АВТОРСКА СПРАВКА

за публикациите на Николай Василев Живков, представени на конкурса за професор, обявен на 22.05. 2012., ДВ брой 39.

За участие в конкурса са представени 24 статии от които 22 научни статии и 2 научно-приложни. От представените статии 23 са публикувани, а една е представена за публикуване, 14 статии не са представяни на предишни конкурси или процедури за присвояване на научни степени или звания, това са статиите [11-24]. 12 от статиите са самостоятелни и 12 са в съавторство с един или повече съавтори. Статиите [1-15], [17], [19-20] и [23] са представени на хартиен носител, статиите [11], [13-22] и [24] са на електронен носител (CD диск).

Научно-Изследователски Публикации.

По-голямата част от публикуваните статии са посветени на изследване на свойствата на многозначното изображение метрическа проекция. Това е изображение, което при фиксирано (затворено) множество M в метрично или нормирано пространство X на всеки елемент $x \in X$ съпоставя най-близките му спрямо метриката (нормата) на X. По такъв начин, многозначното изображение метрическа проекция се дефинира в общия случай чрез решенията на нелинейни оптимизационни задачи от специален вид. Основно място в изследванията на автора е отделено на структурните свойства на оператора метрическа проекция и на въпроси свързани с еднозначност и коректност на решенията.

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е реално банахово пространство, а $A \subset X$ е непразно (затворено) множество. При зададено $x \in X$, апроксимационната задача породена от (x, A) е следната оптимизационна задача: Да се намери $a \in A$, така че $\|x - a\| = \inf\{\|x - y\| \colon y \in A\} =: d(x, A)$. Тук с $d(x, A)$ сме означили функцията разстояние, определена от множеството A. Решенията на тази задача дефинират многозначното изображение $P_A \to A$ метрическа проекция:

$$P_A(x) = \{a \in A \colon \|x - a\| = d(x, A)\}, \quad x \in X.$$

Един от въпросите, предизвикващ интерес през последните близо 50 години, е колко е голямо множеството на немногозначност на метрическата проекция, т.е. множеството

$$Q_P(A) = \{x \in X \colon P_A(x) = \emptyset \text{ или } P_A(x) \text{ е еднозначно}\}.$$

Въпросът естествено е интересен при предположението за строга изпъкналост на единичната сфера на пространството, т.е. $S_X = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$ не съдържа отсечки. Според класическата хипотеза на Стечкин [St], допълнението на $Q_P(A)$ е множество от първа категория на Бер за всяко строго изпъкнало банахово пространство. Еквивалентно казано, $Q_P(A)$ трябва да съдържа гъсто G_δ подмножество на X и следователно може да бъде разглеждано като голямо множество от гледна точка на категориите на Бер. Тази хипотеза е потвърдена най-напред от Стечкин за класа на локално равномерно изпъкналите банахови пространства, а в последствие е доказана и за други класове пространства в работи на Зайчик [Zaj_1], Лау [Lau_2], Конягин [Ko_1], [Ko_2], [BoFi].

На този въпрос са посветени изследванията на автора в [1-2], [4], [6-7]. Доказва се, че хипотезата е вярна за строго изпъкнали слабо компактно породени пространства както и за строго изпъкнали асплундови пространства. В споменатите работи на автора са опитани два подхода: Единият е топологичен и въвлича свойства на полунепрекъснатост на многозначни изображения [1-2], а другият е аналитичен - използва свойствата на едно въведено от автора субдиференциално изображение, заемащо междинно положение в сравнение със субдиференциала на Кларк [Cl] и ε-опорния субдиференциал на Екеланд и Лебург [EkLe], в [4],[6],[7]. В последните три работи се доказват и резултати за диференцируемост по Гато върху гъсти G_δ множества на едностранно диференцируеми непрекъснати изображения. В [6] е получена характеризация на асплундовите пространства, която позволява като следствие от основния резултат в [7] да се докаже теоремата: В строго изпъкнало банахово пространство, съдържащо като гъсто подмножество непрекъснат линеен образ на асплундово пространство е в сила хипотезата на Стечкин. По-късно (през 1991) Фабиан и Прайс [FaPr] получиха обобщения на резултатите в [6], за подпространства на пространства със споменатото свойство. Техният резултат е най-общият известен към момента по отношение на хипотезата на Стечкин.

