РЕЦЕНЗИЯ

на дисертацията на гл.ас. Тодор Петков Митев
„Нормални форми и спектрални асимптотики“
за получаване на образователната и научна степен „доктор“
по Област на висше образование 4. Природни науки,
математика и информатика,
професионално направление 4.5. „Математика“
и научна специалност „Диференциални уравнения“

Рецензент: акад. проф. дмн Петър Радоев Попиванов,
ИМИ – БАН, София 1113, ул. „Акад. Георги Бончев“, блок 8

1. Предлаганият дисертационен труд е разделен на три глави и е посветен на устойчивостта на квазипериодичните решение на хамилтонови системи, а също така са направени приложения в квазикласическия анализ на оператора на Шрьодингер. Авторът е построил класическа и квантова нормална форма на Биркхоф в класовете на Жевре за аналитични и жевреевски хамилтониани в околност на някой инвариантен тор. Както е известно, класическата нормална форма на Биркхоф обезпечава ефективна устойчивост на хамилтонови системи в околност на инвариантния тор. Основният резултат в I глава – Теорема 1.1 – е свързан с построяването на нормалната форма на Биркхоф на хамилтониана H в околност на тор на Кронекер с диофантов вектор на въртене и в класовете на Жевре G^s. Следвайки статията на Г. Попов по КАМ [31] за жевреевски хамилтониани, дисертантът получава като следствие от Теорема 1.1 ефективната устойчивост на квазипериодично движение в близост на инвариантните торове.

Централен резултат в Глава II е Теорема 2.5, където е построена квантовата нормална форма на Биркхоф на формално самоспрегнатия диференциален оператор $\mathcal{P}_h$, зависещ от малкия параметър h, $0 < h \leq h_0$ и действащ върху полуплътностите $f|dx|^{1/2} \in C^\infty(X, \Omega^{1/2}(X))$. Тук ще направя кратко отклонение, за да посоча корените на Теорема 2.5. За класическите псевдодиференциални оператори това е т.н. Теорема на Егоров от 1969 г., която през годините претърпя редица обобщения. Премина се през класовете на Хьормандер $OPS^m_{\rho,1-\rho}$, $1 > \rho > \frac{1}{2}$, $OPS^m_{1/2,1/2}$, класовете на Жевре и се стигна до парадиференциалните оператори. Инак се среща още у Маслов (1965), а ако се върнем по-назад, вероятно ще стигнем до

Фок. Става дума за канонични трансформации на псевдодиференциални оператори (п.д.о.) от различен вид.

Като следствие от дискутираната теорема са построени квазимоди на самоспрегнат h–п.д.о. от Шрьодингеров тип с експоненциално малко отклонение (грешка) $O(e^{-c/h^a})$, $h \searrow 0$, където a, c са положителни константи. Комбинирайки Следствие 2.1 и един резултат на П. Стефанов, докторантът получава точна долна граница на броя на резонансите в околност на реалната ос за h–д.о. с жевреевски коефициенти.

2. Ще приведа някои биографични данни за г-н Тодор Митев. Завършил е математика във ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ през 1989 г. От 1990–1993 е бил редовен аспирант към ИМИ–БАН с научен ръководител ст.н.с. Георги Попов – секция Математическа физика. Успешно е положил изпитите от кандидатския си минимум и е отчислен с право на защита през 1993 г. Той се е запознал основно с жевреевския микролокален анализ, но има и сериозни познания по ЧДУ, по хамилтонови системи, вкл. теорията на КАМ в различни функционални класове, по нужните му в конкретните изследвания елементи на функционалния анализ. От 1994 г. и досега е редовен преподавател в Русенския университет „А. Кънчев“, където от 2006 г. е главен асистент. Водил е лекции и семинарни упражнения по 10 математически дисциплини, преподавани в този университет. Има активно участие в извънкласната работа с ученици и публикации по елементарна математика.

