БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЙОРДАНКА ПАНЕВА-КОНОВСКА

ФУНКЦИИ НА БЕСЕЛ И МИТАГ-ЛЕФЛЕР И ОБОБЩЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
"ДОКТОР НА НАУКИТЕ"

СОФИЯ, 2017

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Функции на Бесел и Митаг-Лефлер и обобщения

Йорданка Добрева Панева-Коновска

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ
ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА СТЕПЕН
"ДОКТОР НА НАУКИТЕ"

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика,
Професионално направление: 4.5. Математика,
Научна специалност: "Математически анализ"

София, 2017

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от звеното на секция “Анализ, геометрия и топология” на Института по математика и информатика - БАН, с разширение: акад. Петър Попиванов, чл.-кор. проф. д.м.н. Иван Димовски, проф. д.м.н. Петър Русев (ИМИ – БАН), проф. д-р Георги Александров (ФМИ – СУ).

Афилиация на дисертанта:
Факултет по приложна математика и информатика, Технически университет – София & Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... часа в аудитория .... на ИМИ–БАН на открито заседание на научно жури, определено със заповед № 543 / 20.11.2017 г.

НАУЧНО ЖУРИ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ЗАЩИТАТА:

1. Акад. Петър Попиванов, ИМИ – БАН
2. Проф. дмн Виржиния Кирякова, ИМИ – БАН
3. Проф. дмн Ралица Ковачева, ИМИ – БАН
4. Чл.-кор. Иван Димовски, ИМИ – БАН (пенсионер)
5. Проф. дмн Петър Русев, ИМИ – БАН (пенсионер)
6. Проф. д-р Георги Александров - ФМИ, СУ “Св. Кл. Охридски”
7. Проф. д-р Красимира Проданова - ФПМИ, ТУ – София

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ – БАН.

Автор: Йорданка Добрева Панева-Коновска
Заглавие: Функции на Бесел и Митаг-Лефлер и обобщения
Автореферат на дисертация за получаване на научната степен “доктор на науките”

I. УВОД

Разнообразието от задачи, водещи до специални функции, е предизвикало бързо нарастване на броя на функциите, използвани в приложенията. Така например, функциите на Бесел, и техните многобройни обобщения, които дължат своя произход на конкретни задачи от механиката и астрономията, са се утвърдили като едни от най-често използваните специални функции в математическия анализ и приложенията му във физиката, механиката и инженерните дисциплини. Друг вид важни функции са функциите на Митаг-Лефлер. Въпреки, че са възникнали в началото на двадесети век при решаването на чисто теоретични задачи, свързани с аналитично продължение, и дълго са останали неизползвани и непознати, днес те са едни от най-често използваните специални функции на дробното смятане. Чрез тези два вида специални функции се изразяват решенията на много задачи от посочените области и именно поради своята значимост и широко приложение, те са претърпели многобройни обобщения – 2-, 3-, 4- индексни обобщения на функциите на Бесел, хипербеселови функции, 3-индексни и мултииндексни функции на Митаг-Лефлер (накратко казано функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип). Част от резултатите в този труд са посветени на изучаване на изброими фамилии от такива функции, установени са някои от техните свойства и е изучена сходимост на редове по тях. Получените в това направление резултати са аналогични на класическите резултати за степенни редове и изводът е, че всеки един от разглежданите редове има поведение аналогично на степенните редове. Друг кръг от резултати е свързан с въвеждането и изучаването на нов клас от мултииндексни функции на Митаг-Лефлер. Изучени са основни негови свойства, като интегрални представяния, диференциране и интегриране от произволен ред.

Дисертационият труд съдържа 206 станици. Той се състои от увод, девет глави и заключителни бележки, разпределени общо в 55 секции, използвана литература и азбучен указател (индекс). Всички формулирани и доказани в дисертацията леми и теореми са номерирани с три числа. Първото означава номера на главата, второто е номерът на секцията, а третото е поредният номер вътре в самата секция, като номерацията е отделна за лемите и теоремите. Номерацията на забележките, дефинициите и формулите следва същия принцип.

II. СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Ще проследим съдържанието на дисертационния труд по глави, като се постараем да обясним подбудите за направените изследвания и възприетия подход за работа.

Увод

Уводът дава кратък исторически преглед на материята включена в този труд. Той проследява възникването на специалните функции, изброени по-горе, както и проблемите, свързани с тях, като дава мотивацията за по-нататъшно развитие, изучаване и приложения.

1 Глава 1

В Глава 1, състояща се от 6 секции, са включени някои предварителни добре известни резултати за Гама- и Бета-функциите, както и за символа на Поххамер

$$(\gamma)_0 = 1; \qquad (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1), \quad \gamma \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

които участват в дефинициите на изучаваните специални функции. Това е направено в Секции 1.1 − 1.3, а в Секция 1.4 са доказани и някои неравенства, свързани с тях. В Секция 1.5 и Подсекция 1.6.1 на тази глава са дадени дефинициите и добре известни основни резултати за функциите на Бесел от първи род [84, 3.1 (8)]

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \tag{1.2}$$

и тясно свързаните с тях функции на Бесел–Клифорд

$$C_\nu(z) = z^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\ , \quad \nu \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

като интегрални представяния и асимптотични формули. Дискутираните резултати служат за да направят изложението самостоятелно. Последната част на Секция 1.6 (Подсекция 1.6.2) се отнася до прецизиране на следната асимптотична формула за функциите на Бесел $J_n(z)$ от първи род с цял неотрицателен индекс [86, §17.81]:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n (1 + \theta_n(z))\, \frac{1}{n!}, \quad \theta_n(z) \to 0 \text{ когато } n \to \infty \tag{1.4}$$

което е изложено по-долу. Именно, доказана е следната теорема.

