Р Е Ц Е Н З И Я

по конкурса за професор в област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика: професионално направление 4.5 Математика по: 01. 01. 04 математически анализ(многомерен комплексен анализ), обявен в "Държавен вестник бр. 58/29.07.2011 г. с единствен кандидат доц. дмн Николай Маринов Николов

Рецензент: проф. дмн Олег Мушкаров

1. Николай Николов е роден на 24.08.1969г. в гр. Шумен. През 1992 г. той завършва Факултета по математика и информатика на СУ, през 2000 г. получава научната и образователна степетн "доктор"с дисертация на тема "Локализация ,устойчивост и гранично поведение на инвариантни метрики а през 2010г. му е присъдена научната степен дмн с дисертация на тема "Инвариантни функции и метрики в комплексния анализ". От 1993 г. той е последователно математик и н.с III,II и I ст. , а от 2003 г. е съответно ст.н.с. II ст. и доцент в ИМИ на БАН. Бил е и хоноруван асистент в ФМИ на СУ.
2. За участие в конкурса Н. Николов е представил 28 научни статии, като 20 от тях са основа на докторската му дисертация. Работите [2,11,19,20,21] и [26,27,28] са написани съответно преди и след получаването на научната степен дмн.

Основните научни интереси на Н. Николов са в областта на многомерния комплексен анализ и по-конкретно в теорията на инвариантните функции и метрики. Преобладаващата част от неговите изследвания са посветени на тяхното гранично поведение, получаване на точни оценки и използването им за изследване на геометричните и аналитични свойства на симетризирания полидиск, спектралното кълбо и $\mathbb{C}$- изпъкналите области в $\mathbb{C}^n$.

Ще отбележа, че инвариантните функции и метрики са фундаментални обекти в геометричната теория на функциите на много комплексни променливи, чието въвеждане и изучаване е предизвикано от липсата на аналог на класификационната теорема на Риман в едномерния комплексен анализ (още в началото на миналия век Поанкаре е отбелязал, че полидиска и кълбото в $\mathbb{C}^2$ не са бихоломорфно еквивалентни). Първите конкретни резултати, използващи инвариантни метрики са свързани с модела на Поанкаре на неевклидова геометрия, в който съществена роля играе метриката на Поанкаре, която е инвариантна при конформни изображения на единичния кръг. Обобщавайки лемата на Шварц-Пик в многомерния случай, Каратеодори (1927 г.) дефинира за всяка област в $\mathbb{C}^n$ т. нар. псевдоразстояние на Каратеодори, което е най-голямото разстояние в метриката на Поанкаре между образите на две точки от областта при всевъзможните холоморфни функции в единичния кръг. Скоро след това Ст. Бергман (1929 г.) въвежда нова инвариантна псевдометрика за области в $\mathbb{C}^2$, като за целта се използва пространството на интегруемите в квадрат холоморфни функции. Изключителен импулс за развитието на теорията се дължи на С. Кобаяши, който в 1967 г. въвежда инвариантна псевдометрика върху произволно комплексно многообразие, която се определя не чрез холоморфни функции, а чрез холоморфните дискове (холоморфни образи на единичния кръг в многообразието). По този начин бяха определени естествените граници, в които са разположени редица въведени по-късно инвариантни функции и метрики, отразяващи важни аналитични и геометрични свойства на разглежданите многомерни области и комплексни многообразия.

Добре известно е, че в геометричната теория на функциите на много комплексни променливи границата на областта играе ключова роля, което обуславя изучаването на граничното поведение на инвариантни функции и псевдометрики. По същество тази тематика започва своето развитие през 1965 г. в известната статия на Хьормандер за съществуване на априорни L^2-оценки за $\overline{\partial}$-задачата. С тяхна помощ той намира точното гранично поведение на ядрото на Бергман на строго псевдоизпъкнала област, като важността на информацията от този характер може да се илюстрира с много примери. Тук ще спомена само знаменитата теорема на Феферман(1974 г.) за гладко продължаване на бихоломорфни изображения, даденото от Бедфорд-Пинчук описание на ограничените изпъкнали области от краен тип с некомпактни групи от автоморфизми, както и резултатите на Райфен за неподвижни точки на холоморфни изображения. Доказателствата на тези важни и трудни резултати са базирани върху точни оценки за ядрото на Бергман и метриките на Каратеодори и Кобаяши.

