РЕЦЕНЗИЯ

от професор д.н. Иво Михайлов Михайлов
ФМИ при Шуменски Университет „Епископ Константин Преславски”

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика.
професионално направление: 4.5. Математика.
докторска програма : Алгебра и теория на числата
Автор: Петър Василев Данчев
Тема: „АСОЦИАТИВНИ ПРЪСТЕНИ С ЕДИНИЦА И СЛАБО УНИПОТЕНТНИ МУЛТИПЛИКАТИВНИ ГРУПИ”.
Научен консултант: Доц. д-р Иван Делчев Чипчаков, БАН

1. Общо описание на дисертационния труд

Със заповед № 542 от 20.11.2017 г. на Директора на Института по математика и информатика – БАН съм определен за рецензент в научното жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема "Асоциативни пръстени с единица и слабо унипотентни мултипликативни групи" за придобиване на образователната и научна степен ‘доктор’ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Алгебра и теория на числата. Автор на дисертационния труд е Петър Василев Данчев.

Дисертационният труд "Асоциативни пръстени с единица и слабо унипотентни мултипликативни групи" се състои от увод, три параграфа, заключение, списък от 7 публикации по темата на дисертацията, библиография от 45 източника на латиница, както и 3 на кирилица, някои специални означения и общо съдържание. Цялостният обем на дисертационния труд е 54 страници. Също така е представен автореферат и авторска справка за приносите на дисертационния труд.

2. Кратки биографични данни за докторантката

Петър Василев Данчев е завършил средното си образование през 1989 г. в ОМГ „Акад. К. Попов“, Пловдив. Завършва висшето образование през 1995 г. във – ФМИ на ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив със специализация по „*Алгебра и Теория на Числата*“.

Преподавателската му дейност се извършва в ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив – 1993-1994, ОМГ „Акад. К. Попов“, Пловдив – 1995, ЦУНТ, Пловдив – 1995-1996, 127 СОУ „И. Н. Денкоглу“, София – 2002-2016, НУТИ, София – 2010-2011, ТУ, София – 2017-2018.

Владее руски, английски, гръцки и турски езици.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

През 1936 година, американският (и унгарски) математик Джон фон Нойман дефинира така наречените регулярни пръстени по следния начин: За всеки елемент r на такъв пръстен R, съществува друг негов елемент а така, че $r = rar$. Булевите пръстени са регулярни в смисъла на фон Нойман. Други важни примери са произволните полета, както и стандартният (пълен) пръстен от линейните трансформации на произволно векторно пространство над тяло. Удовлетворителна структурна характеризация на тези пръстени е неизвестна и досега в общия случай, но все пак комутативните регулярни пръстени на фон Нойман могат да се опишат, като тези пръстени без ненулеви нилпотентни елементи, за които всеки прост идеал е максимален. Освен това, друго интересно свойство е, че произволно директно произведение на регулярни пръстени е отново регулярен пръстен.

Регулярните и обратимо-регулярните пръстени на фон Нойман са обект на многобройни изследвания и многочислени обобщения. В резултат на това, канадският математик Николсън въвежда през 1977 година следния фундаментален клас от пръстени: Пръстенът R се нарича чист, ако за всеки негов елемент r съществуват обратим елемент $u\in U(R)$ и идемпотент $e \in Id(R)$ така, че $r = u + e$. Този клас от пръстени е значително широк и в частност съдържа всички артинови пръстени (така и всички крайни пръстени), както и всички обратиморегулярни пръстени по теоремата на Камило-Курана. Канадският математик Николсън въвежда и класа от разменни пръстени. Фактологически, разменните пръстени са въведе ни за първи път от Уорфилд в, но по различен начин, а именно чрез използване на теория на модулите, а първи теоретико-пръстенов поелементов критерий е даден от Монк. Въпреки всичко, до този момент не е известна цялостна характеризация, която да определя алгебричната структура на чистите и разменните пръстени с точност до изоморфизъм, затова тяхното интензивно изучаване продължава усилено от много учени и до днес. Ето защо получаването на нови резултати в това направление биха били от някакъв интерес.

В дисертационният труд е дадена такава пълна характеризация за някои разновидности на чистите пръстени, които сформират все още твърде широки класове от пръстени, описвайки техните изоморфни класификации и алгебрични състояния.

4. Познаване на проблема

Докторантът добре познава проблемите, които решава и владее апарата на съвременната алгебра за третиране на този род проблеми. Много добре е запознат с получените резултати в това направлени, като за целта е проучил голям брой публикации, които е цитирал в списъка на литературата.