Теорема 1.1. [65] *Нека $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество. Тогава съществува константа $C = C(K)$, $0 < C < \infty$, такава че за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$, е в сила неравенството*

$$|\theta_n(z)| \le C/(n+1). \tag{1.5}$$

Оценката, дадена с тази теорема играе съществена роля в изследването на сходимост на редове по Беселови функции в следващите глави, особено по периферията на областта на сходимост.

2 Глава 2

В Глава 2 (8 секции) се разглеждат редове по функциите на Бесел в комплексната равнина и се изучава сходимостта и равномерната им сходимост. В Секция 2.1. са описани някои множества в комплексната равнина, които се използват по-нататък и са дадени означения за тях. В Секции 2.2 са дадени добре известни класически резултати за широко разпространените степенни редове

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

свързани със сходимостта им.

В Секция 2.3 се разглежда редът по Беселови функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z), \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

с комплексни коефициенти a_n, за краткост наречен *Беселов ред.* По-нататък в тази глава се изучава неговата геометрия на сходимост, определя се къде този ред е сходящ и къде не е, и освен това къде сходимостта е равномерна и къде не е. Като начало се намира кръгът му на сходимост и се изследва поведението на реда по границата му, като се доказват твърдения, аналози на класическите теореми на Коши–Адамар, Абел, Таубер и Фату. Част от дефинициите и по-горе споменатите резултати се появяват първо в Панева-Коновска [55].

В Секция 2.4 е намерена областта на сходимост на Беселовия ред (2.2) и е доказана съответната теорема от Коши–Адамаров тип, а като следствие е получено твърдение от типа на лемата на Абел. По-конкретно, получени са долу формулираните резултати.

Теорема 2.1 (от Коши–Адамаров тип [65])**.** *Областта на сходимост на реда* (2.2) *е кръгът* $D(0; R)$ *с радиус на сходимост*

$$R = 2 \left(\limsup_{n\to\infty} (\, |a_n| \, / \, \Gamma(n+1) \,)^{1/n} \right)^{-1}. \tag{2.3}$$

По-точно, редът, (2.2) *е абсолютно сходящ в кръга* $D(0; R)$ *и разходящ в областта* $|z| > R$*. Случаите* $R = 0$ *и* $R = \infty$ *са включени в общия случай.*

Следствие 2.1. [65] *Нека редът* (2.2) *е сходящ в точката* $z_0 \neq 0$*. Тогава той е абсолютно сходящ в кръга* $D(0; |z_0|)$*. Вътре в кръга* $D(0; R)$*, т.е. върху всеки затворен кръг* $|z| \leq r$ $(r < R)$*, сходимостта е равномерна.*

В Секция 2.5 е доказан аналог на теоремата на Абел за реда (2.2). За целта първо са разгледани две от множествата, дефинирани в Секция 2.1. Едното от тях е ъгловата област g_φ с връх в точката $z = z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < |z_0| = R < \infty$, която е симетрична относно правата линия, минаваща през точките 0 и z_0 и има големина на ъгъла $2\varphi < \pi$, а другото е частта d_φ от ъгловата област g_φ, затворена между раменете на ъгъла и дъгата от окръжността вписана в ъгъла с център в координатното начало. Следващата теорема е свързана с равномерната сходимост на реда (2.2) в множеството d_φ и границата на сумата му в точката z_0, стига само $z \in D(0;R) \cap g_\varphi$.

Теорема 2.2 (от Абелов тип [65])**.** *Нека* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *е редица от комплексни числа и* R *е положително число, дефинирано от* (2.3)*,* $F(z)$ *е сумата на реда* (2.2) *в областта* $D(0;R)$*, т.е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z), \quad z \in D(0;R), \tag{2.4}$$

и този ред е сходящ в точката z_0 *от границата на* $D(0;R)$*. Тогава:*

(I) *Редът* (2.2) *е равномерно сходящ в областта* d_φ*.*

(II) *В сила е следното равенство*

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z_0), \tag{2.5}$$

стига само $z \in D(0;R) \cap g_\varphi$*.*

Преди да преминем към обратни твърдения на Теоремата от Абелов тип, а именно, теореми от Тауберов и Литълудов тип, най-напред в Секция 2.6 дефинираме понятие (J, z_0)-сумируемост, свързано с реда (2.2) и по-общо с редове и по други функции, по аналогия на A-сумируемостта на числов ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.6}$$

свързана със степенен ред. За целта нека първо $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$ и

$$(J; z_0) := \{j_n : \ j_n - \text{цяла} \quad \text{функция}, \quad j_n(z_0) = 1\}_{n \in \mathbb{N}_0}. \tag{2.7}$$

Сега, разглеждайки реда по функциите от тази фамилия, даден по-долу

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z), \quad j_n \in (J; z_0), \tag{2.8}$$

даваме следната дефиниция.