Аналогичният въпрос, касаещ многозначното изображение $F_A \to A$ метрическа антипроекция (A е непразно, ограничено и затворено) е третиран в [1-2],

$$F_A(x) = \{a \in A\colon \|x-a\| = f(x,A)\}, \quad x \in X, \quad f(x,A) = \sup\{\|x-y\|\colon y \in A\}.$$

Изследвания за метрически антипроекции, посветени на изучаване на свойствата на множества на еднозначност (или немногозначност) са правени например в [Ed], [As], [Bl], [Lau_1], [PK].

Усиления на проблема, поставен от Стечкин са търсени в две направления. Най-напред да се иследва от аналогична гледна точка подмножеството на $Q_P(A)$ на добре поставените апроксимационни задачи. Наредената двойка (x, A) дефинира добре поставена апроксимационна задача ако минимизационният проблем, породен от множеството A и функцията $\|x - \cdot\|$ е коректно (добре) поставен по Тихонов [Ty]: това означава функцията $\|x - \cdot\|$ да има единствен минимум a_0 към който да се стреми всяка минимизираща редица, т.е. всяка редица $(a_n) \subset A$ за която $\|x - a_n\| \to d(x, A)$. Означаваме това множество с

$$T_P(A) = \{x \in X\colon (x,A) \text{ е добре поставен}\}.$$

От друга страна се правят изследвания относно “големината” на множествата $Q_P(A)$ и $T_P(A)$. Основания за прецизиране на понятието голямо (малко) е обстоятелството, че категориите на Бер не дават достатъчно аргументирано основание за определяне на едно множество като голямо. Класическа илюстрация е добре известният пример на декомпозиране на реалната права на две непресичащи се множества, едното от първа категория на Бер, а другото с лебегова мярка 0. Добре известен кандидат за по-прецизно определяне на голямо (малко) множество е понятието поресто и σ-поресто множество.

Подмножеството $C \subset X$ наричаме *поресто* в X ако за всяко $x \in C$ съществува константа $\lambda(x) \in (0,1)$ и положително число $r_0(x)$, така че за всяко $r \in (0, r_0(x)]$ съществува $y \in X$ удовлетворяващо свойството $B(y, \lambda(x)r) \in B(x,r) \setminus C$, където $B(z,t)$ е отвореното кълбо в X с център z и радиус $t > 0$. Множеството C наричаме σ-поресто, ако то може да се представи като изброимо обединение на порести множества [Zaj_2].

Усиление на това понятие [Zaj_3] е следното: При дадени $v \in S_X$ и $c \in (0,1)$ да означим с $K(v,c)$ конусът $\cup_{\mu>0}\mu B(v,c)$. Ще наричаме C *конусно подпряно* в $x \in C$ ако съществуват $r_0 > 0$, $v \in S_X$, и $c \in (0,1)$ така че $C \cap B(x, r_0) \cap \{x + K(v,c)\} = \emptyset$. Ще наричаме C конусно подпряно, ако то е конусно подпряно във всяка негова точка и ще наричаме C σ-конусно подпряно, когато C се представя като обединение на изброимо много конусно подпряни множества. Класът на σ-конусно подпряните множества е значително по-малък от класа на порестите множества. В реалната права, например, всяко σ-конусно подпряно множество е изброимо, докато в $\mathbb{R}$ има неизброими σ-порести множества.

В [BMP] де Влази, Мияк и Папини доказват, че ако X е равномерно изпъкнало банахово пространство, то множеството $T_P(A)$ има σ-поресто допълнение. Да означим $W_P(A) = \{x \in X \colon P_A(x) = \emptyset$ или (x, A) е добре поставена$\}$. Основният резултат в съвместната работа [19] на Ревалски с автора е:

Теорема 1. [19] *Нека X е локално равномерно изпъкнало банахово пространство, а $A \subset X$ е затворено. Тогава множеството $X \backslash W_P(A)$ е σ-конусно подпряно.*

От тази теорема се получават някои следствия, например ако A е проксиминално подмножество (метрическата проекция има непразни образи) на локално равномерно изпъкнало банахово пространство X, то множеството $T_P(A)$ има σ-конусно подпряно допълнение в X. Получават се като следствия и известни теореми на Ердьош [Er], Конягин [Ko_1] и Зайчек [Zaj_1].

