БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Институт по Математика и Информатика

Секция "Алгебра и Логика"

Петър Василев Данчев

АСОЦИАТИВНИ ПРЪСТЕНИ С ЕДИНИЦА И СЛАБО УНИПОТЕНТНИ МУЛТИПЛИКАТИВНИ ГРУПИ

Автореферат

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен

"ДОКТОР"

в област на висше образование
4. Природни науки, Математика и Информатика

професионално направление
4.5. Математика

докторска програма по научна специалност
"Алгебра и Теория на Числата"

Научен Консултант: *Доц. д-р Иван Делчев Чипчаков*

София, 2016-2017

ОБЩИ ПОЛОЖЕНИЯ

Дисертационният труд е обсъден, одобрен и насочен за защита на разширено заседание на секцията по **"Алгебра и Логика"**при ИМИ на БАН-София на 03.11.2017 година, проведено в заседателна зала No 578 на ИМИ на БАН-София.

Дисертационният труд *"Асоциативни Пръстени с Единица и Слабо Унипотентни Мултипликативни Групи"*съдържа 54 страници. Използваната там литература включва 42 източника на латиница, от които 24 са цитирани и тук, както и 3 източника на кирилица, от които 2 са цитирани и тук. Списъкът на авторските публикации, използвани при написването на дисертацията, се състои от 7 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои не по-късно от 20.05.2018 година в заседателна зала No 578 на ИМИ на БАН пред научно жури в състав:

1. Проф. д.м.н. Петър Георгиев Бойваленков (ПРЕДСЕДАТЕЛ) – ИМИ при БАН

2. Проф. д.м.н. Иво Михайлов Михайлов (РЕЦЕНЗЕНТ) – ФМИ на ШУ "Еп. Константин Преславски"

3. Проф. д-р Асен Кънчев Рахнев (РЕЦЕНЗЕНТ) – ФМИ на ПУ "Паисий Хилендарски"

4. Доц. д-р Ангел Петров Попов (ЧЛЕН) – АУБ (Професор Емеритус)

5. Доц. д-р Иван Делчев Чипчаков (НАУЧЕН КОНСУЛТАНТ) – ИМИ при БАН

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ при БАН всеки работен ден от 9.00 до 17.30 часа.

ОБЩО СЪДЪРЖАНИЕ

ИЗПОЛЗВАНИ ОЗНАЧЕНИЯ

1. R – пръстен

2. $U(R)$ – мултипликативна група на пръстена R

3. $J(R)$ – радикал на Джекобсон на пръстена R

4. $P(R)$ – прост радикал на пръстена R

5. $Id(R)$ – множеството от идемпотенти на пръстена R

6. $Nil(R)$ – множеството от нилпотенти на пръстена R

7. $N(R)$ – нил радикал на комутативния пръстен R

8. $\mathbb{N}$ – множеството на естествените числа

9. $\mathbb{Z}$ – пръстен на целите числа

10. $\mathbb{Z}_n$ – пръстен на класовете остатъци по модул $n \in \mathbb{N}$

11. $\mathbb{Z}_{(n)}$ – пръстен от рационалните числа, чиито знаменатели са взаимно прости с $n \in \mathbb{N}$

12. $\mathbb{M}_n(R)$ – пълен матричен $n \times n$ пръстен над пръстена R; $n \in \mathbb{N}$

13. $\mathbb{T}_n(R)$ – триангуларен матричен $n \times n$ пръстен над пръстена R; $n \in \mathbb{N}$

I. Пълна характеристика на дисертационния труд

1. Актуалност на проблематиката

Всички пръстени в тази дисертация са асоциативни и притежават единичен елемент, който в повечето случаи не съвпада с нулевия елемент. Добре известно е, че пръстенът R се нарича *булев*, ако всеки негов елемент r е идемпотент, т.е. $r^2 = r$. Тези пръстени са напълно изучени с точност до изоморфизъм, а именно пръстенът R е булев тогава и само тогава, когато той може да се вложи в произволно (крайно или безкрайно) директно произведение на изоморфни копия на полето $\mathbb{Z}_2$ от класовете остатъци по модул 2. В частност, когато булевият пръстен е краен, то той е изоморфен на такова крайно директно произведение на копия на полето $\mathbb{Z}_2$ (вж. [16]).

От историческа гледна точка, развитието на тези пръстени е следното:

През 1936 година, американският (и унгарски) математик Джон фон Нойман дефинира в своята статия [21] (вж. също [11] и [23]) така наречените *регулярни* пръстени по следния начин: За всеки елемент r на такъв пръстен R, съществува друг негов елемент a така, че $r = rar$. Съвсем очевидно булевите пръстени са регулярни в смисъла на фон Нойман. Други важни примери са произволните полета, както и стандартният (пълен) пръстен от линейните трансформации на произволно векторно пространство над тяло. Удовлетворителна структурна характеризация на тези пръстени е неизвестна и досега в общия случай, но все пак комутативните регулярни пръстени на фон Нойман могат да се опишат, като тези пръстени без ненулеви нилпотентни елементи, за които всеки прост идеал е максимален. Освен това, друго интересно свойство е, че произволно директно произведение на регулярни пръстени е отново регулярен пръстен.