С риск да се повторя ще спомена, че в дисертацията са получени нови резултати из областта на математическата физика, хамилтоновата динамика и асимптотичното квантуване. Авторът има общо 3 отпечатани статии по горните въпроси, както следва в:

1. “Discrete and continuous dynamical systems”, съвместно с Г. Попов, 23 стр., 2010 г. (IF 0,95 за 2010);

2. „Доклади на БАН“, 2013 г. (IF $\sim 0,24$);

3. “BG SIAM Proceedings”, 2014.

Г-н Митев е приложил в документите си списък на 7 известни му цитирания – всичките на първата статия. За мен три от тях са автоцитати, така че статия 1 има поне 4 цитата. Основните резултати на дисертацията са докладвани на семинара на секция ДУМФ в ИМИ и на конференцията на BG SIAM 2014. В подготовка за печат е статия съвместно с Г. Попов.

Малко по-подробно за дисертационния труд. Той е в обем на 83 стр. и е разделен на Съдържание – 2 стр., Увод – 13 стр., Глава I – 22 стр., Глава II – 40 стр., Глава III – 8 стр., Библиография от 38 заглавия на 8 стр. Уводът съдържа кратко, но съдържателно въведение в дискутираните проблеми и формулировка на основните резултати от Глави I, II. Глави I, II съдържат главните резултати, докато в Глава III (Апендикс) се съдържат спомагателните резултати, например оценки за операторите на диференциране или за произведението на 2 функции в класовете на Жевре. Включването на Апендикса облегчава читателя.

3. Предзащитата се състоя на заседание на секция ДУМФ на ИМИ на 22.06.2016 г., което беше председателствано от ръководителя на секцията проф. дмн А. Славова. Звеното единодушно реши, че дисертанта заслужава да бъде допуснат до защита. На заседанието си от 15.07.2016 г. (Протокол № 7 от 15.07.2016 г.) Научният съвет на ИМИ утвърди журито и със Заповед № 203/19.07.2016 г. на Директора на ИМИ бях определен за негов редовен член. Първата сбирка на журито на 27.07.2016 г. от 11 часа ме утвърди за негов Председател и за рецензент заедно с проф. С. Терзиян.

Авторефератът от 42 стр. е изключително подробен, защото съдържа описания на Глава I, Глава II и Глава III. Той вярно отразява съдържанието на дисертацията и представя постиженията на кандидата с много детайли.

4. За да бъда малко по-прецизен, ще се спра накратко върху важната Теорема 1.1.

И така $\omega \in \mathbb{R}$ удовлетворява обичайното диофантово (k, r) условие с $k > 0$, $r > n-1$ и за някое фиксирано $\rho \geq 1$ константата μ се дефинира така: $\mu = \rho(r+1)+1$. Хамилтонианът H принадлежи на жевреевския клас $G^s(X; \mathbb{R})$, докато Λ е гладък тор на Кронекер на H с честотата ω. Тогава съществуват околност $D \subset \mathbb{R}^n$ и симплектично изображение $\chi \in G^{\rho,\mu}(\mathbb{A}, X)$ с пораждаща функция g, където $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times X$ и такива, че $\chi(\mathbb{T}^n) = \Lambda$ и още

$$(*) \qquad H(\chi(\varphi, I)) = H^0(I) + R^0(\varphi, I),$$

$H^0 \in G^{\mu}(D)$, $\quad R^0 \in G^{\rho,\mu}(\mathbb{A})$, $\quad \partial_I^{\alpha} R^0(\varphi, 0) = 0$, $\forall \varphi \in \mathbb{T}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Както се вижда от (*), Биркхофовата нормална форма на хамилтонина H в околност на произволен тор на Кронекер Λ с честота ω, е сума от две жевреевски функции, първата зависеща само от променливата действие I, а втората – от променливите действие – ъгъл (I, φ). Същественото тук е, че R^0 е плоска по I при $I = 0$ за всяко $\varphi \in \mathbb{T}^n$ и освен това жевреевските константи C_1, C_2 на $g \in G^{\rho,\mu}$ и R^0 и C_2 на H^0 се изразяват (еквивалентни са) чрез жевреевските константи L_0, L_1, L_2 на $\tilde{H}$, където $H(\theta, r) =< \omega, r > +\tilde{H}(\theta, r)$, $\tilde{H} = O(|r|^2)$ и L_0, L_1, L_2 се задават с оценката (1.2) стр. 20.

