Авторска справка за научните приноси на трудовете

Общият брой на научните публикации е 24. За този конкурс са представени 10 публикации. Представените за конкурса научни трудове тематично попадат в следните две направления: теоретичен и числен анализ на процеси и приложения 1. в инженерните и 2. в биологичните науки.

1. Приложения в инженерните науки

Построение на габоров фрейм (статия [4])

Габоровите системи служат като базова структура за дискретно представяне на сигнали като сбор от транслирани и модулирани копия на функция-прозорец g, като по този начин се осигурява подходящо времево-честотно представяне на функции и обобщени функции. Под габорова система ще се подразбира множеството $(g, \Lambda) = \{T_x M_\omega g : (x, \omega) \in \Lambda\}$ където T_x е транслация $(T_x g)(y) = g(y-x), x \in \mathbb{R}^d$, а M_ω е модулация $(M_\omega g)(y) = e^{2\pi i \omega y} g(y), \omega \in \mathbb{R}^d$, а g е функция-прозорец[3]. Множеството от транслационни и модулационни параметри $\{(x, \omega)\}$ е решетка от пълен ранг в $\mathbb{R}^{2d}$, $\Lambda = \mathbf{A}\mathbb{Z}^{2d}$, където матрицата $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(2d), \det \mathbf{A} \neq 0$, и плътността на решетката е $|\det \mathbf{A}|^{-1}$. Развитие на f в ред

$$f = \sum_{(x,\omega)\in\Lambda} c(x, \omega) T_x M_\omega g, \quad c : \Lambda \to \mathbb{C}, g \in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{1}$$

е от полза, ако редът е абсолютно сходящ и пресмятането и съхраняването на коефициентите $\{c(x, \omega)\}_{(x,\omega)\in\Lambda}$ е бързо и ефективно.

Разглежданите в [4] габорови системи са фреймове и следователно притежават гореизброените свойства. Описани са много критерии[4], които дадена габорова система (g, Λ) трябва да изпълнява, за да бъде фрейм за $L^2(\mathbb{R}^d)$. В едномерния случай $(d = 1)$ габоровите фреймове са напълно характеризирани[5].

Построението на габорови фреймове за решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2d}, d \geq 2$ е много по-трудна задача. За диагонално породени решетки (при които $\mathbf{A}$ е диагонална матрица) явно построение на функция-прозорец g е дадено от Daubechies, Grossman и Meyer[6]. За всяка решетка $\Lambda = \alpha\mathbf{A}\mathbb{Z}^{2d}$ (със симплектична матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{Sp}(d)$ и $\alpha < 1$) не е трудно

[3] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[4] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, vol. 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992; A.J.E.M. Janssen. Signal analytic proofs of two basic results on lattice expansions. *Appl. Comput. Harmon. Analysis*, 1(4): 350-354, 1994.

[5] Y. I. Lyubarskij. Frames in the Bargmann space of entire functions. In: *Entire and Subharmonic Functions*, vol. 11 of *Adv. Soviet Math.*, p. 167-180. Amer. Math. Soc., Providence, 1992; K. Seip and R. Wallstén. Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II. *J. Reine Angew. Math.*, 429: 107-113, 1992.

[6] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27(5): 1271-1283, 1986.

да се построи габоров фрейм за $L^2(\mathbb{R}^d)$ като се използва образът на габоров фрейм $(g, \alpha\mathbb{Z}^{2d})$ при метаплектична трансформация[3].

Съществуването на габорови фреймове за произволни решетки $\Lambda = \mathbf{A}\mathbb{Z}^{2d}, d \geq 1$ с плътност по-голяма от 1 е доказано от Bekka[7]. За съжаление доказателството на Bekka не е конструктивно и не построява функцията-прозорец за фрейма, а гарантира единствено, че тя принадлежи на функционното пространство $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Явна конструкция на габоров фрейм за $L^2(\mathbb{R}^d), d \geq 2$ е дадена от Han и Wang[8] в случая на сепарабелни решетки $\Lambda = A\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, където $0 < \det A \leq 1$. Авторите показват, че ако плътността на такава решетка е 1, решетката допуска габоров ортонормиран базис, а ако плътността е по-голяма от 1, габоров фрейм. Обаче построените от Han и Wang функции-прозорци са индикаторни функции върху фундаментални области, а тези области могат да бъдат и неограничени в $\mathbb{R}^d$, което означава, че функциите-прозорци не са локализирани нито по време, нито по честота.