Интересна разновидност на регулярните пръстени са добре известните *обратимо-регулярни* пръстени, дефинирани за $a \in U(R)$. Те възникват по естествен начин и са също детайлно изследвани в [8]. Там е доказано, че горепосоченият пръстен от линейни трансформации не е обратимо-регулярен, когато векторното пространство е безкрайномерно. Освен това, всеки абелев регулярен пръстен (т.е. регулярен пръстен, на който всеки идемпотент е централен) е редуциран обратимо-регулярен пръстен (т.е. обратимо-регулярен пръстен без нетривиални нилпотентни елементи).

Резюмирайки, регулярните и обратимо-регулярните пръстени на фон Нойман са обект на многобройни изследвания и многочислени обобщения. В резултат на това, канадският математик Николсън въвежда през 1977 година в [22] следния фундаментален клас от пръстени: Пръстенът R се нарича *чист*, ако за всеки негов елемент r съществуват обратим елемент $u \in U(R)$ и идемпотент $e \in Id(R)$ така, че $r = u + e$. Този клас от пръстени е значително широк и в частност съдържа всички артинови пръстени (така и всички крайни пръстени), както и всички обратимо-регулярни пръстени по теоремата на Камило-Курана установена в [3]. Все пак съществува регулярен пръстен, който не е чист (вж. [4]), и обратно (например $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_9$ и дори $\mathbb{Z}_{k^2}$, където $k \in \mathbb{N}$). Също така, пръстенът $\mathbb{Z}$ и пръстенът $\mathbb{Z}_{(6)}$ са явна демонстрация на ньотерови пръстени, които не са чисти, а пръстенът $\prod_{\aleph_0} \mathbb{Z}_{(2)} = \mathbb{Z}_{(2)} \times \mathbb{Z}_{(2)} \times \cdots$ на обратната импликация, т.е. на чист пръстен, който не е ньотеров (така той също не е и артинов); всъщност този пръстен не е и регулярен. От друга страна, всеки безкраен булев пръстен е пример на регулярен пръстен, който не е ньотеров; например $\prod_{\aleph_0} \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots$. В тази връзка, добре известно е, че един булев пръстен е ньотеров единствено, когато той е краен.

За да се отстрани този недостатък в алгебричните съотношения между пръстените, канадският математик Николсън въвежда в [22] и класа от *разменни* пръстени, а също така дава ново необходимо и достатъчно условие, кога един пръстен R е *разменен* доказвайки, че това е изпълнено тогава и само тогава, когато за всяко $r \in R$ съществува идемпотент $e \in rR$ със свойството $1 - e \in (1 - r)R$; ще отбележим, че тази нова дефиниция всъщност е ляво-дясно симетрична, като чрез нея там също се доказва, че абелевите разменни пръстени са чисти. Така вече всички регулярни и чисти пръстени са разменни. Обратното обаче не винаги е вярно, както вече отбелязахме по-горе – това е демонстрирано чрез забележителен класически пример, конструиран от Бергман, на регулярен (и така разменен) пръстен, който не е чист (вж. отново [4]), а също така и на чист (и така разменен) пръстен $\mathbb{Z}_4$, който е краен, но не е регулярен. Нека да отбележим фактологически, че разменните пръстени са въведени за първи път от Уорфилд в [24], но по различен начин, а именно чрез използване на теория на модулите, а първи теоретико-пръстенов поелементов критерий е даден от Монк в [20]. Въпреки всичко, до този момент не е известна цялостна характеризация, която да определя алгебричната структура на чистите и разменните пръстени с точност до изоморфизъм, затова тяхното интензивно изучаване продължава усилено от много учени и до днес.

Ето защо получаването на нови резултати в това направление биха били от някакъв интерес. Ние тук ще дадем такава пълна характеризация за някои разновидности на чистите пръстени, които сформират все още твърде широки класове от пръстени, описвайки техните изоморфни класификации и алгебрични състояния.

2. Цели и задачи на дисертационния труд

Основните ни цели са да дадем пълна характеризация с точност до изоморфизъм на някои видове чисти и разменни пръстени, като за целта развиваме подходяща алгебрична техника. Основните моменти в нея са използването на някои специфични свойства на възлови елементи в пръстена и по-специално тези на идемпотентите, нилпотентите и обратимите елементи. Установяването на някои комутативни свойства между тях е от съществено значение.

Задачите са последователно поставени така:

Първо, да се опишат по-подробно мултипликативните групи на някои известни класове от пръстени, като тези на UU и WUU пръстените, дефинирани в детайли по-долу.

Второ, в съчетание с това, да се опишат детайлно изоморфните класове на някои други видове пръстени, и по-специално тези на разменните и чисти пръстени или техни подразновидности.

Трето, да се приложат получените резултати от предишните два пункта в някои други по-специфични направления на комутативната алгебра, като комутативните групови алгебри и абелевите групи.

3. Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, три параграфа, от които последният съдържа някои конкретни приложения на преждеполучените резултати, заключение, списък от 7 публикации по темата на дисертацията, библиография от 45 източника на латиница, 24 от които са цитирани и тук, както и 3 на кирилица, 2 от които са цитирани и тук, някои специални означения и общо съдържание. Цялостният обем на дисертационния труд е точно 54 страници.