Дефиниция 2.1. *Числовият ред* (2.6) *се нарича* (J, z_0)*-сумируем, ако редът* (2.8) *е сходящ в кръга* $D(0;R)$*, и освен това съществува границата*

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(z), \tag{2.9}$$

когато z *остава върху сегмента* $[0, z_0)$ *(т.е.* $z \to z_0$ *радиално).*

Обаче, използването на тази дефиниция изисква да се държи сметка за регулярността на сумирането.

По-нататък, преминавайки към изложението в Секция 2.7, модифицираме леко функциите J_n, като ги умножаваме с подходящи коефициенти. Това позволява резултатите да се получат в по-опростена форма. Именно означавайки

$$\widetilde{J}_n(z) = n!2^n J_n(z), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.10}$$

вместо (2.2) разглеждаме реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{J}_n(z), \qquad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.11}$$

който е абсолютно сходящ в отворения кръг $D(0; R)$ с център началото и радиус

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} (\ |a_n|\ )^{1/n} \right)^{-1},$$

и е разходящ в областта $|z| > R$ (съгласно Теорема 2.1, равенство (2.3)).

Както е добре известно, теоремата на Таубер е твърдение, което свързва Абеловата сумируемост и обичайната сходимост на числови редове при налагане на някакви условия върху общия член на разглеждания ред.

Аналогични резултати са получени за сумиране по полиноми на Лагер в [75]. Тук ние даваме теорема от Тауберов тип за (J, z_0) - сумируемост, дефинирана с Дефиниция 2.1.

За тази цел първо разглеждаме числовия ред (2.6), $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|z_0| = R$, $0 < R < \infty$, и функциите $J_n^*(z; z_0)$, дадени с равенствата

$$J_n^*(z; z_0) = j_n(z) = \frac{J_n(z)}{J_n(z_0)} = \frac{\widetilde{J}_n(z)}{\widetilde{J}_n(z_0)}.$$

Нека сега редът (2.11) е сходящ за $z \in D(0; 1)$ и

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^*(z; z_0), \quad z \in D(0; R). \tag{2.12}$$

За пълнота, само да отбележим, че използването на реда (2.11) е за предпочитане пред (2.2), защото радиусите на сходимост на редовете (2.11) и (2.12) са едновременно крайни или безкрайни. По-конкретно, ако (2.11) има радиус на сходимост 1, то (2.12) има радиус на сходимост $|z_0|$.

По аналогия с теоремата на Таубер за степенни редове, формулираната по-долу теорема от Тауберов тип за реда (2.11) по Беселови функции, свързва $(J; z_0)$ сумируемостта за $j_n(z) = J_n^*(z; z_0)$ с обичайната сходимост на числовия ред (2.6), при наложени допълнителни условия за ръста на общия член a_n.

Теорема 2.3 (от Тауберов тип [65]). *Ако редът* (2.6) *е* (J, z_0) *- сумируем с* $j_n(z) = J_n^*(z; z_0)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0, \tag{2.13}$$

тогава той е сходящ.

Оказва се че това твърдение остава в сила и при по-слаби ограничения за коефициентите, т.е. $o(n)$ версията на теоремата от Тауберов тип може да се усили до теоремата от Литълудов тип, формулирана по-долу.

Теорема 2.4 (от Литълудов тип [65]). *Ако редът* (2.6) *е* (J, z_0)*-сумируем с* $j_n(z) = J_n^*(z; z_0)$ *и коефициентите* a_n *удовлетворяват условието*

$$a_n = O(1/n), \tag{2.14}$$

то редът (2.6) *е сходящ.*

Изучавайки по-нататък поведението на реда (2.11) по периферията на кръга $D(0; R)$ и разглеждайки за удобство случая $R = 1$, ние даваме зависимост между разпределението на регулярните точки на функцията (2.15) върху окръжносттаа $C(0; 1)$ и равномерната сходимост на реда (2.11) върху множеството от тези точки. Твърдения, които се отнасят до дискутираното свойство са установени за редове по полиноми на Лагер и Ермит (виж например Русев [76]). Тук са дадени теореми от такъв тип за разглежданите Беселови редове (2.11).

Теорема 2.5 (от типа на Фату [65]). *Нека* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условията*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n\to\infty} (\ |a_n|\ )^{1/n} = 1,$$

и $F(z)$ *е сумата на реда* (2.11) *в единичния кръг* $D(0; 1)$*, т.е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{J}_n(z), \quad z \in D(0; 1). \tag{2.15}$$

Нека σ *е произволна дъга от единичната окръжност* $C(0; 1)$ *всички точки на която (включително краищата) са регулярни за функцията* F*. Тогава редът* (2.11) *е сходящ, даже равномерно, върху дъгата* σ*.*

3 Глава 3

Глава 3 (3 секции) е посветена на свръхсходимостта на редове по функциите на Бесел в комплексната равнина. За целта в Секция 3.1 са припомнени добре известни класически резултати за широко разпространените степенни редове.

