# РЕЦЕНЗИЯ

**по конкурс за заемане на академична длъжност „професор“, обявен в ДВ бр. 18/27.02.2018 г. за нуждите на ИМИ при БАН**

**по: Област на висшето образование**
**4. Природни науки, математика и информатика**
**Професионално направление 4.5. Математика**
**научна специалност „Геометрия и топология“ (Диференциална геометрия)**

**Единствен кандидат: доц. д-р Величка Василева Милушева**

**Рецензент:** проф. д-р Огнян Тодоров Касабов от ВТУ“Тодор Каблешков“

Със заповед № 116/26.04.2018 г на Директора на ИМИ при БАН съм определен за член на Научно жури по горния конкурс. На заседание на Научното жури от 03.05.2018 г. ми беше възложено изготвянето на рецензия и получих диск с всички необходими документи.

**1. Кратки биографични данни за кандидата.**

Величка Василева Милушева е родена на 22.02.1969 г. Висшето си образование завършва през 1993 г. във Факултета по математика и информатика на Софийски университет „Св. Климент Охридски“. През 2006 г. защитава дисертация в Института по математика и информатика на БАН и получава научната и образователна степен „доктор“. От 1994 г. е асистент (впоследствие старши асистент и главен асистент), а от 2010 г. - доцент във ВСУ“Любен Каравелов“. От 2006 г. е научен сътрудник, а от 2011 г. досега - доцент в Института по математика и информатика. Има един успешно защитил докторант (Яна Алексиева), а в момента е научен ръководител на докторант Виктория Бенчева. Има участие в четири научно-изследователски проекта (два от тях към Фонд Научни изследвания, единият тече към момента), в три от които като ръководител.

**2. Обща характеристика на представените материали.**

За участие в конкурса доц. Милушева е представила 22 научни статии, всичките написани след предишните процедури за академични длъжности и научни степени. Едната от статиите (статия [18], публикувана в Pliska Stud. Math. Bulg.) има обзорен характер. Представени са още: пълен списък с научни публикации (общо 48 на брой), списък с учебници за студенти (4 на брой), списък учебни помагала за студенти (2 на брой) и за ученици (9 на брой).

**3. Характеристика на научните и научно-приложните постижения.**

Представените за участие в конкурса 22 статии са в областта на диференциалната геометрия на двумерните повърхнини в 4-мерно Евклидово и в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство и може да се обособят в следните направления:

А. Локална теория на повърхнините;

Б. Повърхнини с нулев и повърхнини със светлинноподобен (изотропен) вектор на средната кривина в $\mathbb{R}^4_1$ и $\mathbb{R}^4_2$;

В. Повърхнини от ротационен тип;

Г. Меридианни повърхнини.

**По точка А:**

Едни от най-важните въпроси в диференциалната геометрия са тези за намирането на инварианти на даден обект (напр. линия, повърхнина), определянето на този обект с негови инварианти, определяне класове обекти с техни инварианти. В класическата диференциална геометрия е добре известно, че всяка правилна крива се определя (до положение) със своите кривина и торзия. В теорията на повърхнините в $\mathbb{R}^3$ класическата теорема на Боне ни учи, че всяка повърхнина е определена до положение от коефициентите на първата и втората основни форми (разбира се, те са подчинени на определени условия - уравненията на Гаус и Кодаци). Наскоро Г. Ганчев и В. Михова показаха, че една повърхнина се определя до положение от четири инвариантни функции (вместо шестте коефициента на двете основни форми), пак подчинени на определени условия. Нещо повече, повърхнините от определен (Вайнгартенов) клас се характеризират до положение в пространството с една единствена инвариантна функция, зададена в специални (наречени от Г. Ганчев и В. Михова „геометрични") параметри.

Естествено продължение на горната тематика е търсенето на подходящи инварианти и съответно доказване на теореми от тип „на Боне" за повърхнини в четиримерни пространства. Това изглежда започва със статията

*G. Ganchev, V. Milousheva: On the theory of surfaces in the four dimensional Euclidean space. Kodai Math. J.,* **31***(2008), 183-198.*