3. Получените резултати от кандидата са в стила на споменатите по-горе изследвания, като част от тях обобщават и уточняват скорошни резултати на водещи специалисти. Нещо повече, в редица случаи те дават нови, по-концептуални и значително по-кратки доказателства на редица важни факти в многомерния комплексен анализ.

С две изключения, които ще коментирам накрая, представените работи за конкурса могат да се групират в три насоки.

В статиите [1,2,3,4,5,8,11,14,17,19,20,24,26] се изследват основни свойства на различни инвариантни функции и техните инфинитезимални форми .

Работите [14,19,20] са посветени на функцията на Лемперт. В [14] е доказано, че за произволно комплексно многообразие тя е полунепрекъсната отгоре, като основният резултат е, че ако метриката на Кобаяши на едно комплексно многообразие е непрекъсната и положителна в дадена точка и всеки ненулев допирателен вектор, то производните на функциите на Лемперт от произволен ред съществуват и са равни на съответните метрики на Кобаяши в точката. Тази теорема обобщава известни резултати на М. Панг и М. Кобаяши за монтелеви многообразия, като са приведени примери, които показват,че наложените условия в теоремата са съществени. В [19] е установена локалната липшицовост на функцията на Лемперт и плурикомплексната фунцкия на Грийн, както и на техните инфинитезимални форми – метриките на Кобаяши и на Азукава, за широки класове от области в $\mathbb{C}^n$, включващи строго псевдоизпъкналите области. За целта са използвани елементи от теорията на плурипотенциала. В [20] за гладки области са получени оценки отгоре за тази функция в термините на разстоянието до границата. В [26] е намерен точният ръст на различни инвариантни метрики около граничните точки на области, в които формата на Леви има поне една отрицателна собствена стойност.

Статията [17] е посветен на така наречените балансирани области. Те са естествено обобщение на пълните Райнхардови области, за които е възможно явно пресмятане на повечето инвариантни функции и метрики. Основната цел е намирането на връзки между разглежданите инвариантни обекти и функците на Минковски на тези области, а така също и на техните изпъкнали или холоморфно изпъкнали обвивки. В [8] е получен оптимален вариант на известен резултат на С. Кобаяши, като е доказано,че за всяка област в $\mathbb{C}^n$ метриката на Кобаяши-Буземан е равна на метриката на Кобаяши от ред $2n-1$ и ,че в общия случай това число е най-малкото. Този резултат дава положителен отговор на инфинитезимална версия на въпрос на Ст. Кранц. Целта на [9] е обобщаването на известна апроксимационно-интерполационна теорема на Готие-Хенгартнер и А. Нерсесян за множества на Аракелян в равнината. Полученият резултат играе съществена роля в [5], където е доказано, че за произволна област в $\mathbb{C}^n$ обобщената функция на Лемперт не намалява при добавяне на полюси. Тази теорема дава положителен отговор на въпрос на Фр. Викстрьом и е максимално общият резултат в тази насока, тъй като теоремата не е вярна за пространства с особености. Статията [3] е посветена на така нареченото декартово свойство на обобщената функция на Лемперт, като основната цел е опровергаването на една хипотеза на Д. Коман за съвпадане на обобщената функция на Лемперт и обобщената плюрикомплексна функция на Грийн на изпъкнали области при произволен краен брой полюси. Това следва от намереното необходимо и достатъчно условие за съвпадане на тези функции в случая на бидиск и полюси в декартовото произведение на две двуелементни подмножества на пробития кръг.

В статиите [1] и [4] се изследват въпроси за локализация на различни инварианти. В първата е доказана слаба локализация за ядрото и метриката на Бергман на равнинна област с неполярно допълнение, а във втората се отговаря на въпроса кога от локална монтелевост, хиперизпъкналост или пълнота следва, че те са изпълнени глобално. Намерено е и необходимо и достатъчно условие за хиперболичност на обобщени области на Хартогс, което отговаря положително на въпрос на М. Ярницки и П. Пфлуг.