В Секция 3.2 се установява свръхсходимост на редове по Беселови функции и се доказва аналог на теоремата на Адамар. За да въведем съответното понятие "свръхсходимост" и "празнини" за редовете (2.11), по аналогия със съответните дефиниции при степенните редове, редът (2.1) трябва да бъде заместен от Беселовия ред (2.11) а редицата $\{s_p\}$ от парциалните му суми – съответно с редицата $\{S_p\}$, с общ член

$$S_p(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k \widetilde{J}_k(z), \qquad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

С други думи, могат да се дадат следните дефиниции.

Дефиниция 3.1. *Беселовият ред* (2.11), *с краен радиус на сходимост* R, *се нарича свръхсходящ, ако съществува подредица* $\{S_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *на редицата от парциалните суми* $\{S_p\}_{p=0}^{\infty}$ *и област* G, *съдържаща отворения кръг* $D(0; R)$, $G \cap \partial D(0; R) \neq \varnothing$, *такива че редицата* $\{S_{p_k}\}$ *е равномерно сходяща вътре в* G.

Дефиниция 3.2. *Казва се, че функцията* F *(или редът), даден с* (2.11), *притежава Адамарови празнини, ако съществуват две редици* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, *със свойствата* $q_{n-1} \leq p_n < q_n$, $(1 + \theta)p_n \leq q_n$ $(\theta > 0)$ *и* $a_k = 0$ *за* $p_n < k < q_n \, (n = 1, 2, \ldots)$.

Забележка 3.1. *За да се въведе съответното понятие за "свръхсходимост" и "празнини" за даден ред по произволна фамилия от функции, по аналогия с Дефиниция 3.1 и 3.2, е нужно редицата* $\{S_p\}$, *дефинирана с* (3.1), *и нейната подредица* $\{S_{p_k}\}$ *да се заместят със съответната редица от парциалните им суми* $\{S_p\}$ *и техните подредици.*

И така, вече сме готови да формулираме следващите резултати, които се отнасят за редове с Адамарови празнини по функциите на Бесел от първи род, дефинирани с (2.10).

Теорема 3.1 (за свръхсходимост [65])**.** *Нека* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието* $\limsup\limits_{n\to\infty} (\, |a_n| \,)^{1/n} = 1$, *нека* $F(z)$ *е сумата на реда* (2.11) *в отворения единичен кръг* $D(0; 1)$, $F(z)$ *има поне една регулярна точка, принадлежаща на окръжността* $C(0; 1)$, *и нека* $F(z)$ *притежава Адамарови празнини. Тогава редът* (2.11) *е свръхсходящ.*

Теорема 3.2 (от Адамаров тип за празнините [65])**.** *Нека* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *е редица от комплексни числа, удовлетворяващи условията*

$$\limsup_{n\to\infty} (\, |a_{k_n}| \,)^{1/k_n} = 1$$

за $k_{n+1} \geq (1 + \theta)k_n$ $(\theta > 0)$, $a_k = 0$ *за* $k_n < k < k_{n+1}$ *и* $F(z)$ *е сумата на реда* (2.11) *в единичния кръг* $D(0; 1)$, *т.е.*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} \widetilde{J}_{k_n}(z), \quad z \in D(0; 1).$$

Тогава всички точки на единичната окръжност $C(0;1)$ са сингулярни за функцията F, т.е. единичната окръжност е естествена граница на аналитичност за реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{k_n} \widetilde{J}_{k_n}(z). \tag{3.2}$$

В Секция 3.3 е разгледана обратната задача. Аналогично на случая за степенните редове, добавянето на ред от вида (2.11) с радиус на сходимост по-голям от 1 към даден свръхсходящ ред от същия вид с радиус на сходимост 1, запазва свръхсходимостта на дадения ред [53]. Твърдение от този вид, но за редове на Фурие е установено от Ковачева в публикацията [34].

По-нататък е дадено твърдение, обратно на Теорема 3.1, което гласи, че свръхсходящият ред (2.11) с радиус на сходимост 1 може да се представи като сума на два реда – първият с радиус на сходимост по-голям от 1, а вторият – с Адамарови празнини. По-точно, вярна е следната теорема.

Теорема 3.3 (за свръхсходимост [67]). *Нека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от комплексни числа, удовлетворяваща условието $\limsup\limits_{n\to\infty} (\,|a_n|\,)^{1/n} = 1$, нека $F(z)$ е сумата на реда (2.11) в единичния кръг $D(0;1)$ и редът (2.11) е свръхсходящ. Тогава $F(z)$ може да се представи във вида*

$$F(z) = H(z) + G(z), \tag{3.3}$$

където редът $H(z)$ притежава Адамарови празнини, а радиусът на сходимост на реда $G(z)$ е по-голям от 1.