II. Кратко съдържание на дисертационния труд

1 Въведение в тематиката

Настоящата научна разработка ще се занимава с три основни теми, както следва:

(1) Описание на тези пръстени, чиито мултипликативни групи съдържат само унипотентни и слабо унипотентни единици. Също така напълно се описват и техните сечения с чистите и разменните пръстени на Николсън, като класификациите им са дадени с точност до изоморфизъм.

(2) Пълно описание на някои подкласове на класа от чисти пръстени с точност до тяхна изоморфна структура.

(3) Описание на матричния пръстен, пръстена от ендоморфизми на произволна абелева група и на комутативния групов пръстен в някои специални случаи, които включват нил-чистота, силна нил-чистота и слаба нил-чистота.

Етапите на развитие на тези теми са както следва:

• При първата, се постигат окончателни резултати.

• При втората, се постигат окончателни резултати.

• При третата, се постигат два частични и три окончателни резултата.

2 Слабо унипотентни групи от единици в унитарни пръстени

Следвайки [2], пръстенът R се нарича *UU пръстен* или *пръстен с унипотентни единици*, ако $U(R) = 1 + Nil(R)$. Тогава групата $U(R)$ се нарича също *унипотентна група от единици.*

Съществува изобилие от такъв сорт пръстени, което можем да представим, както следва:

Класически примери за такива пръстени са всички булеви пръстени, всички комутативни и некомутативни свободни алгебри над полето $\mathbb{Z}_2$, както и полиномния пръстен $\mathbb{Z}_2[X]$ над $\mathbb{Z}_2$. Други примери на нередуцирани UU пръстени са $\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2[X]/(X^t)$, където t е естествено число удовлетворяващо неравенството $t \geq 2$.

Нека сега да разгледаме $\mathbb{Z}_2$-алгебрата R, генерирана от два елемента x и y с валидно равенство $x^2 = 0$ за променливата x. В [1] е доказано, че е изпълнено равенството $U(R) = 1 + \mathbb{Z}_2x + xRx$. Понеже очевидно е в сила съотношението $(\mathbb{Z}_2x + xRx)^2 = 0$, то R е още един нетривиален пример на UU пръстен.

Тъй като самата дефиниция на UU пръстени е на практика трудно приложима, то следващият резултат от [DL] напълно характеризира UU пръстените в по-удобен за приложение практически вид.

Теорема 2.1. *Пръстенът R е UU пръстен тогава и само тогава, когато $2 \in Nil(R)$ и $U(R)$ е 2-група.*

Въз основа на него, или директно от дефиницията, може да се конструира следния общ пример на UU пръстен, показващ наистина колко е широк този клас от пръстени. И така, нека A е произволна нил алгебра с характеристика 2 над полето $\mathbb{Z}_2$ (например, тази алгебра може да се вземе от класическата конструкция на Голод-Шафаревич – вж. оригиналните статии [1], [2] или монографията [12]). Образуваме алгебрата A' отново над $\mathbb{Z}_2$, породена от A и единичният елемент 1 на полето $\mathbb{Z}_2$. Тогава всеки обратим елемент на A', т.е. всеки елемент от $U(A')$, е от вида $1 + a$, където $a \in A$ е нилпотент. Понеже $a^i = 0$ за някое естествено число i имплицира равенството $a^{2^i} = 0$, то незабавно следва равенството $(1 + a)^{2^i} = 1$. Следователно, A' е UU пръстен, както и твърдяхме.

Аналогично както в [D3], пръстенът R се нарича *WUU пръстен* или *пръстен със слабо унипотентни единици*, ако $U(R) = \pm 1 + Nil(R)$, като в този случай $U(R)$ се нарича *слабо унипотентна група от единици.*

Явен пример на WUU пръстен, който не е UU пръстен, е $\mathbb{Z}$. Същото твърдение е валидно за $\mathbb{Z}_3$ и за $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Също така, ако e е произволен идемпотент на WUU пръстена R, то ъгловият пръстен eRe е също WUU. И накрая полиномният пръстен над който и да е комутативен WUU пръстен е също WUU. Все пак пълният матричен пръстен над който и да е ненулев пръстен не е WUU.

Аналогичен резултат за WUU пръстени на горната характеризационна теорема върху UU пръстени обаче все пак не може да бъде доказан, поради следната комплицирана ситуация:

Твърдение 2.1. ([D3]) *Нека R е пръстен. За всяко естествено число $n \geq 2$ триангуларният $n \times n$ матричен пръстен $\mathbb{T}_n(R)$ е WUU пръстен тогава и само тогава, когато $\mathbb{T}_n(R)$ е UU пръстен тогава и само тогава, когато R е UU пръстен.*

Следният пример и конструкцията в него потвърждават тази твърде сюрпризираща ситуация.

Пример 2.1. Нека да разгледаме следния подпръстен на горния триангуларен матричен пръстен $\mathbb{T}_2(\mathbb{Z})$, съдържащ същата единица, а именно пръстенът R състоящ се от всички матрици от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, където $a, b \in \mathbb{Z}$. Лесно се проверява, че това е комутативен WUU пръстен, докато според Твърдение 2.1, пръстенът $\mathbb{T}_2(\mathbb{Z})$ не е такъв. А освен това лесно се вижда индукционно, че за обратимата матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, с неин обратен елемент $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, е изпълнено $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ за всяко естествено число n. Ето защо всяка такава обратима матрица е от безкраен ред и така $U(R)$ не е периодична група.