В [19] са построени примери, показващи необходимостта от условията на основната теорема, така например твърдението не е в сила за пространство, което не е локално равномерно изпъкнало. Показано е на основата на пример на Кли [Kl], че в теоремата на де Блази, Мияк и Папини условието за σ-пористост не може да се замени със σ-конусна подпряност.

Работата [21] е продължение на [19] в което се изследват структурните свойства на множествата:

$$K_P(A) = \{x \in X \colon A \text{ е апроксимативно компактно в } x\},$$

$$V_P(A) = \{x \in X \colon P_A(x) = \emptyset \text{ или } A \text{ е апроксимативно компактно в } x\}.$$

Припомняме, че метрическата проекция P_A е апроксимативно компактна в $x \in X$ ако всяка минимизираща разстоянието от x до A редица има сходяща подредица с граница в A. Резултатите в [21] са следните

Теорема 2. [21] *Нека X е компактно локално равномерно изпъкнало банахово пространство, а A е непразно затворено подмножество в X. Тогава $X \setminus V_P(A)$ е σ-конусно подпряно.*

Теорема 3. [21] *Нека X е компактно равномерно изпъкнало банахово пространство, а A е непразно затворено подмножество в X. Тогава $X \setminus_P(A)$ е σ-поресто.*

Теорема 2 обобщава резултат на Конягин в [Ko_2], а Теорема 3 резултата на де Влази, Мияк и Папини в [BMP].

В [22] се разглеждат различни аспекти на (β)-свойството на Ролевич [Ro_1], [Ro_2], за банахови пространства. Доказва се, че дефинираното в [21] свойство на компактно равномерно изпъкнало пространство съвпада изометрически с (β)-свойството. Като следствие от това и от известни резултати [Ku_1], [MoTo], [Ku_2], [Ku_3], се получава че основният резултат в [21] за метрически проекции обобщава не само изометрически аналогичната теорема от [BMP], но и изоморфно, т.е. компактно равномерно изпъкналите банахови пространства са изоморфно по-общ клас от равномерно изпъкналите.

В [22] са построени нови примери на пространства с (β)-свойството на Ролевич и са изследвани техните свойства. Получена е оценка за (β)-модул за класове пространства, удовлетворяващи (β)-свойствотото.

Получена е любопитна характеризация на (β)-свойството в термините на тория на графите, а именно, (β)-свойството може да бъде дефинирано чрез фамилии от локално-крайни графи.

Един друг въпрос, свързан с хипотезата на Стечкин и разглеждан най-напред от Замфиреску [Zam_1] е следният: Ако за всяко затворено множество на едно равномерно изпъкнало банахово пространство X, например, е в сила, че за резидуално подмножество Γ на пространството X, метрическата проекция е еднозначна, то какво можем да кажем за големината или структурата на множеството $X \setminus \Gamma$ от точки в които тя не е еднозначна. Замфиреску забелязва за крайномерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ любопитния феномен: Нека $\mathsf{K}(\mathbb{R}^n)$ е пространството на компактите снабдено с хаусдорфовата метрика $\hbar$ между множествата

$$\hbar(A_1, A_2) = \max\{\max_{x \in A_1} d(x, A_2), \max_{x \in A_2} d(x, A_1)\}.$$

Тогава за повечето (спрямо категориите на Бер) компактни множества в $\mathsf{K}(\mathbb{R}^n)$ метрическата проекция е многозначна за точките на гъсто подмножество на $\mathbb{R}^n$. Този резултат на Замфиреску предизвиква интерес и е последван от редица изследвания и обобщения, напр. [BM_1], [BKM], [BM_2], [BM_3], както за различни класове банахови пространства, така и за различни класове от подмножества в тези пространства, а също така и отнесен към метрически антипроекции. На този въпрос са посветени изследванията в работите [10-17].