Целта на [4] е да изведе резултати за съществуването и да даде примери за построение на габоров фрейм (g, Λ) за $L^2(\mathbb{R}^2)$ с функция-прозорец $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с компактен носител и сепарабелна решетка Λ с плътност, по-голяма от 1. Мотивацията за тази задача е, че в радиосъобщенията при ограничението на диапазона на честотите в определен обхват (за да се осигури подялбата на радиоспектъра между различни потребители) изниква проблем за лоша локализация във времевата област. Наистина, щом g е с компактен носител, габоровите коефициенти $\langle f, T_x M_\omega g\rangle$ съдържат добра локална информация за сигнала f във времевата област. Но щом g е прекъсната, коефициентите $\langle \hat{f}, M_x T_\omega \hat{g}\rangle$ не носят информация за локално съдържание в честотната област, защото $\hat{g}$ е много бавно намаляваща в $\mathbb{R}^d$ (това следва от принципа на неопределеност). Класически резултат[9] постановява, че гладкост във времевата област при g означава бързо намаляване в честотната област при $\hat{g}$, и съответно по-добра времево-честотна локализация на f. Работата с представяне като (1) е улеснена, ако (g, Λ) е ортонормиран базис с добра времево-честотна локализация на функцията-прозорец. Известно е обаче, че това не е възможно[10] - *добра времево-честотна локализация* на функцията-прозорец е несъвместима с *еднозначност*, *пълнота* и *абсолютна сходимост* (каквито притежава ортнонормираният базис).

---

[7] B. Bekka. Square integrable representations, von Neumann algebras and an application to Gabor analysis. *J. Four. Analysis Appl.*, 10(4):325-349, 2004.

[8] D. Han and Y. Wang. Lattice tiling and the Weyl-Heisenberg frames. *Geom. Funct. Analysis*, 11(4): 742-758, 2001; D. Han and Y. Wang. The existence of Gabor bases and frames. In: *Wavelets, Frames and Operator Theory*, vol. 345, *Contemp. Math.*, p. 183-192. Amer. Math. Soc., Providence, 2004.

[9] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Dover Publications Inc., New York, corrected edition, 1976.

[10] J.J. Benedetto, W. Czaja, and A. Y. Maltsev. The Balian-Low theorem for the symplectic form on $\mathbb{R}^{2d}$. *J. Math. Phys.*, 44(4): 1735-1750, 2003; J.J. Benedetto, C. Heil, and D. F. Walnut. Gabor systems and the Balian-Low theorem. In: *Gabor analysis and Algorithms*, p. 85-122. Birkhäuser, Boston, 1998; W. Czaja and A. M. Powell. Recent developments in the Balian-Low theorem. In: *Harmonic Analysis and Applications*, p. 79-100. Birkhäuser, Boston, 2006; K. Gröchenig, D. Han, C. Heil, and G. Kutyniok. The Balian-Low theorem for symplectic lattices in higher dimensions. *Appl. Comput. Harm. Analysis*, 13(2): 169-176, 2003.

Явни построения на габоров фрейм са редки и в повечето случаи са за едномерния случай $L^2(\mathbb{R})$. Първи основен принос на [4] е в доразвиването на геометричния подход на Han и Wang[8], за да се построят габорови фреймови с гладки и компактни g в по-високи измерения $d \geq 2$. За тази цел се изследват двойки решетки с равна плътност, допускащи обща фундаментална област, която е компактна и има звездовидна форма. Това геометрично условие позволява построението на функция-прозорец g с необходимите свойства. Второ, представени са конкретни примери на такива решетки (Глава 5 в [4]) и алгоритъм за явно построение на g ([4], Теорема 4.2 и сл.) Тези резултати са разширени и за други класове решетки, породени от долно-диагонални матрици със специални свойства (Следствие 4.5). Допълнително са дадени примери (Теорема 5.4) за по-общи класове от двойки решетки, които се подчиняват на условията за съществуване на обща фундаментална област, която да е компактна и да има звездовидна форма. Трето, разгледани са органиченията на този геометричен метод за построение: например Твърдение 5.3 в [4] дава контрапример за двойка решетки, които не допускат обща фундаментална област с горните свойства.

Статия 4 има 11 забелязани цитирания.

Принцип за неопределеност на функции (публикации [6,9,10])

Принципът за неопределеност на функции, дефинирани върху крайни абелеви групи G, поставя зависимост между кардиналността $\|f\|_0$ на функцията-вектор $f \in \mathbb{C}^G$ (която се означава с $\|f\|_0 := \#\{i, 1 < i < |G| : f(i) \neq 0\}$, или броят на ненулевите елементи в f) и кардиналността $\|\hat{f}\|_0$ на фуриеровата ѝ трансформация $\hat{f}$, дефинирана върху дуалната група $\hat{G}$.

