Справка за оригиналните научни приноси

в публикациите на гл. ас. д-р Тихомир Вълчев,

представени за участие в конкурс

за *доцент* в област на висше образование

4. *Природни науки, математика и информатика*,

професионално направление 4.5. *Математика*,

научна специалност *Уравнения на математическата физика*,

обявен в *Държавен вестник*, бр. 108/22.12.2020 г.

Общият списък с научни трудове на кандидата включва 42 заглавия, от които за участие в конкурса са избрани 15: седем самостоятелни и осем в съавторство. Научните работи по конкурса са публикувани през периода 2010-2021 г., т. е. след придобиване на научната и образователна степен *доктор*. Номерацията на публикациите по-долу съвпада с тази от списъка на публикациите за участие в конкурса за *доцент*, вж. *Публ_конкурс.pdf*.

Работите по конкурса са публикувани както следва:

- В списания с импакт фактор: работи [5-7], [9], [13-15] (седем);
- В списания без импакт фактор, но индексирани в Scopus: [11] (една);
- В сборници с трудове от конференции, индексирани в Scopus: работи [2], [3], [10] и [12] (четири);
- В сборници с трудове от конференции, индексирани и реферирани в Zentralblatt и Mathscinet: работи [4] и [8] (две);
- В електронната база данни *arXiv.org*: работа [1] (приета за публикуване в сборник с трудове от конференция)(една).

Сумарният импакт фактор от всички публикации е 8,228, а сумарният SJR индекс е 1,029. За участие в конкурса са представени 28 цитирания (без автоцитирания) от общия брой цитирания на трудове за конкурса.

Научните трудове, представени за участие в конкурса, са посветени на различни въпроси от теорията на непрекъснатите интегруеми системи. По-конкретно в тях се разглеждат системи от частни диференциални уравнения на две независими променливи, които са интегруеми в смисъл на метода на обратната задача на разсейването (МОЗР). Такива системи понякога се обозначават като S-интегруеми (S=scattering). Резултатите в трудовете могат да бъдат отнесени към следните по-тесни тематични направления (цикли):

I. Квадратични снопове;
II. Уравнения от магнитен тип;
III. Други.

I. Квадратични снопове

Този цикъл включва публикациите [7], [10] и [11]. Той е посветен на оператори на разсейването $L(\lambda)$, които са квадратични полиноми на спектралния параметър λ с коефициенти в някаква проста комплексна (матрична) алгебра на Ли g. Интересът към подобни оператори, наричани жаргонно квадратични снопове, се обуславя от факта, че редица напълно интегруеми уравнения с приложения във физиката, като уравнението на Кауп-Нюъл (Kaup-Newell), уравнението на Герджиков-Иванов и др., имат Лаксови представяния, в които участват именно такива оператори на разсейването. Всъщност някои многокомпонентни интегруеми обобщения на уравнението на Кауп-Нюъл, срещащи се в литературата [Fordy A., J. Phys. A: Math. Gen., **17** (1984) 1235-1245], служат като мотивация за изследванията в публикациите от този цикъл.

Разглежданите в [7], [10] и [11] непълни квадратични снопове в канонична калибровка са тясно свързани с ермитови симетрични пространства. Това обстоятелство определя характерна блочна структура на коефициентите на Лаксовите двойки, породена от действието в алгебрата на Ли g на Картановата инволюция, дефинираща дадено ермитово симетрично пространство.