Все пак интересно е да се изследва този проблем, когато характеристиката на пръстена е крайна ненулева. Например, ако R е WUU пръстен с характеристика 6, то $U(R)$ е периодична 6-група (вж. [D3]).

Въпреки всичко, следното основно твърдение е вярно:

Теорема 2.2. ([D3]) *Пръстенът R е чист WUU пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R/J(R)$ е или булев, или $\mathbb{Z}_3$, или тяхно директно произведение.*

В частност, получаваме следствието:

Следствие 2.1. ([DL]) *Пръстенът R е чист UU пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R/J(R)$ е булев.*

По този начин, дефинираните в [11] и [23] обратимо-регулярни пръстени, съдържащи само унипотентни единици, са винаги булеви (вж. също така и [D1]), защото те притежават нулев радикал на Джекобсон.

Някои други интересни резултати за нил-чисти пръстени могат да се намерят също и в [15].

3 Слабо нил-чисти пръстени

Американският математик Дизел формулира в своята докторска дисертация [6], части от които по-късно са публикувани в статията [7], следната разновидност на чистите пръстени така: Пръстенът R се нарича *нил-чист*, ако $R = Nil(R) + Id(R)$.

Като някои съществени примери на тези пръстени ще посочим булевите пръстени, матричният пръстен $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_2)$ и триангуларният матричен пръстен $\mathbb{T}_n(\mathbb{Z}_2)$ за всяко $n \geq 1$.

Той получава следните важни резултати:

(1) Пръстенът R е нил-чист тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и $R/J(R)$ е нил-чист пръстен.

Напомняме, че един пръстен се нарича *абелев*, ако всичките му идемпотенти са централни.

(2) Ако R е абелев нил-чист пръстен, то $J(R) = Nil(R)$.

(3) Ако R е пръстен и n е естествено число, то триангуларният $n \times n$ матричен пръстен $\mathbb{T}_n(R)$ е нил-чист тогава и само тогава, когато R е нил-чист.

В тази връзка, в [7] е поставен също следният основен проблем: Ако R е нил-чист пръстен следва ли, че пълният матричен $n \times n$ пръстен $\mathbb{M}_n(R)$ е също нил-чист за всяко естествено число n? Положителен отговор на този въпрос е частично даден в [BCDM] чрез следната теорема.

Теорема 3.1. *Ако R е комутативен нил-чист пръстен, то $\mathbb{M}_n(R)$ е нил-чист пръстен за всяко цяло положително число n.*

Разширявайки по естествен начин този вид пръстени, стигаме до следната нова концепция:

Дефиниция 3.1. Пръстенът R се нарича *слабо нил-чист*, ако $R = Nil(R) \pm Id(R)$.

Очевидно, ако пръстенът има характеристика 2, то двете понятия "нил-чист"и "слабо нил-чист"съвпадат. Все пак, когато $2 \neq 0$ в R, двете понятия се различават, както ще бъде показано по-долу. Съществуват обаче мнобройни конструкции на този вид от пръстени, което прави тяхното изследване много полезно.

Някои по-общи примери на такива пръстени са следните: Всеки нил-чист пръстен е слабо нил-чист; полето $\mathbb{Z}_3$; некомутативният пръстен S, дефиниран по следния начин: Нека $n = 2^l 3^k \geq 2$, където $l, k \geq 0$, нека $R = \mathbb{Z}_n[t]/(t^2)$ за някое променливо t, и нека изображението $\sigma : R \to R$ е зададено чрез $a + bt \mapsto a$, където $a, b \in R$. Очевидно σ е ендоморфизъм на R. Образуваме пръстена $S = R[x; \sigma]/(x^2)$, където x е някоя променлива, който се равнява точно на $S = \{r + sx : r, s \in R\}$ със свойствата $x^2 = 0$ и $xr = \sigma(r)x$ за всички $r \in R$. Но лесно се проверява, че $J(S) = J(R) + Rx$ и така $J(S)$ е нилпотентен идеал (понеже такъв е идеалът $J(R)$). Освен това фактор-пръстенът $S/J(S)$ е изоморфен на точно един от пръстените $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ или $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Следователно S е слабо нил-чист пръстен. Но за $r = 1 + t$ ние имаме, че $\sigma(r) = 1$, и така $xr = \alpha(r)x = x \neq rx$. Ето защо S е още повече некомутативен пръстен, както и твърдяхме. Отбелязваме още, че S е дори локален пръстен, ако $l = 0$ или $k = 0$.

В поредица от статии ([DM], [D2] и [BDZ]) са изследвани различни варианти на слабо нил-чистите пръстени, като кулминация на тези резултати е общата характеризационна теорема получена в [D3], свеждаща структурата на слабо нил-чистите пръстени до тази на нил-чистите пръстени. Тази теорема гласи следното:

Теорема 3.2. *Пръстенът R е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато R е или нил-чист пръстен, или $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R/J(R)$ е изоморфен на $\mathbb{Z}_3$, или R е директно произведение на два такива пръстена.*

Като две съществени следствия на този резултат относно обратимите елементи в WUU пръстени, които елементи бяха разгледани подробно в предишния параграф, се получава, че абелевите слабо-нил чисти пръстени, както и слабо нил-чистите пръстени в които 2 е обратим елемент, са винаги WUU пръстени.

