Р Е Ц Е Н З И Я

на проф. дмн Петър Русев по конкурса за професор по научната специалност 01.01.04 Математически анализ (Многомерен комплексен анализ), обявен от Института по математика и информатика на БАН в Държавен вестник брой 58/29 юли 2011г.

Единственният участник в конкурса, доц. дмн Николай Николов, е представил на CD (компакт-диск) 28 публикации, от които 2 самостоятелни и 26 в съавторство. С изключение на тези под номера 21 и 28 от техния списък, останалите са в областта на съвременния многомерен комплексен анализ. Трудовете с номера 2, 11, 19, 20, 21, 26, 27 и 28 не са били ангажирвани, както в предишни процедури, така и в дисертацията му за получаването на научната степен „доктор на математическите науки„ през 2010 г. Първите седем са отпечатани, а последният е приет за публикуване. Всички те са в съавторство.

Фундаментален факт, макар и тривиален, е че необходимо условие за бихоломорфна еквивалентност на две области G_1 и G_2 от пространството $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n), z_k \in \mathbb{C}, k = 1, \ldots, n\}$ е групите от аналитичните им автоморфизми да са изоморфни, т.е. да имат, накратко казано, една и съща геометрия. От теоремата на Риман за конформните изображения следва, че това е налице ако $n = 1$, а G_1 и G_2 са едносвързани области от $\mathbb{C}$, чийто граници съдържат повече от една точка. В началото на миналия век А. Поанкаре констатира, че това не е валидно ако $n = 2, G_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ и $G_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Несъмнено е, че този резултат става стимул за „раждането„ на идеи, които слагат началото на продължаващи и в наши дни интензивни изследвания оформили се в направление, което отдавна носи името геометрична теория на функциите на много комплексни променливи. Особено плодотворно се оказа въвеждането на бихоломорфно инвариантни метрики в области от $\mathbb{C}^n$, започнато още от А. Поанкаре за $n = 1$ и продължено от К. Каратеодори, Ст. Бергман и Ш. Кобаяши за $n \geq 2$. Приносите на Николов, резултат на дългогодишните му изследвания, са свързани с тези метрики, както и с въведени по-късно от различни автори аналогични метрики респ. псевдометрики и техни обобщения. Уместно е да се обърне внимание на факта, че в представените от него публикации се привлича главно съвременната лансирана от Л. Лемперт „технология„ за дефинирането им като инфинитезимални форми на съответни инвариантни функции. Изтъкнатите характеристики на трудовете на Николов са достатъчно основание за заключението, че усилията му в последните вече близо две десетилетия са били насочени в актуална област на математическия анализ, както по тематика, така и по отношение на използваните средства.

В представената от Николов авторска справка (АС) подробно са отразени приносите съдържащи се в дисертацията му за д.м.н., но за тези в публикациите с номера 2, 11, 19, 20, 26 и 27 от списъка на трудовете му, представени за участие в конкурса, са дадени по-скоро кратки анотации.

В публикацията [2]: Some Remarks on the Green Function and the Azukawa Pseudometric, *Monatsh. Math.* 142 341-350 (2004) основният резултат е **Theorem 1**, съгласно която за област $D \subset \mathbb{C}$ са в сила равенствата

$$(*) \qquad g_D = c_D^\infty, \quad A_D = \gamma_D^\infty$$

между функцията ѝ на Грийн с полюси в едно-точковите компоненти на $\mathbb{C} \setminus D$ и сингулярната функция на Каратеодори, както и между псевдометриката на Азукава и сингулярната псевдометрика на Каратеодори.

Ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ е хиперизпъкнала ако съществува отрицателна и нпрекъсната плюрисубхармонична функция u в D, такава че $\lim_{D \ni z \to \partial D} u(z) = 0$. В Section 4 на [2] е даден пример за такава област, в която равенствата $(*)$ не са валидни.

Публикацията [11]: Invariant Metrics and Distances on Generalized Neil Parabolas, *Michigan Math. J.* 55 (2007), 255-268 заслужава особено внимание. Вече са направени първите стъпки към дефинирането на разстояния и метрики и върху „комплексни многообразия с особености„, както някои автори наричат комплексните пространства. Класически пример за такова многобразие е Нейловата семи-кубична парабола, която в разглежданата публикация е дефинирана с $A_{2,3} = \{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : z^2 = w^3\}$, където $\mathbb{D}$ е единичният диск в $\mathbb{C}$. Обект на изследванията в нея са разстоянията на Каратеодори и Ш. Кобаяши, както и техни обобщения, върху многообразието $A_{m,n} = \{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : z^m = w^n\}$ с взаимно прости m и n, единствената особена точка на което е $(0, 0)$, дефинирани по обичайния начин с помощта на пръстена на холоморфните функции върху това многообразие, означен с $\mathcal{O}(A_{m,n}, \mathbb{D})$. Констатиран е интересният феномен, че разстоянието на Каратеодори върху $A_{m,n}$ е вътрешно само когато $m = 1$.