Този принцип постановява, че кардиналностите на f и $\hat{f}$ изпълняват следното неравенство[11]

$$\|f\|_0 \cdot \|\hat{f}\|_0 \geq |G|, \tag{2}$$

където $|G|$ е редът на групата. Принципът на неопределеност намира широки приложения в няколко области на телекомуникациите: например, при т.нар. *сбито добиване* (англ. *compressed sensing*, или метод за намиране на най-рядкото решение x (т.е. с цел $\|x\|_0 \to \min$) на неопределена линейна система) и в частност при възстановяването на сигнали с големи загуби при допускане на ограничено спектрално съдържание на сигнала[12].

Горното неравенство (2) е частично подобрено от Meshulam[13] в случая на абелеви

---

[11] D. Donoho and P. Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM J. Appl. Math.*, 49: 906-931, 1989; K. Gröchenig. Uncertainty principles for time-frequency representations. In: *Advances in Gabor Analysis*, p. 11-30. Birkhäuser, Boston, 2003; E. Matusiak, M. Özaydin, and T. Przebinda. The Donoho-Stark uncertainty principle for a finite abelian group. A*cta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 73(2): 155-160, 2004.

[12] E.J. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 52:489-509, 2006.

[13] R. Meshulam. An uncertainty inequality for finite abelian groups. *Eur. J. Combin.*, 27: 227-254, 2006.

групи от произволен ред. Резултатът на Meshulam[13] гласи: нека

$$\theta(G,k) = \min\{\|\hat{f}\|_0 : f \in \mathbb{C}^G, 0 < \|f\|_0 \le k\}.$$

За $k \le |G|$, нека d_1 е най-големият делител на $|G|$, по-малък от или равен на k, а d_2 е най-малкият делител на $|G|$, по-голям от или равен на k. Тогава

$$\theta(G,k) \ge \frac{|G|}{d_1 d_2}(d_1 + d_2 - k). \tag{3}$$

Неравенството (2) е значително е подобрено от Tao[14]: ако редът на групата е просто число, то за $f \neq 0$,

$$\|f\|_0 + \|\hat{f}\| \ge |G| + 1.$$

Основните приноси на [6] са в няколко насоки и засягат както принципа за неопределеност, основан на класическата фуриерова трансформация, така и принципа за неопределеност, основан на габоровата трансформация. Всъщност към момента на публикуване на [6] през 2007 г. принципът за неопределеност за габорова трансформация беше съвсем нова област.

Първо, в [6] е дадено ново доказателство на неравенството (2) на Meshulam[13]. Второ, в [6] са доказани зависимости между кардиналността на $V_g f := \{\langle f, T_x M_\omega g\rangle : (x,\omega) \in G \times \hat{G}\}$ и кардиналността на функцията f и функцията-прозорец g (твърдения 4.1-4.3).

Основният принос на [6] обаче е значителното подобрение на тези зависимости, като се използва структурата на подгрупите на G или се избират подходящи функции-прозорци g. Теорема 4.5 от [6] доказва, че за всяка група G от прост ред е изпълнено

$$\|f\|_0 + \|V_g f\|_0 \ge |G|^2 + 1,$$

за $f \neq 0$ и почти всяка функция-прозорец g. Това неравенство е аналогично на неравенството на Tao[14] за фуриеровата трансформация. Следователно за групи G от прост ред, допустимите наредени двойки $(\|f\|_0, \|V_g f\|_0) = (a, |G|^2 - b)$ съответстват на допустимите наредени двойки $(\|f\|_0, \|\hat{f}\|_0) = (a, |G| - b)$ за $f \in \mathbb{C}^G, f \neq 0, 0 < a, b < |G|$.

Статия [6] има две забелязани цитирания.

В статия [10] се изследва как кардиналността на дадена функция е свързана с кардиналността на фуриеровата и габоровата ѝ трансформация. Първият основен принос е пресмятането по числен път, че неравенството на Meshulam не е строго в следния смисъл: не всички наредени двойки числа, които изпълняват неравенството (2), са допустими наредени двойки $(\|f\|_0, \|\hat{f}\|_0)$. На фиг. 2 в [10] са изобразени допустимите наредени двойки $(\|f\|_0, \|\hat{f}\|_0), f \in \mathbb{C}^G, f \neq 0$ за трите групи от осми ред: $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Вижда се, че различни групи допускат различни наредени двойки, въпреки че са от еднакъв ред.