4 Приложения

Нашите предишни резултати тук ще намерят своето приложение в два различни аспекта, както следва:

4.1 Абелеви групи

Имитирайки [9], нека G е адитивно записана абелева група с пръстен от ендоморфизми $E(G)$. Един от основните проблеми в теория на абелевите групи е да се опише този пръстен в зависимост от групата и също как той влияе на нейната структура (вж. също [5]). В частност, актуален е и въпросът, кога $E(G)$ е чист пръстен или с други думи, кога G е чиста група? Пълен отговор на този въпрос не е получен и до сега, но съществен принос по тази тематика е постигнат в [10]. Основните им резултати в тази насока са следните:

(1) Делимите групи са чисти.

(2) Периодически пълните p-групи са чисти.

(2') Съществува чиста сепарабелна p-група със стандартна базисна подгрупа, която група не е периодически пълна.

(3) Тотално-проективните групи са чисти единствено, когато те са ограничени.

Ще казваме, че G е *(силно) нил-чиста* група, ако $E(G)$ е (силно) нил-чист пръстен.

В сила е следният резултат от [BCDM]:

Теорема 4.1.1. *Следните две твърдения са изпълнени:*

(а) Групата G от краен ранг е нил-чиста тогава и само тогава, когато тя е крайна 2-група.

(б) Групата G е силно нил-чиста тогава и само тогава, когато тя е циклична 2-група.

Остава все още открит въпросът в подточка (а), когато групата има безкраен ранг, и така твърдението *не* е в окончателна форма. За сметка на това, твърдението в подточка (б) е в окончателнен вид.

4.2 Комутативни групови алгебри

Нека R е комутативен пръстен с единичен елемент и нил-радикал $N(R)$, а G е мултипликативно записана абелева група. Под символа $R[G]$ ще разбираме груповия пръстен на G над R, състоящ се от всички формални крайни линейни комбинации на елементи от G с коефициенти от R, образуващи базис.

Един от основните проблеми в теоретико-пръстеновите свойства на груповите алгебри е да се намери критерий кога $R[G]$ е чист пръстен (вж. [13], [14] и [18]). Този въпрос е нерешен и до днес, поради широтата на класа от чисти пръстени, и ето защо теоремата по-долу дава напълно удовлетворителен отговор на това за достатъчно широк подклас на класа от чисти пръстени.

И така, следващият резултат осигурява едно необходимо и достатъчно условие кога $R[G]$ е слабо нил-чист пръстен само в термините на R и G, и също така разширява аналогична теорема от [19] доказана за нил-чисти групови пръстени. Тази теорема може да се формулира, както следва: *$R[G]$ е нил-чист пръстен тогава и само тогава, когато R е нил-чист пръстен и G е 2-група.*

В сила е следното уточняващо твърдение:

Теорема 4.2.1. ([DM]) *Груповият пръстен $R[G]$ е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато точно едно от следните три условия е изпълнено:*

(i) R е нил-чист пръстен и G е нетривиална 2-група;

(ii) R е пръстен, за който $R/N(R) \cong \mathbb{Z}_3$ и G е нетривиална 3-група;

(iii) R е слабо нил-чист пръстен и G е тривиалната група.

Забележка. Условието $R/N(R) \cong \mathbb{Z}_3$ в пункт (ii) гарантира, че R е слабо нил-чист пръстен.

Заключение и преглед на основните резултати

В заключение ще отбележим, че доказаните теореми дават по някакъв начин нов и по-ясен облик на класа от чисти пръстени, а приведените доказателства очертават трудностите, които възникват при стремежа за по-нататъшни нетривиални обобщения и разширения.

В резюме, основните получени резултати в дисертацията са тези:

(а) *Ако R е комутативен нил-чист пръстен, то матричният пръстен $\mathbb{M}_n(R)$ е също нил-чист за всяко $n \geq 1$.* (Резултатът е публикуван в статията [BCDM].)

(б) *Ако R е комутативен слабо нил-чист пръстен, който не е нил-чист (например $\mathbb{Z}_3$), то матричният пръстен $\mathbb{M}_n(R)$ не е слабо нил-чист, ако $n \geq 2$.* (Резултатът е публикуван в статията [BDZ].)

(в) *Пръстенът R е UU тогава и само тогава, когато $char(R) = 2^t$ за някое естествено число t и $U(R)$ е 2-група.* (Резултатът е публикуван в статията [DL].)

(г) *Пръстенът R е разменен WUU пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и $R/J(R) \cong B$ или $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_3$ или $R/J(R) \cong B \times \mathbb{Z}_3$, където B е булев пръстен.* (Резултатът е публикуван в статията [D3]; вж. също [D1].)

(д) *Пръстенът R е слабо нил-чист пръстен тогава и само тогава, когато $R = R_1 \times R_2$, където R_1 е нил-чист пръстен, а R_2 е или нулевия пръстен или е пръстен, за който $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{Z}_3$ и $J(R_2)$ е нил идеал.* (Резултатът е публикуван в статията [D3]; вж. също [D2].)

(е) *Абелевата група G е силно-нил чиста, т.е. нейният пръстен от ендоморфизми $E(G)$ е силно нил-чист, тогава и само тогава, когато групата G е циклична 2-група.* (Резултатът е публикуван в статията [BCDM].)