5. Методика на изследването

Изследването се основава на много доброто владеене на теорията на асоциативните пръстени с единица, както и на мултипликативните групи на някои известни класове пръстени.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Дисертационният труд е структуриран в уводна част, три параграфа, заключение, списък от 7 публикации по темата на дисертацията, библиография от 45 източника на латиница, както и 3 на кирилица, някои специални означения и общо съдържание. Цялостният обем на дисертационния труд е 54 страници.

Уводната част е оформена в два параграфа - като актуалност на проблематиката и цели и задачи на дисертационния труд. Дадени са редица определения на специални видоде асоциативни пръстени, а също и известни резултати в тази връзка.

В § 1 се прави описание на UU пръстени или пръстени с унипотентни единици (ако $U(R) = 1+Nil(R)$). Класически примери за такива пръстени са всички булеви пръстени, всички комутативни и некомутативни свободни алгебри над полето $\mathbf{Z}_2$, както и полиномния пръстен $\mathbf{Z}_2$ [X] над $\mathbf{Z}_2$. В Теорема 1.1 се доказва, че пръстенът R е UU

пръстен тогава и само тогава, когато $2 \in Nil(R)$ и $U(R)$ е 2-група. Също така се разглеждат *WUU* пръстени или пръстени със слабо унипотентни единици, (ако $U(R) = \pm 1 + Nil(R)$). В Теорема 1.2 се доказва, че пръстенът R е чист *WUU* пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R{=}J(R)$ е или булев, или $\mathbf{Z}_3$, или тяхно директно произведение. Като следствие се получава, че пръстенът R е чист *UU* пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R{=}J(R)$ е булев.

В § 2 се изследват нил-чисти и слабо нил-чисти пръстени. Пръстенът R се нарича нил-чист, ако $R = Nil(R) + Id(R)$. В Теорема 2.1 се доказва, че ако R е комутативен нил-чист пръстен, то $\mathbf{M}\mathrm{n}(R)$ е нил-чист пръстен за всяко цяло положително число n. Пръстенът R се нарича слабо нил-чист, ако $R = Nil(R) \pm Id(R)$. В Теорема 2.2 се доказва, че пръстенът R е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато R е или нил-чист пръстен, или $J(R)$ е нил идеал и фактор-пръстенът $R{=}J(R)$ е изоморфен на $\mathbf{Z}_3$, или R е директно произведение на два такива пръстена.

В § 3.1 и 3.2 се разглеждат някои приложения на получените резултати в предишните два параграфа. Нека G е адитивно записана абелева група с пръстен от ендоморфизми $E(G)$. Един от основните проблеми в теория на абелевите групи е да се опише този пръстен в зависимост от групата и също как той влияе на нейната структура. В частност, актуален е и въпросът, кога $E(G)$ е чист пръстен или с други думи, кога G е чиста група? Пълен отговор на този въпрос не е получен и до сега. В Теорема 3.1 се доказва, че са в сила следните две твърдения: (а) Групата G от краен ранг е нил-чиста тогава и само тогава, когато тя е крайна 2-група. (б) Групата G е силно нил-чиста тогава и само тогава, когато тя е циклична 2-група.

В § 3.1 се разглежда R - комутативен пръстен с единичен елемент и нил-радикал $N(R)$, а G е мултипликативно записана абелева група. Както е обичайно с $R[G]$ се означава груповия пръстен на G над R, състоящ се от всички формални крайни линейни комбинации на елементи от G с коефициенти от R, образуващи базис. Един от основните проблеми в теоретико-пръстеновите свойства на груповите алгебри е да се намери критерий кога $R[G]$ е чист пръстен. Този въпрос е нерешен и до днес, поради широтата на класа от чисти пръстени, В Теорема 3.2 се доказва, че ако R е комутативен пръстен с единица и G е абелева група. Груповият пръстен $R[G]$ е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато точно едно от следните три условия е изпълнено: (i) R е нил-чист пръстен и G е нетривиална 2-група; (ii) $R/N(R) \cong \mathbf{Z}_3$ и G е нетривиална 3-група; (iii) R е слабо нил-чист пръстен и G е тривиалната група.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

След запознаване с дисертационния труд, констатирам, че основната цели и задачи на дисертацията са изпълнени. Приемам приносите, описани в заключението на дисертационния труд, а именно:

(а) Ако R е комутативен нил-чист пръстен, то матричният пръстен $\mathbf{M}\mathrm{n}(R)$ е също нил-чист за всяко $n \geq 1$.