Докато общите резултати показват съществуване на множества за които метрическата проекция (съответно антипроекция) е гъсто нееднозначна, то те не дават отговор на въпроса: как да се построи множество с това свойство. В [10] и [11] се построяват конструктивно такива множества. Във всяко строго изпъкнало банахово пространство X, $\dim X \geq 2$, има локално свързани континууми (континууми на Пеано), такива че по отношение на коя да е еквивалентна норма в X, тези континууми задават навсякъде континуално многозначни метрически проекции, т.е. в произволно непразно отворено подмножество U на X има поне континуум елементи от U за които метрическата проекция е нееднозначна. В [11] се показва още, че съществуването на тези континууми на Пеано не може да бъде доказано с категорен подход за пространство от затворени множества. Изчислява се и тяхната хаусдорфова размерност.

В [13] се доказва:

Теорема 4. [13] *Нека X, $\dim X \geq 2$, е строго изпъкнало банахово пространство. Тогава съществува гъсто G_δ подмножество U на пространството на компактите $\mathsf{K}(X)$, снабдено с хаусдорфовата метрика, така че за всяко $A \in \mathsf{U}$ както метрическата проекция, така и метрическата антипроекция, спрямо коя да е еквивалентна строго изпъкнала норма в X са навсякъде континуални.*

По-късно този резултат бе обобщен от Колар [Kol] за σ-поресто допълнение на A, чрез използване на същата конструкция от [13].

В [12] се правят разглеждания за класа на равномерно изпъкналите банахови пространства. Във всяко такова пространство X съществува резидуално подмножество на пространството $\mathsf{B}(X)$ от затворените и ограничени множества в X, за множествата от което метрическата проекция е двузначна и полунепрекъсната отгоре навсякъде континуално, т.е.

Теорема 5. [12] *Нека X, $\dim X \geq 2$, е равномерно изпъкнало банахово пространство. Тогава съществува резидуално подмножество U на пространството $\mathsf{B}(X)$ на затворените ограничени подмножества в X, относно хаусдорфовото разстояние, такова че за всяко $A \in \mathsf{U}$ метрическата проекция P_A е двузначна и полунепрекъсната отгоре в гъсто навсякъде континуално подмножество на X.*

В същата работа е разгледан и въпросът за съществуване на елементи на най-добро приближение за точките лежащи на равноотстоящи хиперповърхнини спрямо две затворени множества A_1 и A_2 и е показано, че в резидуални подмножества на такива хиперповърхнини метрическите проекции P_{A_1} и P_{A_2} са еднозначни и полунепрекъснати отгоре.

За класа на сепарабелните строго изпъкнали банахови пространства е в сила:

Теорема 6. [14] *Нека X, $\dim X \geq 2$, е сепарабелно строго изпъкнало банахово пространство. Тогава в пространството $\mathsf{B}(\mathsf{X})$ на ограничените и затворени подмножества на X, снабдено с хаусдорфовата метрика, съществува резидуално подмножество Γ такова че за всяко $A \in \Gamma$ метрическата проекция P_A е двузначна и полунепрекъсната отгоре в гъсто навсякъде континуално подмножество на X.*

Интерес представлява въпросът за структурата на множествата от точки в които метрическата проекция (съответно метрическата антипроекция) има фиксиран брой елементи (т.е. фиксирана кардиналност). Нека A е затворено, съответно затворено и ограничено, подмножество на банахово пространство X, а P_A, съответно F_A, е метрическата проекция, съответно антипроекция, породена от A. Множествата

$$L_P^n(A) = \{x \in X : \mathrm{card} P(x, A) = n\},$$
$$L_F^n(A) = \{x \in X : \mathrm{card} F(x, A) = n\},$$

наричаме n-местни множества (или n-локуси) за P_A, съответно за F_A.

Свойствата на тези множества най-напред са изследвани в [BZ] в случая на метрически проекции и в [B] за антипроекции. В работата [15] се дефинират и разглеждат общите локуси, т.е. множествата

$$C^{n,m}(A) = L_P^n(A) \cap L_F^m(A), \quad n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \geq 2.$$

Доказва се

Теорема 7. [15] *Нека X е крайно-мерно евклидово или безкрайномерно сепарабелно хилбертово пространство. Тогава в пространството на компактните множества $\mathsf{K}(X)$ в X за всеки $n, m \in \mathbb{N}$ за които $n+m-2 \leq \dim X$, съществува резидуално подмножество $\mathsf{R}^{n,m}$ такова че за всяко $A \in \mathsf{R}^{n,m}$ множеството $C^{n,m}(A)$ е гъсто в X.*

От този резултат можем да получим като следствие твърдението: В крайномерно евклидово (или хилбертово) пространство X типичния компакт A (в смисъл на категориите на Бер) разбива пространството на крайната редица от гъсти множества: $C^{1,1}(A)$ е гъсто G_δ, множествата $C^{n,m}(A)$ са навсякъде континуални, при $2 < n + m < \dim X + 2$, а $C^{n,m}(A)$ е гъсто при $n + m = \dim X + 2$.