(ж) *Комутативният групов пръстен $R[G]$ е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато R е нил-чист пръстен и G е 2-група, или $R/N(R) \cong \mathbb{Z}_3$ и G е 3-група, или R е слабо нил-чист пръстен и $G = \{1\}$.* (Резултатът е публикуван в статията [DM].)

Перспективи за развитие и основни нерешени проблеми

Техниката, която беше въведена, развита и използвана при доказване на основните резултати описани по-горе, позволява да бъде все още усъвършенствана, както и дадените идеи да се приложат при бъдещи разширения на нови видове пръстени в класа на чистите пръстени.

Въпреки всичко, основни нерешени въпроси в дисертацията остават следните:

(1) Да се установи дали пълният матричен пръстен над нил-чист пръстен е също винаги нил-чист, т.е., да се реши напълно дискутираният по-рано проблем на Дизел от [6] и [7] в некомутативния случай. За съжаление, в статията [17] е доказано, че общият проблем на Дизел е еквивалентен с класическата хипотеза на Кьоте (Köthe) отнесена за алгебри над полето $\mathbb{Z}_2$.

(2) Да се намери финален критерий кога една абелева група е чиста, нил-чиста и слабо нил-чиста.

Основните насоки да се преодолеят идейните трудности, с цел за да се осъществи успешната атака на тези два открити въпроса, е да се разшири стратегията и техниката, използвани при горните доказателства, чрез по-финно изучаване на нил идеалите и тяхната сума в произволни некомутативни пръстени, както и по-детайлното проникване в структурата на пръстените от ендоморфизми на произволни абелеви групи.

Апробация и дисертабилност на резултатите

Съществена част от основните резултати на този дисертационен труд са докладвани на 04.11.2016 година в заседателната зала 578 пред разширено заседание на секцията по "Алгебра & Логика"на ИМИ на БАН-София с хабилитирани преподаватели от СУ "Св. Климент Охридски".

Освен това те са докладвани на следните семинари, конференции и симпозиуми:

- Мальцевские чтения, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН и Новосибирский НИГУ, Новосибирск, 03.05.2015-07.05.2015 година.

- Специализиран семинар по "Алгебра"на Университета в Cluj-Naроса, РУМЪНИЯ.

- Конференция по "Комутативна Алгебра проведена под егидата на FAU University във Флорида, САЩ.

- Симпозиум по "Некомутативна Алгебра и Приложения проведен в Berkeley, Калифорния, САЩ.

Също така, резултатите от стр. 17 на автореферата, които са основни за дисертацията, бяха представени, обсъдени и допуснати до защита на специално заседание на секцията "Алгебра и Логика"на ИМИ към БАН - София, разширена с хабилитирани преподаватели-специалисти от СУ "Св. Климент Охридски НБУ-София и АУБ-Благоевград, което се проведе на 03.11.2017 г., отново в зала 578 на ИМИ.

Основните приноси се свеждат до решаването (макар и частично) на важен проблем поставен от Дизел в [7] за нил-чистотата на матричния пръстен, както и на дефинирането и пълното структурно описание на някои съществени класове от пръстени, които са тясно свързани с класическите класове от чисти и разменни пръстени. Не на последно място, мултипликативните групи на твърде широки класове от пръстени са напълно изследвани и характеризирани.

Благодарности

На първо място дисертантът изказва своите искрени благодарности на научния си консултант *доц. д-р Иван Делчев Чипчаков* за многобройните дискусии по различни теми от дисертацията и получените безценни съвети, както и за приятелското окуражаване по време на написването на дисертационния труд.

Авторът е също така много благодарен и на *рецензентите* за стойностните препоръки отправени към него, както и за отделеното време и положени усилия за написването на експертните им доклади.

ПОСВЕЩАВА СЕ НА МОЕТО СЕМЕЙСТВО
С МНОГО ЛЮБОВ И ПРИЗНАТЕЛНОСТ

Публикации по дисертационния труд

I. Авторски статии

[BCDM] S. Breaz, G. Călugăreanu, P. Danchev and T. Micu, *Nil-clean matrix rings*, Linear Algebra Appl. (10) **439** (2013), 3115-3119. (**IF 0,983**)

[DM] P. V. Danchev and W. Wm. McGovern, *Commutative weakly nil clean unital rings*, J. Algebra (5) **425** (2015), 410-422. (**IF 0,660**)

[D1] P. V. Danchev, *A new characterization of boolean rings with identity*, Irish Math. Soc. Bull. (2) **76** (2015), 55-60.

[D2] P. V. Danchev, *A class of weakly nil-clean rings*, Irish Math. Soc. Bull. (1) **77** (2016), 9-17.

[D3] P. V. Danchev, *Weakly UU rings*, Tsukuba J. Math. (1) **40** (2016), 101-118.

[DL] P. V. Danchev and T. Y. Lam, *Rings with unipotent units*, Publ. Math. Debrecen (3-4) **88** (2016), 449-466. (**IF 0,431**)

[BDZ] S. S. Breaz, P. V. Danchev and Y. Zhou, *Rings in which every element is either a sum or a difference of a nilpotent and an idempotent*, J. Algebra Appl. (8) **15** (2016). (**IF 0,489**)

Забележка: Тези статии са подредени хронологично по нарастващи години на публикуване.