4 Глава 4

Глава 4 (6 секции) се занимава с няколкоиндексните обобщения. на Беселовите функции от първи род, получени с добавяне на допълнителни индекси включително хипер-Беселовата функция. В Секция 4.1. се дава кратка историческа справка за възникването на обобщенията на Беселовите функции и се дават дефинициите им (Тази секция има помощен характер.). По-надолу тези функции са изброени по реда на тяхното появяване. Първо започваме с двуиндексното обобщение на функцията на Бесел (по-точно на свързаната с нея функция (1.3) на Бесел–Клифорд). Тази цяла функция, съдържаща един допълнителен индекс μ, е въведена от Райт [87] и е наречена функция на Бесел–Райт, именно

$$J_\nu^\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\,\Gamma(\nu+\mu k+1)}\,, \quad \mu > -1, \tag{4.1}$$

за детайли виж [41, стр.109]; [22, стр.336], и др. Тя е известна в литературата още като функция на Бесел–Мейтланд, по второто име на Сър Едуард Мейтланд

Райт. Първоначално Райт дефинира (4.1) само за стойности на $\mu > 0$ а на по-късен етап разширява нейната дефиниция за $\mu > -1$ (например [22], [28]). По-общи са три- и четирипараметричните обобщения на Беселовата функция J_ν. Това са обобщената функция на Бесел–Мейтланд (или Райт), въведена от Патак [70] (за детайли виж също [27]):

$$J^{\mu}_{\nu,\lambda}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma(\lambda+k+1)\Gamma(\nu+k\mu+\lambda+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \quad \mu > 0, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

и обобщената функция на Ломел–Райт

$$J^{\mu,m}_{\nu,\lambda}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(\Gamma(\lambda+k+1))^m \,\Gamma(\nu+k\mu+\lambda+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \quad \mu > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

въведена от де Отейза, Кала и Конде (детайли и резултати, свързани с дробното смятане могат да се видят в [27] и също [73]).

Друго интересно обобщение е така наречената *хипер-Беселова функция* $J^{(m)}_{\nu_1,\dots,\nu_m} = J^{(m)}_{(\nu_i)}(z)$, дефинирана с формулата

$$J^{(m)}_{\nu_1,\dots,\nu_m}(z) = J^{(m)}_{(\nu_i)}(z) = \frac{\left(\frac{z}{m+1}\right)^{\nu_1+\dots+\nu_m}}{\Gamma(\nu_1+1)\dots\Gamma(\nu_m+1)}\; j^{(m)}_{\nu_1,\dots,\nu_m}(z)\,, \tag{4.4}$$

където $z,\ \nu_i \in \mathbb{C}$, $Re(\nu_i+1) > 0$ $(i = 1, \dots, m)$, и

$$j^{(m)}_{\nu_1,\dots,\nu_m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{m+1}\right)^{k(m+1)}}{(\nu_1+1)_k \dots (\nu_m+1)_k}\, \frac{1}{k!}, \qquad |z| < \infty. \tag{4.5}$$

Имайки предвид (4.5), хипер-Беселовите функции могат да се запишат във вида

$$J^{(m)}_{\nu_1,\dots,\nu_m}(z) = \left(\frac{z}{m+1}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{m+1}\right)^{k(m+1)}}{\Gamma(k+\nu_1+1)\dots\Gamma(k+\nu_m+1)}\, \frac{1}{k!}. \tag{4.6}$$

Тази функция е въведена от Делерю [4] през 1953 г. като естествено обобщение от ред m с векторни индекси $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$ (или с мултииндекси $(\nu_1, \dots, \nu_m)$) на функциите на Бесел от първи род J_ν. По-късно тази функция е изучавана и от други автори, например от Маричев [41], Димовски [5], Ключанчев [32, 33], Димовски и Кирякова [6, 7], Кирякова [22, 23, 29], Панева-Коновска [62, 65], и други.

Хипер-Беселовите функции на Делерю са тясно свързани с *хипер-Беселовите диференциални оператори* от произволен ред $m > 1$, *въведени от Димовски* [5]. Това са сингулярни линейни диференциални оператори, които се появяват много често в задачи от математическата физика като обобщения на оператора на Бесел от втори ред и могат да се представят в следните алтернативни форми

$$B = z^{\alpha_0}\frac{d}{dz}z^{\alpha_1}\dots\frac{d}{dz}z^{\alpha_m} = z^{-\beta}\prod_{k=1}^{m}\left(z\frac{d}{dz}+\beta\gamma_k\right) \tag{4.7}$$

$$= z^{-\beta}\left(z^m\frac{d^m}{dz^m}+a_1z^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}+...+a_{m-1}z\frac{d}{dz}+a_m\right),$$

за $0 < z < \infty$, с множество от $(m+1)$ параметъра $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\}$, или $\{\beta > 0,\ \gamma_k$ реални, $k = 1, ...m\}$, или $\{\beta > 0,\ a_1, ..., a_m\}$. Детайлите могат да се видят също в Димовски и Кирякова [6, 7], и Кирякова [22, Ch.3]. Наистина, както е показано в Теорема 3.4.3 и Следствие 3.4.4 в Кирякова [22], фундаменталната система от решения на *хипер-Беселовото диференциално уравнение* от m-ти ред $By(z) = \lambda\, y(z),\ \lambda \neq 0$ се състои от следното множество от хипер-Беселовите функции

$$J^{(m-1)}_{1+\gamma_1-\gamma_k,...,*,...,1+\gamma_m-\gamma_k}\left[(-\lambda)^{1/m}(m/\beta)\,z^{\beta/m}\right],\ \ k = 1, ..., m,$$

при предположение за формално подреждане на параметрите γ по следния начин $\gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_m < \gamma_1 + 1$ и където $*$ означава, че е пропуснат k-ят член в индексите. Тогава, решенията на хипер-Беселовите обикновени диференциални уравнения

$$By(z) = \lambda\, y(z) + f(z)$$

могат да се изразят явно чрез хипер-Беселови функции, редове по тях, или редове по интеграли от тях [22].