В [16] се изучават m-локусите на метрически антипроекции, породени от изпъкнали компактни множества. Основният резултат е

Теорема 8. [16] *Нека X е безкрайномерно сепарабелно хилбертово пространство. Съществува резидуално подмножество $\mathsf{R}_\mathbf{c}$ на пространството $\mathsf{C}(X)$ на изпъкналите компакти, такова че за всяко $A \in \mathsf{R}_\mathbf{c}$ множествата $L_F^m(A)$ са навсякъде континуални в X, $m \geq 2$, като върху тях метрическите антипроекции са полунепрекъснати отгоре.*

В [17] имаме за локусите на метрическите проекции следния резултат, доказан при допълнителното предположение за гладкост (диференцируемост по Гато) на нормата

Теорема 9. [17] *За типичните компакти A от $\mathsf{K}(X)$ (в смисъл на категориите на Бер), където X е безкрайномерно строго изпъкнало гладко банахово простванство, множествата $L_P^n(A)$, $n = 2, \ldots,$ са гъсти в X.*

В работите [15-17] основен инструмент се явява теоремата на Миранда [Mi], която е еквивалентна на теоремата на Брауер за неподвижна точка.

В ранните работи [3] и [5] се разглежда една специфична задача за метрически проекции: апроксимиране на изпъкнали равнинни компакти с многоъгълници относно хаусдорфовото разстояние между множествата. Тази тематика, инициирана от Акад. Сендов [Se] бе популярна в нашата страна. В [5] чрез понятието алтернансен многоъгълник, използвано от В. Попов [Po], П. Кендеров [Ke], Р. Иванов [Iv], П. Георгиев [Ge], М. Неделчева [Ne] бе получено едно необходимо условие за минимум, което превежда на геометричен език условие за локален екстремум на функцията, съпоставяща на всеки единичен вектор v в равнината разстоянието между приближавания компакт и алтернансния многоъгълник със страна перпендикулярна на v.

В [8] се разглеждат приближени непрекъснати селекции на метрически проекции. Направена е характеризация на рефлексивните пространства чрез свойството: крайно-полунепрекъснатите отдолу метрически проекции, породени от изпъкнали проксиминални множества допускат приближени непрекъснати селекции. Даден е също така отрицателен отговор на въпрос на Дойч чрез построяване на пример на почти-полунепрекъсната отдолу метрическа проекция, породена от тримерно подпространство на петмерно нормирано пространство за която няма непрекъсната селекция. Отрицателен отговор на същия въпрос бе получен независимо и от А.Л. Браун [Br].

В [9] се характеризират класове метрични пространства за които различни дефиниции за коректност на оптимизационни задачи съвпадат.

По различен характер имат изследванията в следващите работи:

В съвместната статия [18] на Ф. де Блази с автора се изучава едно свойство, първоначално забелязано от Т. Замфиреску [Zam_2] (и наречено от него гъсто-затъмняващо свойство) на компактните множества в крайномерни пространства.

Ако означим с $\mathsf{B}(X)$, $\mathsf{K}(X)$ и $\mathsf{C}(X)$ пълните метрични пространства, съответно на затворените и ограничени, на компактните, и на изпъкналите компактни подмножества на банаховото пространство X относно хаусдорфовото разстояние между множествата в X, то в сила са следните твърдения:

Теорема 10. [18] *Нека X е сепарабелно банахово пространство, а $\mathsf{P}(X)$ е кое да е от изброените по-горе метрични пространства от множества. Тогава за повечето (в смисъл на категориите на Бер) елементи A на $\mathsf{P}(X)$ и за повечето (пак в смисъл на категориите на Бер) точки $x \in A$ е вярно, че обединението на лъчите от x, които пресичат $A\setminus\{x\}$ е гъсто множество в X.*

От друга страна, за множествата от лъчи, непресичащи типични множества имаме

Теорема 11. [18] *За повечето $A \in \mathsf{B}(X)$ и за всички $x \in X$, обединението на лъчите от x, които не пресичат $A\setminus\{x\}$ е резидуално подмножество на X.*

С помощта на Теорема 10 получаваме безкрайномерно обобщение на известната теорема на Виакер [Wi], а именно че повечето компакти в сепарабелно банахово пространство имат гладки изпъкнали затворени обвивки. При доказателството на тези резултати е използван по-различен подход, който прилага параметричен вариант на теоремата на Куратовски - Улам.