TOTAL IF (2013-2016): 2,563

II. Цитати

Статията [BCDM] е цитирана в следните публикации:

[KLZ] M.T. Koşan, T.K. Lee and Y. Zhou, *When is every matrix over a division ring a sum of an idempotent and a nilpotent?*, Linear Algebra Appl. **450** (2014), 7-12.

[MRS] W.Wm. McGovern, S. Raja and A. Sharp, *Commutative nil clean group rings*, J. Algebra Appl. (6) **14** (2015).

[HK1] S. Hadjirezaei and S. Karimzadeh, *On the nil-clean matrix over a UFD*, J. Alg. Struct. Their Appl. (2) **2** (2015), 49-55.

[HK2] S. Hadjirezaei and S. Karimzadeh, *Matrix rings over a principal ideal domain in which elements are nil-clean*, J. Algebra Comb. Discrete Appl. (2) **3** (2016), 91-96.

[KWZ] M.T. Koşan, Z. Wang and Y. Zhou, *Nil-clean and strongly nil-clean rings*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 633-646.

[KZ] M.T. Koşan and Y. Zhou, *On weakly nil-clean rings*, Frontiers Math. China **11** (2016), 949-955.

[HK] A.H. Handam and H.A. Khashan, *Rings in which elements are the sum of a nilpotent and a root of a fixed polynomial that commute*, Open Math. **15** (2017), 420-426.

[KH1] H.A. Khashan and A.H. Handam, *On weakly $g(x)$-nil clean rings*, Internat. J. Pure Appl. Math. **114** (2017), 191-202.

[M] J. Matczuk, *Conjugate (nil) clean rings and Köthe's problem*, J. Algebra Appl. (4) **16** (2017).

[St] J. Šter, *Nil-clean quadratic elements*, J. Algebra Appl. (8) **16** (2017).

[CS1] H. Chen and M. Sheibani, *On strongly nil-clean rings*, Commun. Algebra **45** (2017), 1719-1726.

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

[STZ] S. Sahinkaya, G. Tang and Y. Zhou, *Nil-clean group rings*, J. Algebra Appl. (5) **16** (2017).

[ASC] N. Ashrafi, M. Sheibani and H. Chen, *Certain decompositions of matrices over abelian rings*, Czechoslovak Math. J. **67** (2017), 417-425.

[CA] H. Chen and M. Sheibani-Abdolyousefi, *On Yaqub nil-clean rings*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

[CS4] H. Chen and M. Sheibani, *Rings over which every matrix is the sum of two idempotents and a nilpotent*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

[SC] M. Sheibani and H. Chen, *Matrices over Zhou nil-clean rings*, Commun. Algebra **46** (2018).

[AT] А.Н. Абызов и А.А. Туганбаев, *Формальные матрицы и кольца, близкие к регулярным*, Фундамент. Приклад. Математ. (1) **21** (2016), 5-21.

[AM] А.Н. Абызов и М.И. Мухаметгалиев, *О некоторых матричных аналогах малой теоремы Ферма*, Матем. Заметки (2) **101** (2017), 163-168.

Статията [DM] е цитирана в следните публикации:

[BM] S. Breaz and G. C. Modoi, *Nil-clean companion matrices*, Linear Algebra Appl. **489** (2016), 50-60.

[KZ] M.T. Koşan and Y. Zhou, *On weakly nil-clean rings*, Frontiers Math. China **11** (2016), 949-955.

[Sta] A. Stancu, *A note on commutative weakly nil clean rings*, J. Algebra Appl. (10) **15** (2016).

[KH1] H.A. Khashan and A.H. Handam, *On weakly $g(x)$-nil clean rings*, Internat. J. Pure Appl. Math. **114** (2017), 191-202.

[CS1] H. Chen and M. Sheibani, *On strongly nil-clean rings*, Commun. Algebra **45** (2017), 1719-1726.

[CS2] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly 2-nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (8) **16** (2017).

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

[ASC] N. Ashrafi, M. Sheibani and H. Chen, *Certain decompositions of matrices over abelian rings*, Czechoslovak Math. J. **67** (2017), 417-425.

[BB] D.K. Basnet and J. Bhattacharyya, *Nil clean graphs of rings*, Algebra Colloq. **24** (2017), 439-452.

[CS4] H. Chen and M. Sheibani, *Rings over which every matrix is the sum of two idempotents and a nilpotent*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

[SC] M. Sheibani and H. Chen, *Matrices over Zhou nil-clean rings*, Commun. Algebra **46** (2018).

[K] H.A. Khashan, *On (weakly) precious rings associated to central polynomials*, Bol. Soc. Paran. Mat. **36** (2018), 245-256.

[KH2] H.A. Khashan and A.H. Handam, *(Weakly) n-nil cleanness of the ring $\mathbb{Z}_m$*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. **67** (2018), 29-37.

Статията [D2] е цитирана в публикацията:

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

Статията [D3] е цитирана в следните публикации:

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

[CA] H. Chen and M. Sheibani-Abdolyousefi, *On Yaqub nil-clean rings*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

[SAC] M. Sheibani-Abdolyousefi and H. Chen, *Strongly 2-nil-clean rings with involutions*, Czechoslovak Math. J. **68** (2018).

Статията [DL] е цитирана в следните публикации:

[Ste] J. Šter, *Rings in which nilpotents form a subring*, Carpathian J. Math. (2) **32** (2016), 251-258.