---

[14] T. Tao. An uncertainty principle for cyclic groups of prime order. *Math. Res. Lett.*, 12:121-127, 2005

Втори основен принос на [10] е пресмятането по числен път, че за някои циклични групи от нисък ред допустимите наредени двойки $(\|f\|_0, \|V_g f\|_0) = (a, |G|^2 - b)$ съответстват на допустимите наредени двойки $(\|f\|_0, \|\hat{f}\|_0) = (a, |G| - b)$ за $f \in \mathbb{C}^G, f \neq 0, 0 < a, b < |G|$. Това означава, че множеството допустими наредени двойки при фуриерова транформация (като на фиг.2 в [10]) може да бъде наложено като силует върху множеството допустими наредени двойки при габорова трансформация и да съвпадне с него (срв. фиг. 3 в [10]). При нециклични групи (например $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$) е установено по числен път, че допустимите наредени двойки на фуриерова $(\|f\|_0, \|\hat{f}\|_0)$ и на габорова трансформация $(\|f\|_0, \|V_g f\|_0)$ не съвпадат. Поставен е въпросът дали описаното съвпадение важи обаче за всички крайни циклични групи, на който бе даден утвърдителен отговор през 2015 г. от Malikiosis[15].

В статии [9,10] са разгледани приложения на принципа на неопределеност в следните инженерни области: канали с изтриване[16] и възстановяване на сигнали с редки представяния (*sparse representation*) [17]. Нека $\{\phi_k\}_{k\in K}$ е фрейм за $\mathbb{C}^G$. За кодиране на сигнал $f \in \mathbb{C}^G$ се пресмятат коефициентите $\{\langle f, \phi_k\rangle\}_K$ и се пращат през телекомуникационния канал. За декодирането се използва дуален фрейм $\{\phi'_k\}_{k\in K}$ и f се пресмята по формулата

$$f = \sum_{k\in K} \langle f, \phi_k\rangle \phi'_k.$$

Заради смущения при пращането някои коефициенти могат да бъдат загубени. При канал с изтриване се получават само част от закодираните коефициенти на сигнала, $\{\langle f, \phi_k\rangle\}_{K'}, K' \subset K$. Фреймът $\{\phi_k\}_{k\in K}$ за $\mathbb{C}^G$ се нарича *максимално устойчив на изтриване*, ако след премахването на произволни $l \leq |K| - |G|$ елемента от $\{\phi_k\}$, той остава фрейм[18]. Тези фреймове се използват при възстановяването на сигнали, пратени през канали с изтриване. Резултатите от [6, 9, 10] установяват съществуването на габоров фрейм, който е максимално устойчив на изтриване, за всички групи $\mathbb{Z}_p$, където p е просто число, и за цикличните групи $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$.

Статия [9] представя и приложение към възстановяване на сигнали с редки представяния. Задачата е да се възстанови еднозначно сигнал f по малък брой извадки, ако е известно, че в развитие в даден речник f има малък брой ненулеви коефициенти. Нека $\mathcal{D} = \{g_0, \dots g_{n-1}\}$ е речник от n вектора в $\mathbb{C}^m$. Множеството от вектори с k-рядко представяне в $\mathcal{D}$ е означено с

$$S_k^{\mathcal{D}} = \{f \in \mathbb{C}^m : f = \sum_j c_j g_j, \forall\{c\} : \|c\|_0 \leq k\}.$$

[15] R.D. Malikiosis. A note on Gabor frames in finite dimensions. *Appl. Comput. Harmon. Analysis* 38: 318-330, 2015.

[16] V.K. Goyal and J. Kovačević. Quantized frame expansions with erasures. *Appl. Comput. Harm. Analysis*, 10: 203-233, 2001.

[17] T. Strohmer and R.W. Heath, Jr. Grassmanian frames with applications to coding and communications. *Appl. Comput. Harm. Analysis* 14(3): 257-275, 2003.

[18] P.G. Casazza and J. Kovačević. Equal-norm tight frames with erasures. *Adv. Comput. Math.* 18: 387-430, 2003.

Например, като речник за представяне на сигнали $f \in \mathbb{C}^G$ може да се използват честотите от дуалната група, $\mathcal{D} = \{\xi\}_{\hat{G}}$ (фуриеров ред), а извадките са фуриеровите коефициенти. Ако за речник се използва габорова система, т.е. $\mathcal{D} = (g, G \times \hat{G})$ (която съдържа $|G|^2$ елемента), извадките съответстват на габоровите коефициенти $V_g f(x, \omega), x \in G, \omega \in \hat{G}$. В [9] е поставен въпросът колко габорови коефициента са необходими, за да се възстанови еднозначно f, ако $\|f\|_0 \leq k$. С помощта на резултата от [6] е показано, че за групи G от прост ред е достатъчна извадка от $|G|$ габорови коефициента, за да се възстанови еднозначно f. Освен това е показано за всяко множество $\Lambda \subset G \times \hat{G}$, че ако $\|f\|_0 \leq |\Lambda|/2$, f е еднозначно определен от Λ и извадката от габоровите коефициенти $\{V_g f\}_\Lambda$. В [10] е показано по числен път, че този резултат важи и за цикличните групи $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$.