Очевидно, хипер-Беселовите функции (4.6) са естествено обобщение на *функциите на Бесел* от първи род (с $m + 1 = 2$, $m = 1$), т.е.

$$J^{(1)}_{\nu}(z) = J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\nu+1)}\ \frac{1}{k!}. \tag{4.8}$$

По-нататък, в Секция 4.2 е разгледана обобщената функция на Ломел–Райт (4.3) за стойности на параметрите

$$\mu > 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

индекси ν от вида $\nu = n - 2\lambda$; и $n = 0, 1, 2, ...$, именно:

$$J^{\mu,\,m}_{n-2\lambda,\lambda}(z) = (z/2)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{(\Gamma(\lambda+k+1))^m\Gamma(n-\lambda+k\mu+1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.9}$$

Дадени са някои свойства, свързани с параметрите на тези функции, а като частни случаи са получени резултати и за функциите

$$J^{\mu}_{n}(z) \quad \text{и} \quad J^{\mu}_{n-2\lambda,\lambda}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Аналогични свойства са получени и за

$$J^{(m)}_{(\nu_i)}(z), \quad \text{за} \quad \nu_{i_0} = n;\ 0 \leq i_0 \leq m. \tag{4.11}$$

В резултат са получени представянията на функциите $J_n^{\mu}(z)$ и $J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)$, както следва:

$$J_n^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\left(1+\vartheta_n^{\mu}(z)\right), \quad \mu > 0, \tag{4.12}$$

и респективно

$$J_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z) = \frac{(-1)^p (z/2)^{n+2p}}{(\Gamma(\lambda+p+1))^m\,\Gamma(n-\lambda+p\mu+1)}\,\left(1+\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)\right), \tag{4.13}$$

като p и s ($p \geq 0,\ s \geq 1$) са дефинирани по-горе в тази секция според стойностите на параметрите.

В Секция 4.3 са оценени абсолютните стойности на целите функции ϑ_n^{μ} и $\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}$ в цялата комплексна равнина, при което са получени полезни неравенства. Освен това е доказано, че ако $K \subset \mathbb{C}$ е непразно компактно множество, то съществува константа $0 < C = C(K) < \infty$, такава че са изпълнени неравенствата

$$|\vartheta_n^{\mu}(z)| \leq C\,\Gamma(n+1)/\Gamma(n+1+\mu), \tag{4.14}$$

$$|\vartheta_{n-2\lambda,\lambda}^{\mu,m}(z)| \leq C\,\frac{|\Gamma(n-\lambda+p\mu+1)|}{|\Gamma(n-\lambda+(p+s)\mu+1)|}, \tag{4.15}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}_0$ и всяко $z \in K$ (със съответните стойности на p и s, дадени в Секция 4.2). В края на секцията е формулиран аналогичен резултат за функциите (4.11), чието доказателство е изложено в Секция 6.3.

В Секция 4.4 са дадени асимптотични формули за "големи" стойности на индексите за тези специални функции. Доказани са резултати от типа на (1.4) и (1.5). В Секции 4.5 и 4.6 се дават някои частни случаи и асимптотични формули за тях. В заключение да отбележим, че тази глава се опира основно на публикациите [62] и [65].

5 Глава 5

Глава 5 (6 секции) изучава съответно функциите на Митаг-Лефлер и техните 3-параметрични обобщения, въведени от Прабхакар. Главата започва с кратък исторически преглед (Секция 5.1) за функцията на Митаг-Лефлер, въведена в началото на 20-ти век от самия Митаг-Лефлер. Неговите изследвания са свързани с решаването на задачата за аналитично продължение на комплекснозначни функции, представени със степенни редове. Функцията, до която стига при решаването на тази задача, по-късно е наречена *функция на Митаг-Лефлер.* Той я дефинира със степенен ред по следния начин

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{C},\ \Re(\alpha) > 0. \tag{5.1}$$

Тази функция е просто обобщение на експоненциалната функция, тъй като може да се получи след заместване на израза $k! = \Gamma(k+1)$, който се намира в знаменателя на общия член на степенния ред за $\exp(z)$, с $\Gamma(\alpha k + 1)$, поради което понякога тя се нарича *обобщена експонента*. Основните свойства на тази функция са изучени както от Митаг-Лефлер [45]–[50], така също и от Уиман [85]. Както е отбелязано от самия Митаг-Лефлер, редът (5.1) е сходящ в цялата комплексна равнина за всички стойности на параметъра α, за които $Re\alpha > 0$, и поради това той представя цяла функция на комплексната променлива z. Добре известно е, че ако $\alpha > 0$, то редът (5.1) е пример за цяла функция с ред $\rho = 1/\alpha$ и тип $\sigma = 1$.