(номер [29] от общия списък с научни публикации), която не е включена в списъка статии за участие в конкурса (тя е използвана в предишна процедура), но има голямо значение. В нея се прилага идеята на C. Burstin - W. Mayer (отнасяща се за повърхнина в четиримерно афинно пространство) и за произволна двумерна повърхнина в $\mathbb{R}^4$ се дефинират втора основна форма и изображение от Вайнгартенов тип. Следата и детерминантата на последното изображение пораждат две функции $\varkappa$ и $k$, инвариантни при смяна на параметрите и при движение. В по-нататъшните изследвания се оказва, че тези две функции играят важна роля в геометрията на повърхнините в $\mathbb{R}^4$. Доказано е, че функцията $\varkappa$ съвпада с кривината на нормалната свързаност, както и че ако втората основна форма не се анулира, то повърхнината е минимална (т.е. с нулев вектор на средната кривина) точно когато $\varkappa^2 - k = 0$. За повърхнини, за които функцията $\varkappa^2 - k$ не се анулира, се дефинира подвижен репер с ясен геометричен смисъл и на негова основа, след извеждане на формули за производните от типа „на Френе“, се получават 8 инвариантни функции.

В статия [22] е доказана следната основна теорема от тип „на Боне“: тези осем инвариантни функции определят повърхнината с точност до положение в $\mathbb{R}^4$ (естествено те изпълняват някои диференциално-геометрични условия). С въведените инвариантни функции са характеризирани повърхнините на Chen. В статии [20], съотв. [6], се разглеждат аналогични въпроси за пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$, съотв. за Лоренцовите повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$ (разбира се с отчитане на особеностите на индефинитната метрика във всеки конкретен случай): въведени са инвариантни функции, аналогични на тези в случая на повърхнина в $\mathbb{R}^4$, като се разглеждат отделно възможностите за пространственоподобен и за времеподобен вектор на средната кривина; доказани са основните теореми от тип „на Боне“; основни класове повърхнини са характеризирани с инвариантните функции. За пространственоподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, съставена от плоски точки, за която векторът на средната кривина $H$ е ненулев времеподобен или пространственоподобен вектор, в Теорема 4.1 от статия [20] е доказано следното: всяка точка, в която ковариантната производна на $H/\| H \|$ не е хоризонтална за повърхнината, притежава околност, която е част от развиваема праволинейна повърхнина. За повърхнините в $\mathbb{R}^4_2$ с паралелен вектор $H/\| H \|$ са въведени канонични параметри и е показано, че доказаната порано основна теорема от тип „на Боне“ се редуцира до теорема, в която участват само 3 инвариантни функции.

**По точка Б:**

Основни, много интересни и с разнообразни приложения повърхнини в класическата диференциална геометрия са минималните, т.е. тези с нулев вектор на средната кривина. Голям е интересът по-общо към минималните подмногообразия на произволно диференцируемо многообразие. Поради приложенията на диференциалната геометрия в съвременната физика, от особено значение са повърхнините с нулев вектор на средната кривина в пространствата с индефинитна метрика. За пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ съществени резултати в това направление са получени от Alias и Palmer, които въвеждат подходящи за случая параметри и доказват, че в тези параметри повърхнината се определя от Гаусовата и нормалната си кривина (които удовлетворяват система от две ЧДУ).

В статия [17] се разглежда аналогичен въпрос за времеподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$. Първо се въвеждат канонични параметри за такива повърхнини. Основният (и особено ценен) резултат в статията е, че в канонични параметри Гаусовата кривина

$K$ и нормалната кривина $\varkappa$ удовлетворяват системата

$$\begin{aligned}(K^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{4}}\,\Delta^h \ln{(K^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{8}}} = K\\ (K^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{4}}\,\Delta^h \operatorname{arctg}\frac{\varkappa}{K} = 2\varkappa\end{aligned}$$

и обратно, всяко решение на тази система определя единствена (до положение) времеподобна повърхнина в $\mathbb{R}^4_1$, за която $K$ и $\varkappa$ са съответните кривини.

При пространства с индефинитна метрика по естествен начин се появяват повърхнини, за които векторът на средната кривина е ненулев, но скаларният му квадрат е нула (повърхнини с изотропен или светлинноподобен вектор на средната кривина). Ще отбележим, че такива обекти са от интерес в теорията на гравитацията. Пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ със светлинноподобен вектор на средната кривина са обект на изучаване в [19]. Основният резултат е теорема от тип „на Боне“ за такива повърхнини. Намерени са необходими и достатъчни условия повърхнината да е плоска, да е с плоска нормална свързаност, да е съставена от параболични точки.