Идентифициране на оператори (публикация [5])

В [5] се изследва проблема за идентифициране на оператори с времево-честотно представяне. Целта на идентифицирането е да се възстанови непълно известен оператор (от дадено множество оператори) от единствено наблюдение на вход и изход на телекомуникационния канал. С други думи, за нормирани линейни пространства X, Y и множество от линейни оператори $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, трябва да се намери елемент $f \in X$ такъв, че изображението

$$\Phi_f : \mathcal{H} \to Y, \quad \Phi_f H := Hf$$

да е ограничено и стабилно. Тогава се казва, че множеството от оператори $\mathcal{H}$ е *идентифицируемо* чрез f.

Действието на хилберт-шмитови оператор върху $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ може да се представи чрез интеграл от транслации и модулации така:

$$Hf := \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \eta_H(t, \nu) T_t M_\nu f \, d(t, \nu),$$

където η_H е *спрединг-функцията* (*spreading function*) на оператора H. В [5] се изследват класове от хилберт-шмитови оператори $\mathcal{H}$, чиито спрединг-функции имат времево-честотно представяне, т.е.

$$\eta_H \in \operatorname{span}\{T_x M_\omega \eta_0 : (x, \omega) \in \Lambda\},$$

за решетка $\Lambda \in \mathbb{R}^{4d}$ и $\eta_0 \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Габоровото развитие на спрединг-функцията

$$\eta_H = \sum_{(x,\omega)\in\Lambda} c_{(x,\omega)} T_x M_\omega \eta_0$$

дава еквивалентно развитие на оператора H в пространството от хилберт-шмитови (*Hilbert-Schmidt*) оператори в следния ред

$$H = \sum_{(x,\omega)\in\Lambda} c_{(x,\omega)} H_{(x,\omega)},$$

където $H_{(x,\omega)}$ е операторът със спрединг-функция $T_x M_\omega \eta_0$.

Следователно потенциално важни критерии за идентифицируемост на множеството $\mathcal{H}$ са структурата на решетката Λ (зададена чрез параметризацията ѝ в $\mathbb{R}^{4d}$) и свойствата на спрединг-функцията η_0 и свързания с нея прототипен оператор H_0.

Подходът за идентифициране на множеството $\mathcal{H}$ е основан върху необходимостта от еднозначно пресмятане на коефициентите $\{c_{(x,\omega)}\}$ от габоровото развитие на η_H. Коефициентите могат да бъдат пресметнати от дискретното габорово развитие чрез решаване на (безкрайномерна) линейна система, зависеща от η_0 и Λ. Важно е коефициентите $\{c_{(x,\omega)}\}$ да са еднозначно определени от η_H, което означава, че (η_0, Λ) е Riesz-ова редица[19] в $L^2(\mathbb{R}^{2d})$. Това условие поставя следната зависимост между хилберт-шмитовата норма на оператор $H \in \mathcal{H}$ и ℓ^2-нормата на коефициентите от габоровото развитие на η_H по $\{T_x M_\omega \eta_0 : (x,\omega) \in \Lambda\}$:

$$\|H\|_{HS} = \left\| \sum_{(x,\omega)} c_{(x,\omega)} H_{(x,\omega)} \right\|_{HS} = \left\| \sum_{(x,\omega)} c_{(x,\omega)} T_x M_\omega \eta_0 \right\|_2 \asymp \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}.$$

Следователно за да се покаже, че множеството $\mathcal{H}$ е идентифицируемо, е достатъчно да се намери обобщена функция f, такава че редицата $\{H_{(x,\omega)} f : (x,\omega) \in \Lambda\}$ да е Riesz-ова редица в $L^2(\mathbb{R}^d)$. Така се удовлетворява тъждеството на нормите

$$\|Hf\|_2 = \left\| \sum_{(x,\omega)} c_{(x,\omega)} H_{(x,\omega)} f \right\|_2 \asymp \|\mathbf{c}\|_{\ell^2}.$$

а тъждеството между $\|H\|_{HS}$ и $\|Hf\|_2$ показва идентифицируемост чрез f. За да се установи неидентифицируемост, е достатъчно да се покаже, че изображението $\Phi_f : H \to Hf$ *не е обратимо* в даденото модулационно пространство[3] (например, $M^\infty(\mathbb{R}^d)$, което съдържа единичния импулс δ_0[3]).