През първата половина на двадесети век функцията на Митаг-Лефлер остава почти непозната за по-голямата част от учените. Най-вероятно за първи път интерес към тази функция е проявен от Хил и Тамаркин [12], поради прилагането ѝ за представянето на решението на интегралното уравнение на Абел от втори род чрез нея. Описание на най-важните свойства на (5.1) е направено в трети том на "Ръководство за висши трансцендентни функции" на Бейтман [10]. В него функциите на Митаг-Лефлер са включени в глава XVIII, посветена на така наречените различни (miscellaneous) функции. Приписването на епитета "различна" на функцията на Митаг-Лефлер се дължи на факта, че чак по-късно, през 1960-те тя е разпозната като елемент на по-широк клас от висши трансцендентни функции, известни като H-функции на Фокс (виж например [43, 19, 44]). В днешно време тази функция и нейните многобройни обобщения са включени в различни дробни модели (както е описано например в монографиите изброени по-долу в края на тази секция). Специалната роля на функцията на Митаг-Лефлер е изтъкната от Кирякова [27], [28], и е включена в класа на специалните функции за дробното смятане. Освен това, базирайки се на ролята на функцията на Митаг-Лефлер в приложението, Майнарди я нарича "Кралицата на дробното смятане" (виж например [40]). Поради тази изключителна роля на фамилията от функции на Митаг-Лефлер, всеки нов точен резултат, включващ тези функции, изглежда много интересен.

Първото обобщение на функцията $E_\alpha(z)$, също наречено функция на Митаг-Лефлер, което е дадено по-долу

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \tag{5.2}$$

е въведено от Агарвал [1], макар че някои факти за него са споменати от Уиман в [85] по-рано (почти пет десетилетия). Редица зависимости, свързани с тази функция, са получени от Агарвал и Хумберт [13] с използване апарата на трансформацията на Лаплас. Тази функция би могла да бъде наречена функция на Агарвал, но Агарвал и Хумберт щедро са ѝ оставили същото име като на еднопараметричната функция на Митаг-Лефлер. Това е причината, поради която, днес двупараметричната функция (5.2) се нарича също *функция на Митаг-Лефлер*. Тази функция е подробно изследвана и от Джрбашян [8, 9], който получава асимптотични формули в различни области, както и разнообразни свойства на интегрални трансформации, съдържащи функции на Митаг-Лефлер. Интересно е да се спомене фактът, че двама от пионерите на съвременната българска математика, са прилагали функцията на Митаг-Лефлер (въпреки че не са споменавали изрично името ѝ, те са използвали вече приетото означение E_α в своите изследвания в областта на комплексния анализ). През 1930 г. Никола Обрешков [51, 52] дефинира обобщен метод за сумиране (по-точно метод от типа на Борел за аналитично продължение на комплексни функции, дефинирани със сходящи степенни редове), определя го като така нареченото сумиране на Митаг-Лефлер и изучава асимптотиката на функцията на Митаг-Лефлер. По-късно, през 1969 г., Любомир Илиев [14, 15] използва функцията на Митаг-Лефлер в конструктивната теория на функциите на Лагер. Във множеството от степенни редове той дефинира линеен диференциален оператор $\mathcal{D}_\alpha$, породен от функцията на Митаг-Лефлер $E_{\alpha,\alpha}$.

Следващото обобщение на функцията $E_\alpha(z)$ е предложено от Прабхакар [72] (Секция 5.3), който обобщава (5.1), а също така и (5.2), въвеждайки трипараметричната функция $E^\gamma_{\alpha,\beta}$ от вида

$$E^\gamma_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C},\ \ Re(\alpha) > 0, \tag{5.3}$$

където $(\gamma)_k$ е символът на Поххамер ([10], Секция 2.1.1), даден с (1.1). За $\gamma = 1$ функцията $E^\gamma_{\alpha,\beta}$ съвпада с $E_{\alpha,\beta}$, а за $\gamma = \beta = 1$ с E_α, т.е.

$$E^1_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z), \quad E^1_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z).$$

Обобщената 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер (5.3) е известна в литературата още като *функция на Прабхакар*. Тя също е цяла функция на z с ред $\rho = 1/Re(\alpha)$, както е споменато в [21] и [42]. Самият Прабхакар изучава някои свойства на тази функция, както и свойствата на един интегрален оператор, съдържащ я като ядро, и прилага получените резултати за да докаже съществуването и единствеността на решението на съответното интегрално уравнение. По-късно са доказани и други свойства на $E^\gamma_{\alpha,\beta}(z)$, включително диференциране и интегриране от класически и дробен ред, от Килбас, Сайго и Саксена [20]. Наскоро беше публикувано подробно изследване от Кристиян Лаволт [35]. В него се изучават обобщени дробни диференциални и интегрални оператори от обобщената функция на Митаг-Лефлер, като освен това се обобщават обичайните ѝ свойства. Отбелязани са и важни приложения за теоретична физика и приложна математика.