Теорема 12. [18] *Нека X е метрично пространство на Бер, а Y е сепарабелно метрично пространство на Бер. Нека $F : X \to Y$ е полу-непрекъснато отдолу многозначно изображение с непразни образи чийто граф $G_F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ е също пространство на Бер. Тогава ако $Z \subset G_F$ е никъде гъсто* *подмножество на G_F, то съществува резидуално множество $R \subset X$ такова че за всяко $x \in R$ сечението $Z(x) = Z \cap (\{x\} \times F(x))$ е никъде гъсто в $\{x\} \times F(x)$.*

В работата [20] е разгледана задача, предизвикана от въпрос на Витсенхаузен, която не е напълно решена, но на която се дава асимптотично решение от Франкъл и Уилсон [FrWi] (вж. също [Rai]) за случая на n-мерно евклидово пространство. Става въпрос за следното: Нека A е измеримо (в смисъл на повърхнинна мярка) подмножество на n-мерната сфера S^n в евклидовото пространство $\mathbb{R}^{n+1}$. Да приемем, че A не съдържа ортогонални елементи, тогава колко голямо по мярка може да е то? В съвместната работа на Пантсулая с автора този въпрос се поставя за продължения на повърхнинната мярка. Получени са два основни резултата:

Теорема 13. [20] *При $n \geq 2$, съществува продължение $\tilde{\mu}_n$ на попълнението $\bar{\mu}_n$ на повърхнинната мярка μ_n, както и $\tilde{\mu}_n$-измеримо множество $X \subset S^n$ за което $\tilde{\mu}_n(S^n \backslash X) = 0$ и такова, че никои два елемента на X не са ортогонални.*

Да дефинираме константа на Витсенхаузен-Калаи за повърхнинна мярка μ_n по следната формула

$$W_n(\mu_n) = \{\sup \mu_n(F) \colon F \subset S^n, F \text{ е измеримо и не съдържа ортогонални елементи}\}.$$

С помощта на предходната теорема доказваме:

Теорема 14. [20] *Нека $\bar{\mu}_n$ е стандартното попълнение на повърхнинната мярка μ_n в S^n, която е нормализирана като вероятностна мярка. Тогава твърдението "При $n \geq 2$, за всяко продължение λ на $\bar{\mu}_n$ съществува константа $W_n(\lambda)$ на Витсенхаузен-Калаи (различна от 1)", е недоказуемо в теорията $ZF + DC$. (Тук ZF означава аксиоматиката на Цермело и Франкел, а DC е аксиомата на детерминирания избор).*

Научно-Приложни Публикации.

Представените две научно-приложни работи [23-24] са направени в изпълнение на проект на НАТО SfP 981 149 (Наука за Мир: "Изследване на операциите в поддръжка на планирането на силите и оперативното планиране в новата среда за сигурност"). Предназначението на този проект е проучване (и демонстриране) на потенциала в БАН за подпомагане на процесите на вземане на решения, засягащи сигурността и отбраната на България.

В публикацията [23], имаща по същество научно-популярен характер се разглежда задачата: При зададено множество от сценарии, отразяващи възможни критичини ситуации, да се избере подмножество от сценарии, което да представя всичките зададени сценарии. В тази публикация се предлага математическа формализация на задачата, както и възможни подходи за решаването и.

В [24] е представена математическа формализация на процеса на дългосрочно планиране на структурата на въоръжените сили, изхождаща от съвременното разбиране за предназначението на такива структури съобразно новите предизвикателства. Това формализиране се основава на най-общо казано на удовлетворяване на набор от изисквани способности на структурата на силите, предпоставени от зададени сценарии с техните негативни последици при сбъдването им, като се предполагат и ограничения на финансовите средства. Представената в [24] математическа формализация позволява построяване на няколко дискретни оптимизационни модели за решаване на задачи за окомплектоване на структурата, (както и на подструктурите) на въоръжените сили.