В статиите [2,11,27] се изследват глобални въпроси. В първата е доказано, че т. нар. сингулярна функция на Каратеодори съвпада с функцията на Грийн на равнинна област, за която множеството от едноточковите свързани компоненти на допълнението е полярно. Доказано е още, че т. нар. сингулярна метрика на Кобаяши (в смисъл на Полецки) съвпада с метриката на Азукава върху произволно отворено множество в $\mathbb{C}^n$. Това обобщава (и същевременно коригира доказателството) на резултат на Ст. Нивош. Във втората статия са намерени явни формули за метриките на Каратеодори, Кобаяши, Каратеодори- Райфен и Кобаяши-Ройден на обобщените параболи на Нейл, които са комплексни многообразия с особености. Те са мотивирани от резултати на Кнезе за семикубичната парабола, като подходът на Николов е нов и е използван от Запаловски за получаване на аналогични формули в по-високи размерности. В третата статия е анализирана двумерната природа на свойството псевдоизпъкналост на отворено множество в $\mathbb{C}^n$ и е доказан интересният резултат, че в C^2-гладкия случай е достатъчно да се разглеждат само неговите сечения с 2-мерните комплексни равнини през началото. Конструиран е и пример, който показва, че резултатът не е верен ако гладкостта се нарушава даже само в една гранична точка.

Втората група статии [6,7,10,12,13,15,16,18,22,25] са посветени на изучаването на връзките между класове от области в $\mathbb{C}^n$, определени чрез различни понятия за комплексна изпъкналост, а също и от свойствата на техните инвариантни функции. Основна роля в тези изследвания играят симетризирания полидиск $\mathbb{G}_n$ (образът на единичния полидиск в $\mathbb{C}^n$ при изображението, чиито компоненти са елементарните симетрични функции) и спектралното кълбо Ω_n (множеството на nxn-матриците със спектрален радиус по-малък от 1). Тези две области се изучават интензивно през последните 10 години във връзка с решаване на интерполационни задачи с приложен характер, а така също и като моделни примери, илюстриращи неочаквани ефекти при прехода от две към повече комплексни променливи.

Ще отбележа някои от по-важните резултати в тези статии. В [6] е даден положителен отговор на въпрос на Пфлуг и Ярницки, като е доказано,че при $n \geq 3$ ядрото на Бергман на симетризирания полидиск $\mathbb{G}_n$ има нули. Доказателството на този резултат се базира на явна формула за ядрото на Бергман на $\mathbb{G}_n$, получена от Едигарян и Звонек в 2005 г. То е изключително технично, за което говори фактът ,че тези автори са успели да анализират само случая $n = 2$. Аналогични изследвания за нулите на метриката на Кобаяши-Ройден на спектралното кълбо са извършени в [16]. Мотивиран от резултат на Костара за симетризирания бидиск авторът доказва в [7], че симетризираният полидиск не само,че не е бихоломорфен на изпъкнала област, но и че не може да се изчерпи с области, които са бихоломорфни на изпъкнали. За целта той въвежда и изучава така наречените обобщени балансирани области, като характеризира геометрично тези, притежаващи горното свойство . В работите [13,18] се анализират три понятия за комплексна изпъкналост на области в $\mathbb{C}^n$, които са по-слаби от обичайната изпъкналост и по-силни от псевдоизпъкналостта. В случая на ограничена област с C^1-гладка граница тези три понятия съвпадат с т.нар. слаба локално линейна изпъкналост, като до скоро не беше ясно дали областите с последното свойство са псевдоизпъкнали (въпрос на Жаке от 2008г.). Кандидатът дава положителен отговор на този въпрос в [18]. В [13] основно внимание е отделено на $\mathbb{C}$-изпъкналите области, като за първи път симетризираният полидиск се свързва с това понятие, а не само с геометричната изпъкналост.Най-важният резултат на кандидата в тази насока е, че симетризираният бидиск е $\mathbb{C}$-изпъкнала област, докато при $n \geq 3$ симетризираният полидиск е линейно изпъкнал, но не е $\mathbb{C}$-изпъкнал. Доказано е също, че ако такава област не съдържа комплексна права, то тя е хиперизпъкнала и значи монтелева, което е обобщение на резултат на Барт за изпъкнали области. Друг неочакван ефект свързан с тези области е, че техните функции на Каратеодори и Лемперт съвпадат само при $n = 2$. Този резултат, доказан в [10], дава положителен отговор на въпрос на Ярницки и Пфлуг от 2005 г. и мотивира естествената хипотеза, че същото е в сила и за метриките на Каратеодори и Кобаяши. За нейното доказателство в [12] е разработен компютърен подход, като изчисленията потвърждават хипотезата при $n = 3$. Ще отбележа също резултатите на Николов в [15,22] посветени на прекъснатостта на метриките на Лемперт и Кобаяши на спектралното кълбо. Тези въпроси са важни, защото са свързани с възможността за редуциране на спектралните задачи на Неванлина-Пик и Кобаяши-Фейер до аналогичните задачи върху симетризирания полидиск [25]. В тях е получено описание на матриците, за които метриката на Лемперт е непрекъсната и метриката на Кобаяши се анулира. Като приложение в [24] е показано, че в общия случай метриката на Кобаяши на псевдоизпъкнала област не е равна на слабата производна на функцията на Лемперт, което дава частичен положителен отговор на въпрос на кандидата и Пфлуг в [14].