В [16], за повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$, които са без „плоски“ точки и имат светлиноподобен вектор на средната кривина, се изучава кога Гаусовото изображение $G$ е поточкото от тип 1, т.е. изпълнява условието $\Delta G = \phi(G+C)$, където $\phi$ е функция, а $C$ е постоянен вектор. Доказано е, че последното е в сила тогава и само тогава, когато векторът на средната кривина е паралелен. Аналогични въпроси за повърхнини със светлинноподобен вектор на средната кривина се разглеждат в [9].

**По точка В:**

В псевдо-Евклидовите пространства $\mathbb{R}^4_1$ и $\mathbb{R}^4_2$ има различни възможности за дефиниране на ротационни повърхнини. В статии [21], [13] и [8] се разглеждат ротационни повърхнини с двумерна ротационна ос. Така в статия [21] се изследва въпросът кога една пространственоподобна ротационна повърхнина с двумерна ротационна ос от елиптичен тип:

$$\big(r(u)\cos v, r(u)\sin v, x_1(u), x_2(u)\big)$$

или от хиперболичен тип:

$$\big(x_1(u), x_2(u), r(u)\sinh v, r(u)\cosh v\big)$$

в $\mathbb{R}^4_1$ е повърхнина на Chen. Получени са три основни случая, в два от които повърхнината е тривиална повърхнина на Chen (минимална или лежи в тримерна равнина в $\mathbb{R}^4_1$), а в третия е нетривиална повърхнина на Chen. В [8] и [13] се изучават Лоренцови повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип с двумерна ротационна ос в $\mathbb{R}^4_2$ и е направено описание на случаите на повърхнини със светлинноподобен вектор на средната кривина и постоянна ненулева средна кривина.

Друг тип ротационни повърхнини са въведени от Moore за случая на $\mathbb{R}^4$. Повърхнини от този тип, но вече за $\mathbb{R}^4_1$ и $\mathbb{R}^4_2$, се изучават в [4], [12], [17], [20]. Именно, в [20] са въведени следните ротационни повърхнини от тип на Moore за $\mathbb{R}^4_1$:

$$M_1 \ : \ z(u,v) = \big(f(u)\cos\alpha v, f(u)\sin\alpha v, g(u)\cosh\beta v, g(u)\sinh\beta v\big)$$

$$M_2 \ : \ z(u,v) = \big(f(u)\cos\alpha v, f(u)\sin\alpha v, g(u)\sinh\beta v, g(u)\cosh\beta v\big)$$

и са пресметнати техни основни инварианти. В [17], като приложение на резултатите от първите секции в тази статия, са описани ротационни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ от тип „на Moore", които са времеподобни и с нулев вектор на средната кривина. В [12] е показано, че ако някоя от повърхнините от тип $M_1$ или $M_2$ е без минимални точки, тя е нетривиална повърхнина на Chen. За случаите, когато повърхнините са плоски или с плоска нормална свързаност е доказано какви уравнения изпълняват функциите $f(u)$ и $g(u)$. За повърхнини, съставени от параболични точки, са получени три основни класа ротационни повърхнини от тип „на Moore". Намерен е видът на меридианната крива на повърхнината, когато тя е минимална. Аналогично, в [4] са въведени ротационни повърхнини от тип „на Moore" от елиптичен и хиперболичен тип в $\mathbb{R}^4_2$. Основните резултати тук са: намерен е видът на меридианната крива на ротационна повърхнина от елиптичен (или хиперболичен) тип с паралелен вектор $H/\|H\|$; за плоски ротационни повърхнини и за такива с плоска нормална свързаност се получават по два основни случая за меридианната крива, а за минималните ротационни повърхнини - по три случая.

**По точка Г:**

Изучаването на меридианни повърхнини започва в статия [22], където те са въведени. Именно, ако $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ е стандартната база на $\mathbb{R}^4$, а $l(w_1, w_2)$ е радиус-векторът на единичната сфера $S^2(1)$ в $\mathbb{R}^3$, то хиперповърхнината

$$Z(u, w_1, w_2) = f(u)l(w_1, w_2) + g(u)e_4 \ ,$$

където $f'^2(u) + g'^2(u) = 1$, е аналог на класическа ротационна повърхнина в $\mathbb{R}^3$. Когато е зададена линия $c \ : \ w_1 = w_1(v), w_2 = w_2(v)$ върху сферата $S^2(1)$, получаваме повърхнина

$$z(u,v) = f(u)l(w_1(v), w_2(v)) + g(u)e_4$$

която е съставена от меридиани на ротационната хиперповърхнина и затова е наречена меридианна повърхнина.