Един от основните въпроси, които се разглеждат в цикъла от работи е развиването на формализма на правата задача на разсейването при нулеви гранични условия, който стои в основата всички разглеждания. Това е направено в [7] и [10] за случая на квадратични снопове за алгебрата $sl(m+n)$, а за квадратични снопове за произволна проста алгебра на Ли g в [11]. Сноповете, изучавани в [10] и [11], са с ермитови коефициенти (ермитова редукция), докато тези в [7] са с малко по-общи псевдоермитови коефициенти (псевдоермитова редукция). Въведени са решения на Йост, фундаментални аналитични решения и данни (матрица) на разсейването, като е обсъдена връзката на МОЗР с локална задача на Риман-Хилберт. Разгледан е и ефектът на наложените редукционни условия върху решенията и данните на разсейването. Това позволява да се опишат спектралните свойства на оператора на разсейването: спектърът на $L(\lambda)$ съдържа непрекъсната част и дискретни собствени стойности. Непрекъснатата част се състои от реалната и имагинерната прави в комплексната λ-равнина, а дискретните собствени стойности се групират по четворки, разположени симетрично относно същите тези прави. Общите конструкции в [11] са илюстрирани за случаите на квадратични снопове, свързани с пространствата $SU(n)/S(U(1)xU(n-1))$ и $SO(2r+1)/SO(2)xSO(2r-1)$

По подобие на всички нелинейни еволюционни уравнения (НЕУ), интегруеми чрез МОЗР, многокомпонентните уравнения на Кауп-Нюъл представляват безкрайномерни хамилтонови системи. В [11] е демонстрирано как с помощта на метода на диагонализация на Лаксовата двойка [Drinfel'd, V., Sokolov, V., Sov. J. Math., **30** (1985) 1975-2036.] могат да се построят запазващите се плътности и съответните им интеграли на движението за цялата интегруема йерархия, свързана с квадратичния сноп. Изведени са общи рекурентни връзки между запазващите се плътности. И тук общите разглеждания са онагледени чрез квадратични снопове, свързани с пространствата $SU(n)/S(U(1)xU(n-1))$ и $SO(2r+1)/SO(2)xSO(2r-1)$, като са получени в явен вид първите няколко запазващи се плътности.

Друга важна задача, която се обсъжда в публикациите [7], [10] и [11], засяга построяването на безотражателни потенциали за квадратичните снопове и съответстващите им решения от солитонен тип. Това е най-простият клас от потенциали, при които матрицата на разсейването е блочно диагонална, в частност може да бъде и просто единичната матрица.

За решаването на тази задача сме се възползвали от факта, че фундаменталните аналитични решения решават и задача на Риман-Хилберт, което насочва към метода на обличането на Захаров-Шабат. Поради това подробно е изложена общата схема за прилагане на метода на обличането към квадратични снопове от съответните типове с помощта на обличащи множители, които са мероморфни функции с прости полюси на параметъра λ. От построените чрез обличане безотражателни потенциали се получават частните решения на дадено НЕУ, принадлежащо на съответната интегруема йерархия, с помощта на прилагане на стандартна процедура по „удължаване" на независимата променлива x. При тази процедура в изразите, в които се среща променливата x, тя се заменя с подходяща линейна функция на x и t, като коефициентът пред t се определя от дисперсионния закон на НЕУ.

Проведеният в [7] анализ показва се, че съществуват различни типове потенциали (решения) в зависимост от положението на полюсите в комплексната равнина. В работите [10] и [11] сме се ограничили със случая, когато полюсите са комплексни числа в общо положение, т.е. имат ненулеви реални и имагинерни части. В този случай се получават безотражателни потенциали (решения) от солитонен тип. В статията [7] е разгледан и случаят, когато полюсите са или реални числа, или имагинерни числа. Това води до израждане на спектъра на оператора $L(\lambda)$, което от своя страна поражда „израждане" на потенциалите (решенията). В резултат на това се получават се квазирационални потенциали (решения). Обща черта на изведените решения, че те не са бягащи вълни.

