни елиптични уравнения от четвърти ред при $\mu \neq 0$ и от втори ред при $\mu = 0$. В сила е дискретен закон за запазване (Теорема 1.). При условия за параметрите θ, μ и стъпката τ е доказана (Теорема 2.) сходимост със скорост $O(|h|^2 + \tau^2)$ в дискретна W_2^1 норма и като следствие от теоремите за влагане – в мрежова C норма.

В работа B10 са предложени и изследвани две диференчни схеми за еволюцията на решенията на УБ в подвижна кооординатна система. Това дава възможност солитонът да е в началото на координатната система през цялото време и да се използват неравномерни мрежи в околност на максимума на решението. Числените експерименти показват втори ред на сходимост на схемите. Изследвано е запазването или промяната на структурата на решенията с времето в 1D и 2D случаите в зависимост от скоростта на солитоните.

Работите B15 и B16 са по същество посветени на пресмятането на положителните радиално-симетрични решения на полулинейни уравнения на Поасон със степенни нелинейности. Процедура, устойчива относно грешките от закръгляванията, се състои в свеждане на задачата до решаване на система ОДУ, за която се прилага методът на стрелбата в съчетание с метода на Рунге-Кута с четвърти ред на точност. С помощта на тази процедура е пресметната КЕК за двумерното УБ при нелинейност $f(u) = u^2$. Пресмятането на тези КАК дава предварителна информация за поведението на решенията на УБ.

Ще спомена и петте работи на доц. Кольковска, които са встрани от основната тематика в останалите работи, но показват разностранните интереси и възможности на кандидатката. Много силни математически резултати има в работите A1 и A2, посветени на задачите за пресмятане на логаритмичния потенциал от двоен слой и на обемен потенциал, които възникват при използване на метода на граничните елементи. Две приложни задачи – процес на ръст на кристали в многокомпонентни системи и изследване на модела на електрично поле около върха на атомно-силов микроскоп, са изследвани в работи A3 и B2 съответно.

Както се вижда от изложеното до тук, работите на доц Колковска, **представени за конкурса, съдържат много значими научни резултати, които касаят математическите модели на различни реални процеси и методите за тяхното изследване. Възможностите за използване на тези резултати при изследване на реалните процеси определят и приложния им характер. Авторската справка отразява правилно приносите на кандидатката.**

4. Отражение на резултатите на кандидата в трудовете на други автори. Доц. Кольковска е приложила списък с общо 60 цитирания на 18 работи от общия списък на публикациите си, като поне 30 от цитиранията са на работи, представени за конкурса. Работи [A3] и [A5] са цитирани по 8 пъти, работи [A6] и [B6]– по 5 пъти.

5. Принос на кандидата в общите публикации. Считам, че приносът на Наталия Кольковска е равностоен с този на съавторите и'.

6. Критични бележки и препоръки – нямам, освен направените в процеса на изложението.

7. Лични впечатления. Познавам Наталия Кольковска от постъпването и' в ИМИ през 1973 г., като колега от сектор Математическо моделиране. Работили сме в течение на няколко години и в Математическия колектив „Избори”. Наталия е много прецизна в работата си, стриктна и добронамерена в отношенията си с колегите.

<u>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</u>.

Оценката ми за цялостната дейност на доц. Наталия Тодорова Кольковска – научна, научно-приложна и преподавателска - е <u>положителна</u>. Тя отговаря на съвкупността от критерии и показатели за заемането на академичната длъжност „професор” съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ.

Всичко това ми дава основание да предложа доц. Наталия Тодорова Кольковска да бъде избрана за „професор” по научна специалност „Изчислителна математика (числен и теоретичен анализ на нелинейни частни диференциални уравнения)".

20.09.2016 г. Подпис:

София / проф. д.м.н. Стефка Николаева Димова/