Трябва да се отбележи, че операторите действат върху обобщени функции, дефинирани върху d-мерно пространство, докато спрединг-функциите са дефинирани върху $2d$-мерно пространство. Следователно едно единствено пресмятане на $\Phi_f(H)$ не може да определи оператора H (поради очевидна разлика в размерността!) и трябва да се въведе някакво *a priori* ограничение на множеството $\mathcal{H}$. Нека множеството от индекси в решетката Λ на габоровата система (η_0, Λ) да бъде $2d$-мерно. Основната цел на [5] е да се изследва връзката между идентифицируемост на класа оператори и някаква естествена мярка, характеризираща множеството от индекси в решетката Λ, както е направено от Kozek и Pfander[20] за повърхнината на носителя на спрединг-функцията η_H. Аналогично в [5] е въведена нова мярка - 2-плътност на Бьорлинг $D_2(\Lambda)$ за множество от точки Λ, които са разположени в $2d$-мерни подпространства в $\mathbb{R}^{4d}$ (дефиниция 4.2 в [5]).

[19] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser, 2003.

[20] W. Kozek and G. Pfander. Identification of operators with bandlimited symbols. *SIAM J. Math. Analysis*, 37(3): 867-888, 2005.

Сътжденията, чиято валидност е обследвана в [5], са: *Съществуват константи* $c, C > 0$ *такива, че*

1. $D_2(\Lambda) > C \Longrightarrow \mathcal{H}$ не е идентифицируемо.

2. $D_2(\Lambda) < c \Longrightarrow \mathcal{H}$ е идентифицируемо.

Основните приноси на [5] са: първо, показано е, че съществуването на долна граница C за $D_2(\Lambda)$ не е необходимо условие, за да бъде множеството от съответстващите ѝ оператори $\mathcal{H}$ идентифицируемо. Условието спрединг-функцията η_0 да принадлежи на определени модулационни пространства е понякога достатъчно, за да се докаже неидентифицируемост (Твърдения 4.8, 4.9).

Второ, показано е с примери, че ако η_0 принадлежи на определени модулационни пространства, за определени решетки Λ съществуват константи C (зависещи от решетката Λ), при които *сътждение 1.* важи (Твърдения 4.10, 4.11), както и за подходящи η_0 и решетка Λ съществува и горна граница c такава, че *сътждение 2.* важи (Твърдения 4.14, 4.16, 4.20)

Трето, показано е с пример (Твърдение 4.12), че универсална горна граница c за *2.* не съществува, т.е. дори за произволно малки стойности на c множеството $\mathcal{H}$ остава неидентифицируемо. Освен това е показано с примери, че понякога са необходими допълнителни органичения върху параметрите на Λ, за да бъде задачата за идентифициране добре зададена (Твърдения 4.15, 4.21-4.24).

Четвърто, разгледан е частен случай на решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ и е показано, че за да бъде идентифицируемо произволно множество оператори с $\eta_0 \in M_v^1(\mathbb{R}^2)$ (това е модулационното пространство с полиномно тегло v, $\deg v > 2$, виж Gröchenig[3]), е необходимо $D_2(\Lambda) \leq \sqrt{2}$ (Теорема 5.8). Доказателството използва т.нар. *габорови молекули*[21], като това до момента на публикуване на [5] е първото приложение на този инструмент извън задачата за локализация на елементите на дуалния фрейм, което е основна цел на авторите, въвели го в литературата.

В сравнение с резултатите за едномерния случай[20] резултатите от [5] показват, че задачата за идентифициране на оператори не може да бъде сведена до прости оценки за плътността на решетката Λ. Дори когато са поставени строги ограничения върху спрединг-функциите в многомерния случай такива оценки за плътност не са достатъчен критерий за идентифицируемост на съответното множество хилберт-шмитови оператори.

[21] R. Balan, P. Casazza, C. Heil, and Z. Landau. Density, overcompleteness and localization of frames. I. Theory. *J. Four. Analysis Appl.* 12(2): 105-143, 2006; R. Balan, P. Casazza, C. Heil, and Z. Landau. Density, overcompleteness and localization of frames. II. Gabor systems. *J. Four. Analysis Appl.* 12(3): 309-344, 2006.

2. Приложения в биологичните науки

Модели на регулаторна мрежа за клетъчна полярност (статии [2,3,8])

Статии [2,3,8] са резултат от дейност по интердисциплинарен проект *Dynamik regulatorischer Netzwerke für Zellpolarität* (Динамика на регулаторни мрежи за клетъчна полярност) в рамките на LOEWE Zentrum für synthetische Mikrobiologie в гр. Марбург, Германия. В рамките на проекта се разработват математически модели на регулаторната мрежа за клетъчна полярност при почвената бактерия *Myxococcus xanthus*, изучавана от партньорска лаборатория по микробиология.