II. Уравнения от магнитен тип

В това тематично направление се включват публикации [1-6] и [12-15]. Този цикъл от трудове е посветен на многокомпонентни НЕУ, които в известен смисъл се явяват аналози на уравнението за феромагнетика на Хайзенберг (ФХ), което намира приложение във физиката [Takhtadjan L., Faddeev, L., The Hamiltonian Approach to Soliton Theory, 1987]. Основната цел в работите от цикъла е да бъдат построени и изследвани 1+1-мерни НЕУ, които също както ФХ са S-интегруеми. Един тип от НЕУ, които са разгледани в цикъла, притежава оператор на разсейването $L(\lambda)$, който зависи линейно от спектралния параметър λ (линеен сноп в полярна калибровка) по подобие на оригиналния ФХ. Основна разлика с оригиналния ФХ се състои в това, че Лаксовото представяне тук е асоциирано с ермитови симетрични пространства, което изисква и налагането на по-обща алгебрична връзка върху потенциала. Втори тип от изучавани НЕУ имат Лаксово представяне от вида на рационален сноп, отново свързан с ермитови симетрични пространства. Тези НЕУ могат да бъдат разглеждани като S-интегруеми деформации на свързаните с линеен сноп НЕУ.

Разглежданите линейни и рационални снопове са с коефициенти в алгебрата $sl(n,C)$ или в алгебрата $so(n,C)$. По аналогия с коментираните в предишното тематично направление случаи и тук връзката на сноповете с ермитовите симетрични пространства е посредством блочната структура на коефициентите на Лаксовите оператори, породена от действието на картановите инволюции, участващи в дефиницията на съответните симетрични пространства.

В работите [1-6], [12], [13] и [15] се разглеждат линейни снопове в полярна калибровка и свързаните с тях аналози на ФХ. По-специално в [15] е въведено ново матрично НЕУ, което представлява, условие за нулевата кривина на Лаксова двойка, свързана с пространството *SU(n)/S(U(m)×U(n-m))* при наложена ермитова редукция. Този резултат е обобщен за линейни снопове при наложена по-обща локална псевдоермитова редукция в работата [4] и при наложена нелокална редукция или дори без наложена редукция в [1]. Нередуцираната система от две матрични НЕУ в [1] от своя страна може да бъде разглеждана като частен случай на още по-обща система, която я свързва с оригиналния ФХ за алгебрата *sl(n,C)*. И в двата доклада е отделено специално внимание на векторния случай, при който уравненията се свеждат до тези от [2], [5], [6] и [13] (в зависимост от наложената редукция) при налагане на условието n=3.

Публикациите [2], [5], [6], и [13] се занимават с най-простия случай на система от две НЕУ от описвания магнитен тип, чието Лаксово представяне е свързано с пространството *SU(3)/S(U(1)×U(2))*. В [13] подробно е изучена правата задача на разсейването за ермитовия случай при константни гранични условия. В основата на използвания подход стои възможността снопът в полярна калибровка да се представи в каноничен вид (канонична калибровка), което позволява по-лесното му изследване. Дефинирани са решения на Йост и матрица на разсейването, построени са фундаментални аналитични решения чрез интегрални уравнения, като е разгледан ефектът на наложените редукции върху всички тях. И тук фундаменталните аналитични решения удовлетворяват локална задача на Риман-Хилберт. Построени са по няколко алтернативни начина рекурсионни оператори, с чиято помощ се описва съответната интегруема йерархия. Доказано е, че собствените функции на рекурсионните оператори образуват пълна система и са получени разложения на потенциала и неговата вариация. Този резултат позволява МОЗР да се интерпретира като обобщено преобразование на Фурие и да се линеаризира системата от НЕУ на езика на (минимални) данните на разсейването. С помощта на техниката на обличането са построени в явен вид частни решения на разглежданата двойка НЕУ. За целта се използва обличащ множител, който е рационална функция на спектралния параметър с прости полюси. В зависимост от положението на полюсите в комплексната λ-равнина се различават следните случаи: полюсите са комплексни числа в общо положение (имат ненулева реална и имагинерна част) или полюсите са имагинерни числа. Първият случай води до солитонен тип решения, асоциирани с 4 симетрично разположени спрямо реалната и имагинерната прави полюса (*квадруплет*). При втория случай се получават солитонни решения от *дублетен* вид, т. е. решения, свързани с двойки комплексно спрегнати полюси.