[AC] M. Sheibani-Abdolyousefi and H. Chen, *Rings in which elements are sums of tripotents and nilpotents*, J. Algebra Appl. (3) **17** (2018).

[CA] H. Chen and M. Sheibani-Abdolyousefi, *On Yaqub nil-clean rings*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

Статията [BDZ] е цитирана в следните публикации:

[Sta] A. Stancu, *A note on commutative weakly nil clean rings*, J. Algebra Appl. (10) **15** (2016).

[CHU] T.P. Calci, A. Harmanci and B. Ungor, *An approach to quasipolarity for rings along nilpotent elements*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **24** (2018).

[P] K. Paykan, *Some new results on skew triangular matrix rings with constant diagonal*, Vietnam J. Math. **45** (2017), 575-584.

[KH1] H.A. Khashan and A.H. Handam, *On weakly $g(x)$-nil clean rings*, Internat. J. Pure Appl. Math. **114** (2017), 191-202.

[St] J. Šter, *Nil-clean quadratic elements*, J. Algebra Appl. (8) **16** (2017).

[CS2] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly* 2*-nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (8) **16** (2017).

[CS3] H. Chen and M. Sheibani, *Strongly weakly nil-clean rings*, J. Algebra Appl. (11) **16** (2017).

[ASC] N. Ashrafi, M. Sheibani and H. Chen, *Certain decompositions of matrices over abelian rings*, Czechoslovak Math. J. **67** (2017), 417-425.

[K] H.A. Khashan, *On (weakly) precious rings associated to central polynomials*, Bol. Soc. Paran. Mat. **36** (2018), 245-256.

[KH2] H.A. Khashan and A.H. Handam, *(Weakly) n-nil cleanness of the ring* $\mathbb{Z}_m$, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. **67** (2018), 29-37.

[CA] H. Chen and M. Sheibani-Abdolyousefi, *On Yaqub nil-clean rings*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

[CS4] H. Chen and M. Sheibani, *Rings over which every matrix is the sum of two idempotents and a nilpotent*, J. Algebra Appl. **17** (2018).

Общо цитати: 51 от 29 автори

Забележка: Цитатите са подредени хронологично по нарастващи години на публикуване.

БИБЛИОГРАФИЯ

In English (На Английски)

Литература

[1] G.M. Bergman, *Modules over coproducts of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 1-32.

[2] G. Călugăreanu, *UU rings*, Carpathian J. Math. **31** (2015), 157-163.

[3] V.P. Camillo and D. Khurana, *A characterization of unit regular rings*, Commun. Algebra **29** (2001), 2293-2295.

[4] V.P. Camillo and H.-P. Yu, *Exchange rings, units and idempotents*, Commun. Algebra **22** (1994), 4737-4749.

[5] A.R. Chekhlov and P.V. Danchev, *On projectively Krylov transitive and projectively weakly transitive abelian p-groups*, J. Group Theory (1) **20** (2017), 39-59.

[6] A.J. Diesl, Classes of Strongly Clean Rings, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, Spring 2006.

[7] A.J. Diesl, *Nil clean rings*, J. Algebra **383** (2013), 197-211.

[8] G. Ehrlich, *Unit-regular rings*, Portugal. Math. **27** (1968), 209-212.

[9] L. Fuchs, Abelian Groups, Springer, Switzerland, 2015.

[10] B. Goldsmith and P. Vámos, *A note on clean abelian groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **117** (2007), 181-191.

[11] K.R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, Monographs and Studies in Mathematics **4**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Massachusetts, 1979.

[12] I.N. Herstein, Noncommutative Rings, The Carus Math. Monographs, The Math. Assoc. America, Fifth Edition, 2005.

[13] N. Immormino, Clean Rings and Clean Group Rings, Ph.D. Dissertation, Bowling Green State University, 2013.

[14] N. Immormino and W.Wm. McGovern, *Examples of clean commutative group rings*, J. Algebra **405** (2014), 168-178.

[15] M.T. Koşan, Z. Wang and Y. Zhou, *Nil-clean and strongly nil-clean rings*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 633-646.

[16] T.Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Second Edition, Graduate Texts in Math. **131**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

[17] J. Matczuk, *Conjugate (nil) clean rings and Köthe's problem*, J. Algebra Appl. (4) **16** (2017).

[18] W.Wm. McGovern, *A characterization of commutative clean rings*, Int. J. Math., Game Theory & Algebra **15** (2006), 403-413.

[19] W.Wm. McGovern, S. Raja and A. Sharp, *Commutative nil clean group rings*, J. Algebra Appl. (6) **14** (2015).

[20] G.S. Monk, *A characterization of exchange rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 349-353.

[21] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **22** (1936), 707-713.

[22] W.K. Nicholson, *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 269-278.

[23] A.A. Tuganbaev, Rings Close to Regular, Mathematics and its Applications **545**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[24] R.B. Warfield Jr., *Exchange rings and decompositions of modules*, Math. Ann. **199** (1972), 31-36.

In Russian (На Руски)

Литература

[1] Е.С. Голод, *О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах*, Изв. АН СССР, сер. матем. **28** (1964), 273-276.

[2] Е.С. Голод, И.Р. Шафаревич, *О башне полей классов*, Изв. АН СССР, сер. матем. **28** (1964), 261-272.