Разгледани са два вида модели статични и динамични. В първите два модела се минимизира функцията на разходите за поддръжка при ограничения на нивата на способностите и съответно на приемливите нива от негативни последици. Третият модел е вариация на втория с променено интегрално ограничение за допустимото ниво от негативни последици, докато четвъртият представя дуален оптимизационен модел при който се минимизират негативните последици при зададени финансови ограничения.

В реални ситуации планирането на структурата на силите е дългосрочен процес при който решенията се взимат многократно в различни периоди от време (често от различни лица) с различни ограничения, съпътстващи дадените периоди от време, като все пак се цели постигане на специфична главна цел. Този процес се моделира чрез динамични дискретни модели при които хоризонта на планиране се разделя на стъпки, т.е. се дискретизира. В работата са предложени 4 динамични модела, които могат да бъдат разглеждани и като обобщения на предшестващите статични.

Представените модели са усложнени и с въвеждането на екпертно зададени тегла както на сценариите - съобразно например с вероятностите за сбъдването им, така и на отделни подструктури или единици, отразяващи наличия на предполагаеми предпочитания или амбиции.

В заключителната част на [24] се дискутират накратко различни аспекти на възможни практически приложения на моделите.

Литература

[As] E. Asplund, *Farthest points in reflexive locally uniformly rotund spaces*, Israel J. Math. **4** (1966), 213–216.

[B] F.S. de Blasi, *Some geometric properties of typical compact convex sets in Hilbert spaces*, Studia Math. **135** (1999), 143–162.

[BKM] F.S. de Blasi, P.S. Kenderov, and J. Myjak, *Ambiguous loci of the metric projection on compact starshaped sets in a Banach space*, Monats. Math. **119** (1995), 23–36.

[BM_1] F.S. de Blasi, J. Myjak, *Ambiguous loci of the nearest point mapping in Banach spaces*, Arch. Math. **61** (1993), 377–384.

[BM_2] F.S. de Blasi, J. Myjak, *Ambiguous loci of the farthest distance mapping from compact convex sets*, Studia Math. **112**, 2 (1995), 99–107.

[BM_3] F.S. de Blasi, J. Myjak, *On compact connected sets in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 8 (1996), 2331–2336.

[BMP] F.S. de Blasi, J. Myjak and P. Papini, *Porous sets in best approximation theory*, J. London Math. Soc., **44** (1991), 135–142.

[BZ] F.S. de Blasi, T. Zamfirescu, *Cardinality of the metric projection on typical compact sets in Hilbert spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **126** (1999), 37–44.

[Bl] J. Blatter, *Weiteste Punkte und Nachste Punkte*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **14** (1969), 615–621.

[BoFi] J.M. Borwein, S. Fitzpatrick, *Existence of nearest points in Banach spaces*, Can. J. Math. **XLI**, 4 (1989), 702–720.

[Br] A.L. Brown, *Set valued mappings, continuous selections, and metric projections*, J. Approx. Theory **57** (1989), 577–594.

[Cl] F.H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canadian Math. Soc, Series, Wiley, 1983.

[EkLe] I. Ekeland, G. Lebourg, *Generic Frechet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **224** (1976), 193–216.

[Ed] M. Edelstein, *Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces*, Israel J. Math. **4** (1966), 171–176.

[Er] P. Erdos, *On the Hausdorff dimension of some sets in Euclidean space*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 107–109.

[FaPr] M. Fabian, D. Preiss, *On intermediate differentiability of Lipschitz functions on certain Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **113**, 3, (1991), 773–740.

[FrWi] P. Frankl, R.M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), 357–368.

[Ge] П.Г. Георгиев, *Апроксимация на n-ъгълници с $(n-1)$-ъгълници*, Матем. Матем. Обр., 1984, 289-303.

[Iv] Р.П. Иванов, *Апроксимация на n-ъгълници с вписани $(n-1)$-ъгълници*, Матем. Матем. Образование, 1974, София, БАН.

[Ke] P.S. Kenderov, *Polygonal approximation of plane convex compacta*, J. Approx. Theory, **38** (1983), 221-239.