Редица изследвания на Николов са насочени към получаване на точни равномерни оценки за метриките на Каратеодори, Кобаяши, Бергман и ядрото на Бергман за $\mathbb{C}$-изпъкнали области в $\mathbb{C}^n$, която не съдържат комплексни прави, в термините на разстоянието до границата. Във важната статия [23] това се постига чрез използване на естествени геометрични методи, което упростява значително съответните доказателства. Основният извод от тези оценки е, че върху такива области горните метрики са сравними с точност до константи, зависещи само от размерността. Резултатите на Николов обобщават значително подобни оценки на Блумберг и Лидер за безкрайно гладки $\mathbb{C}$-изпъкнали области, които обаче зависят от областта. Нещо повече, използвайки съвършенно нови идеи той успява да отстрани съществени пропуски в по-ранни ранни работи на Чен и Макнийл върху изпъкнали области. Важно приложение на горните оценки е, че стандартните и линейните мултитипове на Д'Анжело и на Катлин съвпадат за гладка гранична точка на $\mathbb{C}$-изпъкнала област, което обобщава резултати на Конрад, Ю, Макнийл и Боас - Щраубе.

Статиите [21,28] са посветени на въпроси извън основната тематика на кандидата. В първата се разглеждат т. нар. супермедианни функция, които са обобщение на суперхармоничните функции и се характеризират със свойството,че стойността им във всяка точка е не по-малка от средната им стойност върху някаква окръжност с център тази точка. Доказано е, че при минимални изисквания за радиусите на тези окръжнсти, теоремата на Лиувил остава в сила и за супермедианните функции. Във втората статия е решена напълно една красива минимаксна задача, за сумата от степените на разстоянията до върховете на триъгълник от точка върху описаната окръжност и са намерени минимумът и максимумът на аналогичните суми за правилен n-ъгълник, когато точката се мени върху концентрична на описаната окръжност. Получените резултати уточняват и обобщават резултати на Столярски за частни случаи на тези суми.

В заключение ще отбележа, че в своите изследвания Н. Николов е преодолял значителни трудности от технически и идеен характер. Той използва практически целия апарат на съвременната геометрична теория на холоморфните функции на много променливи, а така също и голям брой най-нови резултати. Тяхното прилагане изисква на доста места тънко аналитично и геометрично чувство и отлично познаване на обширната литература по изследваните въпроси. Ще отбележа също, че в работите на Николов се дават не само окончателни отговори на въпроси на известни специалисти (Знаменский, Жаке, Пфлуг, Ярницки, Викстрьом, Макнийл, Щраубе и др.), но се поставят и нови интересни задачи, които отварят нови направления за изследване. В това отношение специално трябва да се отбележат тези свързанани със спектралните задачи на

Неванлина-Пик и Каратеодори-Фейер, геометрията на симетризирания полидиск и спектралното кълбо, $\mathbb{C}$-изпъкналите области и др.