В увода на публикацията [19]: Lipschitzness of the Lempert and Green functions, *Proc. A;er. Math. Soc.* 137, 4 (2009), 2027-2036 е изтъкнато, че в цитираната в нея под номер [6] статия на С.Г. Кранц е установена локална (2/3)-хьолдеровост на псевдометриката на Кобаяши-Ройден на C^6- гладка строго псевдоизпъкнала област от $\mathbb{C}^n$. В [19] този резултат е обобщен като при достатъчно общи условия е доказана локалната липшицовост на функцията на Лемперт $l_D(z,w)$ респ. на метриката на Кобаяши (**Proposition 1.** - при единственото предположение че последната е „истинска„), на плюрикомплексната функция на Грийн (**Proposition 5.**) и като следствие - на метриката на Азукава (**Proposition 7.**).

В публикацията [20]: Upper bound for the Lempert function of smooth domains, *Math. Z.* (2010) 266: 425-430 е доказано (**Theorem 1.**), че за функцията на Лемперт $l_D(z,w)$ на $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$-гладка ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n(n \geq 1, \varepsilon > 0)$ съществува положителна константа c, такава че за всички z и w е изпълнено неравенството

$$(**) \qquad l_D(z,w) \leq 1 - c d_D(z) d_D(w),$$

а в случая $n = 1$ е посочен пример на $\mathcal{C}^1$-гладка област, за която $(**)$ не е валидно. Решаваща роля за получаването на този резултат играе твърдението наречено **Proposition 3.**, което има и самостоятелна стойност. То може да се характеризира като теорема за деформацията при редица от конформни изображения $f_j : \mathbb{D} \to G_j, j = 1, 2, \ldots$ на единичния диск в $\mathcal{C}^1$-гладки, ограничени и едносвързани области G_j, които клонят към областта $G \subset \mathbb{C}$ по „маниера„ на Каратеодори и чийто дефиниращи функции изпълняват изисквания, наречени от Николов условия за регулярност.

В публикацията [26]: Estimates for Invariant Metrics Near Non-semipositive Boundary Points, *J. Geom. Anal.* една $\mathcal{C}^2$-точка от границата на областта $D \subset\subset \mathbb{C}^n$, такава че рестрикцията на формата на Леви до тангенциалната хиперравнина в нея има само неотрицателни собствени стойности, е наречена полу-позитивна. В тази публикация се дискутира граничното поведение на познати инвариантни метрики в близост до точка, която не е полу-позитивна. За „улавянето„ на ръста им в нейна околност, е въведена новата инвариантна метрика $\hat{K}_D$ като най-голямата такава с псевдоизпъкнала индикатриса. Изтъкнато е, че са в сила неравенствата

$$(***) \qquad C_D \leq S_D \leq \min\{A_D, \hat{K}_D\} \leq \max\{A_D, \hat{K}_D\} \leq \hat{K}_D \leq K_D,$$

където C_D е метриката на Каратеодори, S_D - на Сибони, A_D - на Азукава и K_D - на Кобаяши-Ройден.

Основен резултат, валиден за всяко $n = 1, 2, 3, \ldots$ (**Proposition 1.**), е че ако областта $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ и $a \in \partial D$ не е полу-позитивна точка, тогава „близо„ до нея

$$S_D(z;X) \asymp \tilde{K}_D(z;X) \asymp \frac{|\langle \nabla d(z), X\rangle|}{d(z)^{1/2}} + |X|,$$

а от веригата неравенства (∗∗∗) следва, че тази оценка важи за A_D и $\hat{K}_D$. Аналогични по-прецизни резултати, отчитащи гладкостта на границата на областта D, са получени за метриката на Сибони при „нетангенциално„ приближаване към точка $a \in \partial D$ (**Proposition 2.**), както и за метриката на Кобаяши-Ройден за области от $\mathbb{C}^2$ при допълнителни условия за начина на приближаване към точка от ∂D, която не е полу-позитивна (**Proposition3.**, **Proposition 4.**).

В Раздел 4 **Properties of the New Pseudometrics** са получени резултати за метриката $\hat{K}_D$, отнасящи се до поведението ѝ при холоморфни изображения и свойството декартовост, доказано е че тя е полу-непрекъсната отгоре за произволна област от $\mathbb{C}^n$ (**Proposition 10.**) и е непрекъсната ако $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ е псевдоизпъкнала област (**Proposition 11.**).

Един от основните изводи в статията [27]: **Two-dimensional slices of non-pseudoconvex open sets**, *Math. Z.* е, накратко казано, обобщен критерий за псевдоизпъкналост, съгласно който едно отворено множество с $\mathcal{C}^2$-гладка граница в $\mathbb{C}^n (n \geq 3)$ е псевдоизпъкнало тогава и само тогава, когато всяко негово сечение с двумерна комплексна равнина през началото е псевдоизпъкнало (**Теорема 20.** от АС).

Изтъкнатите по-съществени резултати, получени след защитата на дисертацията му за дмн, убедително демонстрират континюитета на идейните и технически възможности на автора им за „атакуване„ на нови проблеми в областта на инвариантните метрики.