При условие, че кривините на меридианната линия и линията $c$ върху единичната сфера не се анулират (такива повърхнини са наречени меридианни повърхнини от общ тип), в [22] са характеризирани меридианните повърхнини в $\mathbb{R}^4$ с обикновени диференциални уравнения за меридианната линия в случаите, когато повърхнините са от следните класове: с постоянна ненулева Гаусова кривина, с постоянна ненулева средна кривина, с постоянна отрицателна инвариантна функция $k$, като в първия случай функцията $f(u)$ е намерена в явен вид, а във вторите два случая е доказано, че линията $c$ трябва да е с постоянна ненулева сферична кривина. В последната секция на статия [19] са получени резултати за меридианни повърхнини със светлинноподобен вектор на средната кривина. В [14] се изучават меридианните повърхнини в $\mathbb{R}^4$ от гледна точка на изображението на Гаус. Показано е, че последното е хармонично тогава и само тогава, когато повърхнината е част от равнина. Получени са интересни резултати за случая, когато изображението на Гаус $G$ е поточкото от тип 1. В [11] се разглеждат меридианни повърхнини в $\mathbb{R}^4$, които са в същото време повърхнини на Chen или с паралелно нормално разпределение. И за двата случая са получени характеризации на повърхнините с обикновени диференциални уравнения за меридианната линия. Аналогични въпроси за меридианни повърхнини в $\mathbb{R}^4_1$ се разглеждат в статии [5], [7], [10], [15], [19]. Естествено, поради индефинитната метрика тук се появяват (и са изучени) различни пространственоподобни меридианни повърхнини - от елиптичен, хиперболичен, параболичен тип (в зависимост от вида на ротационната ос). В [15] и [19] се изучават меридианни повърхнини със светлинноподобен вектор на средната кривина, като в [15] са намерени всички такива повърхнини от параболичен тип, а в [19] - тези от елиптичен и хиперболичен тип. Меридианни Лоренцови повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$ се изучават в [1], [2], [3], като тук разнообразието е още по-голямо - има по два типа повърхнини от елиптичен и от хиперболичен тип.

**4. Отражение на научните публикации на кандидата в литературата. Числови показатели. Принос в колективните статии.**

Доц. Милушева е представила 87 цитирания на своите научни статии, 63 от които са на статиите, представени за участие в конкурса. Трябва да се отбележи още, че 16 от представените за участие в конкурса 22 статии са в списания с импакт фактор, като общият импакт фактор е 9,331. Две от представените статии са самостоятелни. Няма информация за приноса на кандидата в колективните статии, но считам, че той е съществен.

**5. Критични бележки.**

1) Както стана дума по-горе, статия [29] от общия списък с научни публикации не е включена в списъка статии за участие в конкурса. Това изглежда оправдано, доколкото тази статия е използвана в предишна процедура. Все пак считам, че щеше да е по-добре тя също да бъде включена в основния списък, защото Правилникът на ИМИ за приложение на ЗНСНЗРБ го позволява, а от друга страна така би се получила съвсем пълна представа за развитието на най-важната част от представената тематика. До известна степен този пропуск е компенсиран с поясненията в авторската справка.

2) Доказаното в Теорема 4.1 на статия [20] има чисто локален характер, което не съответства на глобалния характер на формулировката на твърдението. Примерна формулировка на доказаното съм дал по-горе, при реферирането на статия [20]. Подобни неточности има и в други статии.

3) Следствието в края на секция 4 от статия [1] е трябвало да има по-точна формулировка, отговаряща на коментарите след всяка от теоремите в тази секция.

**Заключение.** Представените от доц. Милушева материали отговарят на всички изисквания в ЗРАСРБ и Правилника за неговото приложение. Единственият препоръчителен критерий от съответния Правилник на Института по математика и информатика на БАН, което не е изпълнен, е за двама успешно защитили докторанти. От друга страна представените материали показват значително превишаване на другите критерии - брой научни статии извън предишните процедури (22 вместо 5), брой статии в списания с импакт фактор (16 вместо 10), брой цитирания (63 само на представените за участие в конкурса статии, вместо 30). **Поради това давам положителна оценка на рецензираната кандидатура и препоръчвам на членовете на уважаемото Научно жури да изготвят доклад-предложение до Научния съвет на Института по математика и информатика за избор на доц. д-р Величка Василева Милушева за „професор“ по професионално направление 4.5 Математика, научна специалност „Геометрия и топология“ (Диференциална геометрия) в Института по математика и информатика на БАН.**

30.05.2018 г. Рецензент:

(проф. д-р Огнян Касабов)