Движението на бактерията е тясно свързано с промяна (осцилация) на концентрациите на белтъци MglA и MglB, които обикновено са прикрепени към противоположните полюси на клетката. MglA е на единия полюс, а MglB на срещуположния. С помощта на електронен микроскоп е установено, че преди клетката да промени посоката на движение, MglA и MglB се транспортират по дължината на клетката до противоположния полюс. Въз основа на това наблюдение първоначално се разглеждат няколко основни задачи - в [3] се изследва дали такива осцилации на белтъците непременно трябва да бъдат предизвикани от външни стимули или не.

За тази цел се разработва математически модел за система с 2 белтъка, основан на ЧДУ от реакционно-дифузен тип с нелинейни гранични условия от смесен вид, което го отличава от други модели за транспорт на белтъци[22]. Клетката е моделирана като интервал $[0, 1]$, чиито краища отговарят на полюсите ѝ. Свойствата на решенията на модела са анализирани теоретично и числено с помощта на подходящ софтуер за симулация.

Приносът на [3] е в извеждането на аналитични критерии за наличие на бифуркация на Хопф и граничен цикъл в околността на дадено пространствено хомогенно решение. Понеже форматът на реакционните членове не може да се изясни напълно заради липса на достатъчно експериментални данни, са разгледани различни сценарии, изразени чрез математически формули. В [3] се изследва обстойно т.нар. „сценарий на преследвача“ („stalker scenario“), при който един белтък се стреми да се свърже с полюсите, а другият белтък се стреми да се свърже с първия и да го измести от полюса. В този случай е показано съществуване на периодични решения на системата от ЧДУ, при които концентрациите на белтъците се променят периодически във времето и между двата полюса. Моделът е изследван за стабилност при вариране на параметрите в биологично уместни граници (варират се коефициентите на дифузия и

[22] Виж например M. Howard, A.D. Rutenberg, and S. de Vet. Dynamic compartmentalization of bacteria: accurate division in E. coli. *Phys. Rev. Lett.*, 87(21): 278102, 2001; H. Meinhardt and P.A.J. de Boer. Pattern formation in Escherichia coli: a model for the pole-to-pole oscillations of min proteins and the localization of the division site. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 98: 14202-14207, 2001; K.C. Huang, Y. Meir, and N.S. Wingreen. Dynamic structures in Escherichia coli: spontaneous formation of MinE rings and MinD polar zones. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100(22): 12724-12728, 2003; K. Kruse. A dynamic model for determining the middle of Escherichia coli. *Biophys. J.*, 82: 618- 627, 2002; E.N. Cytrynbaum and B.D.L. Marshall. A multistranded polymer model explains MinDE dynamics in E. coli cell division. *Biophys. J.*, 93: 1134-1150, 2007; M. Loose, E. Fischer-Friedrich, J. Ries, K. Kruse, and P. Schwille. Spatial regulators for bacterial cell division self-organize into surface waves in vitro. *Science* 320: 789-792, 2008.

реакционните коефициенти) и численият анализ показва, че осцилациите са стабилни в широка област на параметрите. Статия [3] е с пет забелязани цитирания.

Приносът на [8] е в извеждането на аналитични условия за наличие на бифуркация на Хопф и граничен цикъл в околността на произволно пространствено хомогенно решение на разгледаната в [3] система ЧДУ. Така се разширяват критериите от [3] до обобщена трансцедентна задача за собствените стойности на линеризирания диференциален оператор при зададените гранични условия, която трябва да бъде решена приближено по числен път. Освен това в [8] се изследва друг възможен от биохимична гледна точка сценарий на взаимодействие между белтъците, който е наречен „сценарий на противника" („antagonist scenario"). В този случай и двата белтъка се отблъскват взаимно от полюсите. Трансцедентната задача е опростена в този частен пример и са изведени критерии в явен вид за бифуркация на Хопф от пространствено хомогенното решение. Статия [8] показва теоретично, че са възможни осцилации без външен стимул, и е приведен пример за периодични решения с числена симулация. Профилът на концентрациите в полюсите има форма на трио-нови зъбци, като максимумите на концентрациите на двата белтъка в полюсите са в противоположни фази във времето. Това съответства на измерванията за белтъците MglA, MglB в лабораторни условия[23] и валидира частично предложения модел.

Моделите от статии [3] и [8] намират приложение в биологията, като описват поведението на щамове-мутанти при *M. xanthus*, които са загубили способността си за неравномерно придвижване и изминават една клетъчна дължина, движейки се напред-назад на едно място. Статия [8] е с едно забелязано цитиране.