В статията [13] също така са изведени рекурентни формули за запазващите се плътности с помощта на метода на Дринфельд-Соколов на диагонализация на Лаксовата двойка, вж. предишния раздел. В качеството на проста илюстрация са получени в явен вид първите две най-прости плътности.

Резултатите, получени в [13], могат да бъдат обобщени в няколко направления. В работите [5] и [6] е въведен линеен сноп с наложена по-обща псевдоермитова редукция и при по-общи константни гранични условия. Проведени са разглеждания аналогични на тези в [13]. В псевдоермитовия случай освен *дублетни* и *квадруплетни* видове солитони възникват и решения от (квази)рационален тип. Последните са свързани с израждане в спектъра на оператора на разсейването – дискретните собствени стойности са реални. Обща черта на получените решения в ермитовия и псевдоермитовия случаи е, че те не са бягащи вълни. Построените решения от *квадруплетен* вид са несингулярни, докато при останалите два типа е възможно възникването на особености (при подходящ избор на параметрите).

В доклада [2] е разгледан линеен сноп с коефициенти в алгебрата *sl(3,C)* при наложена нелокална редукция. Затова и системата от две уравнения в [2] се явява нелокален аналог на тази от [5] и [6]. Проведени са разглеждания аналогични на тези в [5], [6] и [13] по отношение формализма на правата задача на разсейването при най-простите константни гранични условия. С помощта на изведените в доклада рекурсионни оператори е описана цялата интегруема йерархия, чиито най-прости представител е изследваната двойка нелокални уравнения. Приложена е техниката на обличането за построяване на частни решения. Получени са частни решения, свързани с 4 собствени стойности на оператора на разсейването. Приложен е методът на диагонализация на Лаксовата двойка, за да се получат запазващите се плътности.

Друга посока, в която могат да се търсят обобщения е демонстрирана в доклада [3]. Тук са намерени частни решения за векторното НЕУ от [4], чиито линеен сноп е асоцииран с пространството *SU(n)/S(U(1)×U(n-1))*. Отново сме се възползвали от метода на обличането, при който преходът от двукомпонентни системи към по-общи такива става по един напълно естествен начин. Аналогично на двукомпонентния случай, разгледан в [5] и [13], и сега се стига до няколко различни типа частни решения върху константен фон. Според разположението на простите полюси на обличащия множител се различават: *квадруплетни* решения, свързани с комплексни полюси в общо положение, и *дублетни* решения, свързани с имагинерни полюси (съществуват също и квазирационални решения, но те не са поместени в доклада, а в един по-дълъг препринт). И тук конструираните в явен вид решения се оказва, че не са бягащи вълни. За разлика от първия тип решения при втория е възможно възникването на особености (както и при квазирационалните решения).

Освен чрез преминаване от двукомпонентни към повече на брой компонентни системи от НЕУ или чрез разглеждане на други видове редукции резултатите в [13] могат да бъдат продължени и по начина, показан в доклада [12]. Тук е разгледан линеен сноп в полярна калибровка, свързан в пространството *SO(5)/SO(2)xSO(3)*. Развит е формализма на правата задача на разсейването при константни гранични условия, описани са спектралните свойства на оператора на разсейването и са построени рекурсионни оператори. И тук както при линейните снопове за *SU(n)/S(U(m)×U(n-m))* непрекъснатата част от спектъра на *L(λ)* е върху реалната права в *λ*-равнината, а дискретните собствени стойности в общия случай са групирани в четворки (*квадруплети*).