[Kl] V. Klee, *Remarks on nearest points in normed linear spaces*, Proc. Colloq. Convexity, Copenhagen, 1965, Copenhagen 1967, 168–176.

[Kol] J. Kolař, *Porosity and compacta with dense ambiguous loci of metric projections*, Acta Univ. Carol. Math. Phy. **39**, 1-2 (1998), 119–125.

[Ko_1] S. Konyagin, *Approximative properties of arbitrary sets in Banach spaces*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**(1978) No 2, 261-264, Soviet Math. Dokl. **19** (1978) No 2, 309–312.

[Ko_2] S. Konyagin, *Approximative properties of closed subsets in Banach spaces and the characterization of strongly convex spaces*, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **251**(1980), 276-279 (in Russian).

[Ku_1] D. Kutzarova, *On condition (β) and Δ-uniform convexity*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **42** No.1 (1989), 15–18.

[Ku_2] D. Kutzarova, *A nearly unifomly convex space which is not a (β) space*, Acta Univ. Carlinae-Math. Phys., **30**, No.2 (1989), 95–98.

[Ku_3] Denka Kutzarova, *An Isomorphic Characterization of Property (β) of Rolewicz*, Note di Matematica **10** (1990), 347–354.

[Lau_1] Ka-S. Lau, *Farthest points in weakly compact sets*, Israel J. Math. **22** (1975), 168–174.

[Lau_2] Ka-S. Lau, *Almost Chebyshev subsets in reflexive Banach spaces*, *Indiana Univ. Math. J.* **27**(1978), 791-795.

[Mi] C. Miranda, *Un'osservazione su un teorema di Brouwer* Boll. Unione Mat. Ital. II **3** (1941), 5–7.

[MoTo] V. Montesinos and J.R. Torregrosa, *A uniform geometric property in Banach spaces*, Rocky Mountin J. Math., **22**(1992), 683–690.

[Ne] M. Nedelcheva *Characterization of convex subsets of the plane through their local approximation properties*, Serdica Bulg. Math. Publ. 11 (1985), 165-170.

[PK] B.B. Panda, O.P. Kapoor, *On the farthest points of sets*, J. Math. Anal. Appl. **62** (1978), 345–352.

[Po] V.A. Popov, *Approximation of convex figures*, Compt. rend. l'Acad. bulg. Sci. **21**, (1968), 993–995.

[Rai] A.M. Raigorodskii, *The Borsuk problem and the chromatic number of some metric spaces*, Uspekhi Mat. Nauk **56**, 1 (2001), 107–146, Russian Math. Surveys **56**, 1 (2001), 103–139.

[Ro$_1$] S. Rolewicz, *On drop property*, Studia Math., **85**(1987), 27–35.

[Ro$_2$] S. Rolewicz, *On Δ-uniform convexity and drop property*, Studia Math., **87**(1987), 181–191.

[Se] Bl. Sendov, *Hausdorff Approximations*, Bulg. Acad. Sci., 1979.

[St] S.B. Stečkin, *Approximative properties of Banach spaces subsets*, Rev. Roum. Math. Pure Appl. **8**(1963), 5–8 (in Russian).

[Ty] A.N. Tykhonov, *On the stability of the functional optimization problem*, USSR J. Comp. Math. Ph. **6** (1966), 631-634.

[Wi] J.A. Wieacker, *The convex hull of a typical compact set.* Math.Ann 282, 637-644(1988).

[Zaj$_1$] L. Zajíček, *On the points of multivaluedness of metric projections in separable Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Crolin. **19**(1978), 513–525.

[Zaj$_2$] L. Zajíček, *Porosity and σ-porosity*, Real Anal. Exchange, **13**(1987-88), 314–350.

[Zaj$_3$] L. Zajíček, *Smallness of sets of nondifferentiability of convex functions in nonseparable Banach spaces*, Czechoslovak Math. J. **41**,2, (1991), 288–296.

[Zam$_1$] T. Zamfirescu, *The nearest point mapping is single-valued nearly everywhere*, Arch. Math. **54** (1990), 563–566.

[Zam$_2$] T. Zamfirescu, *The strange aspect of most compacta*, J. Math. Soc. Japan **57** (2005) no. 3, 701-708.

19. 07. 2012 Подпис:

(Николай Живков)