4. От представените за конкурса 28 статии 27 са излезли от печат (3 след изтичане на срока на конкурса)и 1 е приета за печат в реномирани международни математически списания с много висок импакт-фактор, като J.Math.Anal.Appl.-1.174, Trans. Amer. Math. Soc.-1.1, Indiana Univ. Math. J.- 1,1, Math. Ann. -1.092, J. Geom. Anal.-0.978, Math. Z.- 0.819, Ann. Mat. Pura Appl.-0.818, Indiana Univ.Math. J.- 0.810, Monatsh. Math.- 0.764, PAMS-0.640, Ann. Scuola Norm. Pisa-0.571, Pacific J. Math.- 0.549, Integral Equations and Operator Theory-0.460, Michigan Math. J.-0.440, Math. Scan.-0.412. и др.

Н. Николов е представил справка за 33 цитирания на горните статии, от които 16 в списания с импакт-фактор. Според негова актуализирана справка, броят на цитиранията към настоящия момент е 36. Трябва да се отбележи, че резултати на Николов са използвани и/или цитирани от редица водещи специалисти в многомерния комплексен анализ, като Г. Херборт, А. Едигарян, Ф. Брачи, П. Пфлуг, М. Ярницки, М. Колар и др.

5. От представените за конкурса 28 статии 2 са самостоятелни. Считам,че приносът на кандидата в съвместните публикации е равностоен на останалите автори.

6. Н.Николов има общо 53 научни публикации в авторитетни международни научни списания, които са цитирани над 60 пъти. Ще отбележа, че след изтичането на срока на конкурса за печат са приети още 3 негови статии в PAMS, Indiana Math.J. и Math. Scand., а така също и неговата докторска дисертация в Dissertationes Matematikae. Николов е докладвал свои резултати на редица специализирани конференции и семинари по комплексен анализ в Австрия, Германия, Полша, Русия, Словения, Турция, Франция и др. Специално трябва да се отбележи получената покана за пленарен доклад на конференцията, посветена на 80 годишнината на Лу Ки-кенг в Пекин (2009 г.), като за съжаление визитата не се състоя по финансови причини. Ще отбележа също, че голяма част от изследванията на дисертанта са извършени в рамките на съвместни проекти с математици от водещи европейски математически центрове като CNRS, Института "Стеклов"и Института "Шрьодинген"и по линия на научните фондове DFG и DAAD. Той е координатор от българска страна на международната Ph. D. програма "Geometry and Topology in Physical Models"на Ягелонския университет в Краков, Полша.

В продължение на повече от 15 години Н.Николов работи много активно с талантливи ученици по математика. Той е член на Екипа за извънкласна работа по математика към СМБ и на журитата на националните състезания и олимпиади по математика и на конференциите на УчИМИ. Бил е зам. ръководител и ръководител на българския отбор за Балканската олимпиада по математика (1999 - 2003),зам. ръководител (2004 - 2008) на българския отбор за Международната олимпиада по математика, като от 2009 г. е негов ръководител. Николов е автор на 12 книги и учебни пособия, 33 научно-методически и 46 научно-популярни статии.

Той е член на Управителния съвет на СМБ и е носител на следните награди:

награда на ИМИ - БАН (2000), Академична награда "Марин Дринов"(2001), награда на Съюза на учените в България (2005).

Заключение. Считам, че Николай Николов е изграден учен със съществени приноси във важни и трудни области на многомерния комплексен анализ. Негови резултати са използвани и високо оценени от редица световно известни математици. Всичко това заедно с неговата активна и високо квалифицирана преподавателска и експертна дейност ми дават основание убедено да препоръчам на членовете на почитаемото жури и на Научния съвет на ИМИ да гласуват положително за избора за "професор"на доц. дмн Николай Маринов Николов.

14.12.2011 г. Подпис:

(Олег Мушкаров)