Както бе отбелязано в началото в този цикъл от трудове се изследват също и НЕУ, чиито Лаксови оператори са рационални функции на спектралния параметър. Рационален сноп, свързан с пространството *SU(n)/S(U(1)×U(n-1))*, при наложена ермитова редукция е въведен в статията [15]. От условието за нулева кривина на разглежданата Лаксова двойка е изведено векторно НЕУ. По-подробно е изучен най-простият случай на сноп за пространството *SU(3)/S(U(1)×U(2))*. За него е развит формализмът на правата задача на разсейването при константни гранични условия. В зависимост от конкретния избор на гранично условие непрекъснатият спектър на оператора на разсейването може да се състои или само от реалната права в *λ*-равнината (както е при разглежданите линейни снопове), или от реалната права и единичната окръжност. В работата [14] са построени рекурсионни оператори за същия рационален сноп по два алтернативни начина: метода на Гюрсес-Карасу-Соколов [Gürses, M., Karasu, A., Sokolov, V., J. Math. Phys., **40** (1999) 6473–6490] и с помощта на *квадрати на решенията*. В [1] е въведен рационален сноп за пространството *SU(n)/S(U(1)×U(n-1))* в общо положение (без допълнителна редукция) и е получена система от векторни НЕУ от условието за нулевост на кривината. На въпросната система може да се гледа като на локална интегруема деформация на векторната система в [1] и [4], свързана с линеен сноп. Оказва се, че такава локална деформация съществува само в случая на система от векторни НЕУ. Разгледани са локални и нелокални редукции на споменатата деформирана система от векторни НЕУ.

III. Други

В този раздел са включени публикациите [8] и [9], чиито научни резултати не могат да бъдат отнесени към никое от предишните направления.

Срещащите се в различни области на физиката напълно интегруеми НЕУ обикновено имат представяния на Лакс, удовлетворяващи някакви допълнителни алгебрични условия или редукции. Това прави въпросът за описанието и изучаването на редукциите от първостепенна важност за теорията на интегруемите системи. Именно по тази причина *мотивът* за редукциите присъства във всички работи по конкурса. Прост пример за това са Лаксови оператори, чиито коефициенти са (псевдо)ермитови матрици. В работата [9] за първи път системно се разглежда едно възможно обобщение на понятието редукция в смисъл на Михайлов. Обикновените (локални) редукции от този тип се описват с помощта на една крайна група известна като група на редукциите. Групата на редукциите представлява крайна група на симетрии на задачата на разсейването, която действа върху множеството на фундаменталните решения на тази спомагателна задача, като запазва непроменени независимите променливи x и t. Предложеното в [9] обобщение допуска трансформиране и на тези променливи. Това предоставя теоретико-групов формализъм за изучаване чрез МОЗР на определени класове от нелокални НЕУ като например нелокалното уравнение на Шрьодингер на Абловиц и Муслимани. Друга полза от посоченото обобщение е, че то задава систематичен подход за построяване на решения на напълно интегруеми уравнения, имащи отнапред зададени дискретни поточкови симетрии.

За много напълно интегруеми системи, като например уравнението на Кортевег-де Фриз, нелинейното уравнение на Шрьодингер и др., е забелязано, че притежават рационални решения или по-общо квазирационални решения. Тяхното съществуване се свързва с наличието на израждане в спектъра на съответния оператор на разсейването и често те могат да бъдат получени от солитонните решения чрез подходящ граничен преход (дълговълнова граница). В доклада [8] е демонстриран подход за построяване на решения от квазирационален тип за многокомпонентни НЕУ, интегруеми с помощта на МОЗР. В основата му стои използването на метода на обличането на Захаров-Шабат с обличащ множител, който представлява мероморфна функция с прости полюси по спектралния параметър. За да се внесе гореспоменатото израждане в спектъра на оператора на разсейването, се изисква всички полюси да принадлежат на непрекъснатия спектър. В конкретните случаи, които се разглежда в доклада, това означава полюсите да бъдат реални числа. Това позволява да се опише чисто алгебрична процедура за алгоритмично построяване на квазирационални решения върху тривиален (константен) фон. В качеството на илюстрация на нашия подход е разгледано по-подробно получаването на квазирационални решения с нулева асимптотика за многокомпонентно нелинейно уравнение

Шрьодингер и на квазирационални решения с константна асимптотика за една двукомпонентна система от магнитен тип. Получените решения не са бягащи вълни и в общия случай не са глобално определени, т. е. допускат особености.

Дата: 16.02.2021г.
гр. София

Изготвил:
/Тихомир Вълчев/