(б) Ако R е комутативен слабо нил-чист пръстен, който не е нил-чист (например $\mathbf{Z}_3$), то матричният пръстен $\mathbf{M}n(R)$ не е слабо нил-чист, ако $n \geq 2$.

(в) Пръстенът R е *UU* тогава и само тогава, когато $\mathrm{char}(R) = 2^t$ за някое естествено число t и $U(R)$ е 2-група.

(г) Пръстенът R е разменен *WUU* пръстен тогава и само тогава, когато $J(R)$ е нил идеал и $R/J(R) \cong B$ или $R/J(R) \cong \mathbf{Z}_3$ или $R/J(R) \cong \mathrm{B}\mathrm{x}\mathbf{Z}_3$, където B е булев пръстен.

(д) Пръстенът R е слабо нил-чист пръстен тогава и само тогава, когато $R = R_1 \mathrm{x} R_2$, където R_1 е нил-чист пръстен, а R_2 е или нулевия пръстен или е пръстен, за който $R_2/J(R_2) \cong \mathbf{Z}_3$ и $J(R_2)$ е нил идеал.

(е) Абелевата група G е силно-нил чиста, т.е. нейният пръстен от ендоморфизми $E(G)$ е силно нил-чист, тогава и само тогава, когато групата G е циклична 2-група.

(ж) Комутативният групов пръстен $R[G]$ е слабо нил-чист тогава и само тогава, когато R е нил-чист пръстен и G е 2-група, или $R/\mathrm{N}(\mathrm{R}) \cong \mathbf{Z}_3$ и G е 3-група, или R е слабо нил-чист пръстен и $G = \{1\}$.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

По темата на дисертационния труд има 7 излезли от печат публикации. Всичките са на английски език в чуждестранни списания. От тях 4 са с импакт фактор, като общата стойност на импакт фактора (JCR според Thomson-Reuters) е 2,563. Всички те са в съавторство. Считам, че приносът на докторантът в съвместните публикации е неоспорим. За отбелязване е, че един от съавторите е известният специалист от Хонг-Конг по квадратични форми и асоциативни пръстени T. Y. Lam. Останалите 3 публикации са самостоятелни. За високата научна стойност на публикациите говори и фактът, че те имат общо 51 цитирания от 29 автори.

9. Автореферат

Авторефератът е на 28 страници и съдържа основните резултати, получени в дисертационния труд. Той отразява достатъчно пълно съдържанието на дисертационния труд и основните приноси на дисертанта. Авторефератът дава представа за изследваните проблеми и получените резултати. В автореферата са дадени целите и задачите на дисертационния труд, отделени са основните резултати и перспективите на изследванията по тази тематика.

10. Критични забележки и препоръки

Изложението може да бъде по-подробно и по-добре оформено. Липсва увод, в който да бъдат отбелязани основните понятия, резултати и описание на параграфите. По принцип е по-добре дисертацията да има увод, глави и параграфи. Общият брой страници с всички включени допълнителни материали е 54, от които само 35 съдържат основния текст от параграфи 1, 2 и 3. Независимо, че в областта на математиката обемът не играе толкова важна роля, прекалената краткост затруднява възприемането на материала. Например, между теоремите е добре да има повече обяснения и примери.

11. Препоръки за бъдещо използване на дисертационните приноси и резултати

Убеден съм, че получените резултати ще се използват в бъдещи изследвания в тази област. Освен това дисертантът в автореферата си е посочил какви проблеми могат да се решават, като се използват резултатите от дисертацията.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд ***съдържа научни, научно-приложни и приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката*** и **отговарят на** изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България

(ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ИМИ на БАН. Представените материали и дисертационни резултати **напълно** съответстват на специфичните изисквания на ИМИ, приети във връзка с Правилника на ИМИ за приложение на ЗРАСРБ.

Дисертационният труд показва, че докторантът Петър Василев Данчев **притежава** задълбочени теоретични знания и професионални умения по научна специалност Алгебра и теория на числата, като **демонстрира** качества и умения за самостоятелно провеждане на научно изследване.

Поради гореизложеното, давам своята ***положителна оценка*** за проведеното изследване, представено от рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и ***предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен 'доктор'*** на Петър Василев Данчев в област на висше образование:, 4. *Природни науки, математика и информатика*, професионално направление 4.5. *Математика* , Докторска програма *Алгебра и теория на числа*

15.01. 2018

Рецензент :

(проф. д.н. Иво Михайлов Михайлов)