В [2] моделите от [3] и [8] са доусъвършенствани, като са взети предвид повече биохимични факти за реакциите между белтъците. Целта е да се построи обобщен модел, който едновременно описва нерегулярното движение на дивия щам на бактерията и движението на щамовете-мутанти, които се движат само в една посока или периодично на едно място. Разглежда се система от три белтъка, включваща белтък MglB, активна GTP и неактивна GDP форма на белтъка MglA, която попада под влиянието на външен сигнал Frz. Единствено GTP формата на MglA може да се прикрепва към полюсите. Сигналът Frz активира GDP формата на MglA, превръщайки я в GTP форма. Frz е моделиран като пулс, който променя конфигурацията на реакционно-дифузната система чрез дестабилизиране на траекторията ѝ.

Приносите на [2] са двустранни. Изведени са, първо, аналитични условия за наличие на бифуркация на Хопф и граничен цикъл в околността на произволно пространствено хомогенно решение, които отново са във вида на трансцедентна задача. Теоретично обобщеният модел е разработен въз основа на „сценария на противника" („antagonist scenario"). Разгледани са различни случаи: на диви бактерии, на периодично движещи се напред-назад бактерии от щам-мутант и на движещи се в една

[23] S. Leonardy, M. Miertzschke, I. Bulyha, E. Sperling, A. Wittinghofer, and L. Søgaard-Andersen. Regulation of dynamic polarity switching in bacteria by a Ras-like G-protein and its cognate GAP. *EMBO J.* 29: 2276-2289, 2010; Y. Zhang, M. Franco, A. Ducret, and T. Mignot. A bacterial Ras-like small GTP-binding protein and its cognate GAP establish a dynamic spatial polarity axis to control directed motility. *PLoS Biol.* 8: e1000430, 2010.

посока бактерии от щам-мутант. Второ, моделът е валидиран чрез сравнение на статистически обработени експериментални данни за неравномерно движещи се бактерии от дивия щам.

Анализ на системи от ЧДУ, използвани в биоматематиката (статии [1,7])

Статия [1] прави математически анализ на система от ЧДУ, която е използвана от Sick, Reinker, Timmer и Schlake[24] в модел за подреждането на космените фоликули при мишки. Това е система реакционно-дифузни уравнения от типа, предложен от Gierer и Meinhardt[25] (активатор и инхибитор с различни коефициенти на дифузия). Тези системи ЧДУ служат като илюстрация на бифуркация на Тюринг, т.е. съществува стойност на бифуркационния параметър, при която пространствено хомогенното решение става локално асимптотично нестабилно и възникват пространствено хетерогенни решения (мотиви, *patterns*). Първият принос на [1] е доказателството на глобално съществуване на решения на тази система, основано на равномерни горни оценки. Втори принос е анализът на параметричните области, в които съществуват пространствено хетерогенни решения на системата (*мотиви*), чрез гранична форма на реакционно-дифузната система. Подобрени са условията върху параметрите, при които съществуват *мотиви*, дадени в Sick, Reinker, Timmer и Schlake[24], като са включени подобласти на парамеричната област, в която съществуват пространствено хетерогенни решения, но *не* съществува тривиалното пространствено хомогенно решение, при което настъпва бифуркация на Тюринг.

Статия [7] продължава изследването от [1] в случая на алгебрично-реакционно-дифузна система, основана на модела на Sick, Reinker, Timmer и Schlake[24], при която коефициентът на дифузия на активатора е равен на 0. Характеризирани са всички регулярни, пространствено хетерогенни решения на системата в краен подинтервал на $\mathbb{R}$ и е доказано, че всички са асимптотично нестабилни. Установено е, че единствените локално асимптотично стабилни решения на задачата са *слаби решения* с големи прекъсвания в точки от интервала. Отбелязано е, че такива локално асимптотично стабилни слаби решения съществуват, понеже не всички органичени слаби решения на разглежданата задача изпълняват критериите за автокатализа, дадени от Marciniak-Czochra, Karch и Suzuki[26]. Статия [7] има едно забелязано цитиране.

София, 25.09.2016 г.

[24]S. Sick, S. Reinker, J. Timmer, and T. Schlake. WNT and DKK determine hair follicle spacing through a reaction-diffusion mechanism. *Science* 314(5804): 1447-1450, 2006.

[25]A. Gierer and H. Meinhardt. A theory of biological pattern formation. *Kybernetik* 12(1): 30-39, 1972.

[26]A. Marciniak-Czochra, G. Karch, and K. Suzuki. Unstable patterns in reaction-diffusion model of early carcinogenesis, *J. Math. Pures Appl.* 99(5): 509-543, 2013; A. Marciniak-Czochra, G. Karch, and K. Suzuki. Instability of Turing patterns in reaction-diffusion-ODE systems. *J. Math. Biol.* 1-36, 2016.