Освен в научно-изследователска дейност, намерила израз досега в 53 публикации в наши и чужди реномирани списания и други издания, Николов вложи значителна енергия в публикуването като автор и съавтор на 11 научно-популярни книги и едно научно-методическо пособие, на 27 научно-методически статии у нас и на 6 - в чужбина, както и на 46 научно-популярни статии. Тази негова изява отразява най-вече активната му дейност като член на Екипа за извънкласна работа по математика при СМБ, Председател на Националната комисия за провеждане на олимпиадите и състезанията по математика (9-12 клас) към МОМН (2008 -), както и авторството на повече от 200 задачи за Националните състезания и олимпиади и на 10 задачи за Балканските и Международните олимпиади по математика.

Независимо от ангажиментите с подготовката за участието ни в Международни олимпиади, изразяващи се в целогодишни лекции пред националните отбори по математика както и в математически гимназии от 1995 г насам, в четенето на лекции на летните изследователски школи на УчИМИ при ИМИ на БАН, Николов има участие и в образованието по математика във ФМИ на СУ като ръководител на упражнения по дисциплините математически анализ и комплексен анализ.

Богато и интензивно е участието на Николов в областта на международното научно сътрудничество. В рамките на един непродължителен период от време той е бил гост на: МИ „Стеклов„ на РАН (1997, 2007), Университета в Любляна (2005), Сабанчи Университет в Истанбул (2007), Университета в Билефелд (2010), Ягелонския Университет в Краков (март 2002, септември 2002, февруари 2003, октомври 2003, февруари 2005, ноември 2005, октомври 2006), Международния институт по математическа физика „Ервин Шрьодингер„, Виена (Семестри по комплексен анализ и $\bar{\partial}$-задачата - 1999, 2005, 2009). Във всички случаи е изнасял донлади отразяващи негови постижения, както и обзори върху съвременни проблеми в направлението на научните му интереси.

Особено плодотворни са престоите му съпроводени и с участия в международни научни проекти в:

Университета „Пол Сабатие„, Тулуза: декември 2005 - EGIDE проект, май - юни 2007 (гост-профеор с кратък лекционен курс), CNRS проекти (януари и октомври 2008, май 2009 и ноември 2010), юни 2010 - гост-професор.

- Университета „Карл фон Осиецки„, Олденбург: DAAD проекти (ръководител от българска страна: ноември 2001 - януари 2002, ноември-декември 2004, ноември 2009-януари 2010); DFG проекти (януари 2003, май 2004, септември-октомври 2004, януари-март 2006, ноември-декември 2006, октомври 2007, ноември-декември 2008, февруари-март 2011).

- Университета в Краков: Международна Ph.D. програма "Geometry and Topology in Physical Models" - координатор от българска страна и ръководство на докторантура.

Влиянието на високото научно ниво на институциите в които е пребивавал Николов, способността за установяване на персонални и научни контакти, както и изключителното му трудолюбие, за кратко време го правят желан сътрудник и не само равностоен, но и водещ съавтор на научни разработки, плод на които са многобройните му съвместни публикации с изтъкнати експерти в областта на инвариантните метрики каквито са П. Пфлуг от Университета в Олденбург, П. Тома от Университета в Тулуза и В. Звонек от Университета в Краков.

От общо 52 публикации на Николов, 35 са в списания със сумарен IF (импакт-фактор) 20,690. От представените за участие в конкурса публикации, 24 са в списания със сумарен IF 17,162. Тези от тях, осем на брой, които са след защитата на дисертацията му за дмн, са в списания със сумарен IF 5,739. За научното ниво на трудовете на Николов красноречиво говори и факта, че не малка част от тях са публикувани в чуждестранни реномирани списания, някои от които с много висок международен рейтинг, като напр. *Acta Math. Hung.*, *Arch. Math.*, *Ann. Polon. Math.*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *Complex Variables*, *Monatsh. Math.*, *Ann. Mat. Pura et Appl.*, *Mich. Math. J.*, *Can. Math. Bull.*, *J. Math. Anal. Appl.*, *Math. Z.*, *Math. Ann.*,*Trans. Amer. Math. Soc.*

Досега Николов е констатирал общо 58 цитирания на негови трудове респ. резултати, от които 26 в 17 публикации в списания с импакт-фактор, 10 в 2 монографии и 6 в 5 дисертации. Има общо 33 цитирания на публикациите представени за участие в конкурса. от които 16 в 11 статии в списания с импакт-фактор, 4 в 2 монографии и 3 в 3 дисертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. От документите представени от Николов става ясно, че са налице условията на Правилника на ИМИ за заемане на длъжността „професор„ с изключение на изискването за наличие на защитили докторанти. Това се компенсира преди всичко от безспорният авторитет, извоюван от него за приносите му в областта на съвременния многомерен комплексен анализ. Безспорно е и активното му участие в международния научен обмен, което заслужено му отреди челно място в изследванията в областта на инвариантните метрики. Безспорна е и заслугата му за подготовката на наши участници за завоюване на отличия в редица международни математически олимпиади. Всичко това е достатъчно основание за категоричното ми мнение, че доц. дмн Николай Николов заслужава да заеме длъжността „професор„ в ИМИ на БАН.

София, 21 декември 2011 г

Рецензент:

(Проф. П. Русев)