Все в тази връзка ще спомена, че самостоятелен интерес и то не само пред автора представлява въпросът дали константата $\mu = \rho(r+1)+1$ е оптимална. Както е обичайно в подобни случаи, за получаването на (*) съществена роля играе решаването на хомологичното уравнение и намирането на съответните априорни оценки в класовете на Жевре. Конструирането на пораждащата функция g е явно (във формата на ред по степените на променливата I), но се налага да се направят жевреевски оценки за коефициентите $g_{m,\alpha}(\theta)$ (§1.4), които са силно технични. Тук се използва теоремата на Борел за продължението, но в класовете на Жевре. Найсетне заключителната част на доказателството (стр. 40) преминава през прилагането на теоремата за неявната функция в анизотропните класове на Жевре и през теоремата за композицията на 2 функции в пространствата на Жевре. От гореизложеното се вижда какъв комплициран апарат от жевреевския анализ се използва при намирането на нормалната форма (*), но трябва да добавя, че дисертантът внимателно използва и редица резултати на своя научен ръководител, а и на други изтъкнати специалисти, като например на без време напусналия ни проф. Т. Грамчев.

За втората глава ще бъда пределно кратък. Г. Попов построи в [30], [31] квазимоди в класовете на Жевре, чиито микроносител е обединението на фамилията от инвариантни торове $\Lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega_k^0$, дефинирани на стр. 7–8 (вж. също стр. 13) в случая на неизроден по Колмогоров жевреевски хамилтониан $H = P_0$. Г-н Митев е построил три квазимоди в класовете на Жевре, чиито микроносител (h-вълнов фронт) е произволен жевреевски гладък тор на Кронекер $\Lambda(\omega)$ с диофантов вектор на въртене, без да налага условие за неизроденост на главния символ.

5. При оформлението на дисертацията има на места стилови и езикови грапавини. Ще посоча и някои неточности: а) на стр. 30, 38, 39 се говори за твърдение 6, а такова липсва в текста. Вероятно става дума за Твърдение 2 от стр. 29. Твърдение 6 се формулира на стр. 69, но то няма нищо общо с дискутираното в §1.4 Твърдение 6; б) на стр. 35–37 се говори за Леми 3.2, 3.3 (вероятно от Апендикса). Добре е да се каже. в) често се пише Бета функция, Гама функция и т.н.

6. Дисертацията на г-н Митев безспорно удовлетворява всички критерии и показатели на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за придобиване на образователната и научна степен „доктор“. Тя можеше да бъде представена преди 2–3 години. Познавам г-н Митев още от края на 80-те години на миналия век като честен, скромен и способен математик с вкус към деликатните сметки и оценки, свързани с преодоляването на разнообразни трудности и изискващи досетливост, съобразителност и много усилия. Считам, че изследванията му в горепосочените направления на жевреевския анализ заслужава да продължат, а тематичния им кръг – да се разшири.

Заключение: Дисертантът е усвоил и успешно приложил комплицираната техника, съпътстваща изследванията на ψdo и диференциални оператори в класовете на Жевре, както и на хамилтоновите системи и елементи на квазикласическия анализ. По този начин е получил нови и интересни резултати за ефективна устойчивост на хамилтонови системи и е построил квазимоди в жевреевски пространства на формално самоспретнати $h - \psi do$ от Шрьодингеров тип. Направеният по-горе анализ на дисертацията ми дава достатъчно основания да препоръчам на Почитаемото научно жури да гласува за присъждане на гл.ас. Тодор Митев на образователната и научна степен „доктор“.

София, 25 август 2016 г.

(акад. П. Попиванов)