За различни свойства на Прабхакаровата функция от Митаг-Лефлеров тип може да се види в монографията на Килбас, Сривастава и Трухильо [21], а за нейното скорошно използване в триенето и обобщените ядра на паметта, както и в точните решения на обобщеното дробно уравнение на Ланжевин – например в Сандев, Метцлер, Томовски [79], [80], в Сандев, Чечкин, Кантц и Метцлер [78], Сандев, Томовски и Дубелдам [81] и в Сандев и Томовски [82]. Изучаван е също и интегрален оператор, който има за ядро функция от такъв вид, в пространството $L(a, b)$. Тази функция играе фундаментална роля в описанието на аномалните диелектрични свойства в неразпределените материали и хетерогенните системи, които проявяват едновременно нелокалност и нелинейност [11]. Функциите (5.3) и редове по тях са използвани напоследък за изразяване на решенията на обобщеното уравнение на Лангевин от Сандев, Томовски и Дубелдам [81], а също така и за разлагане по собствените функции на решението на двучленно дробно уравнение (относно времето) от Бажлекова и Димовски [2, 3].

В Секция 5.4 са направени изследвания на 3-параметрична функция на Митаг-Лефлер (5.3) в зависимост от параметрите, а в Секции 5.2 и 5.5 са доказани неравенства от типа (1.5) съответно за функциите E_n, $E_{\alpha,n}$ и $E^{\gamma}_{\alpha,n}$, с цял неотрицателен индекс n.

В последната секция на главата (Секц. 5.6) са осигурени няколко асимптотични формули за "големи" стойности на индексите n, които се използват съществено в по-нататъшното изложение. Те са дадени съответно в следващите две теореми.

Теорема 5.1. [65] *Нека $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, тогава функциите на Митаг-Лефлер E_n и $E_{\alpha,n}$ имат следните асимптотични формули*

$$E_n(z) = 1 + \theta_n(z), \quad \theta_n(z) \to 0 \quad \textit{когато} \;\; n \to \infty, \tag{5.4}$$

$$E_{\alpha,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \; (1 + \theta_{\alpha,n}(z)), \quad \theta_{\alpha,n}(z) \to 0 \quad \textit{когато}\; n \to \infty, \tag{5.5}$$

за $z \in \mathbb{C}$. Функциите $\theta_n(z)$, $\theta_{\alpha,n}(z)$ са холоморфни там, а в компактните подмножества на комплексната равнина $\mathbb{C}$ сходимостта е равномерна и освен това са изпълнени равенствата

$$\theta_n(z) \; = \; O\left(1/n!\right) , \quad \theta_{\alpha,n}(z) \; = \; O\left(1/n^{\alpha}\right) \cdot \tag{5.6}$$

Теорема 5.2. [65] *Нека z, α, $\gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\gamma \neq 0$, $Re(\alpha) > 0$. Тогава обобщените функции на Митаг-Лефлер $E^{\gamma}_{\alpha,n}$ удовлетворяват следните асимптотични формули*

$$E^{\gamma}_{\alpha,n}(z) = \frac{(\gamma)_p}{\Gamma(\alpha p + n)} \; z^p \; \left(1 + \theta^{\gamma}_{\alpha,n}(z)\right) \;\; \textit{и} \;\; \theta^{\gamma}_{\alpha,n}(z) \to 0 \;\; \textit{когато} \;\; n \to \infty, \tag{5.7}$$

със съответната стойност на p, според стойността на γ. Функциите $\theta^{\gamma}_{\alpha,n}$ са холоморфни в комплексната равнина $\mathbb{C}$, а в компактните подмножества на $\mathbb{C}$ сходимостта е равномерна и

$$\theta^{\gamma}_{\alpha,n}(z) \; = \; O\left(\frac{1}{n^{Re(\alpha)}}\right) \quad (n \; \in \mathbb{N}). \tag{5.8}$$

Накрая да отбележим, че стойността на p във формула (5.7) зависи от параметрите, а подробните изследвания, свързани с това, се намират в Секция 5.4. В частност при $\gamma = 1$ формулите (5.7) и (5.8) водят до верността на (5.5) и втората от (5.6) за стойности на параметъра $\alpha \in \mathbb{C}$ с $Re(\alpha) > 0$.

6 Глава 6

Въпреки че функциите на Митаг-Лефлер остават дълго време незабелязани и непознати, в днешно време са се появили най-разнообразни техни обобщения във връзка с приложенията им като решения на уравнения и системи от дробен ред, които моделират различни феномени и числени алгоритми. В края на двадесети век е въведен и изучаван от Якубович и Лучко [88], Лучко и Горенфло [37], Лучко [36] и Кирякова [24] – [28] клас от специални функции от Митаг-Лефлеров тип, които са мултииндекни аналози на $E_{\alpha,\beta}(z)$.

В тези функции индексите $\alpha := 1/\rho$, $\beta := \mu$ са заместени от две множества от мултииндекси, или вектор-индекси, а именно

$$\alpha \to (1/\rho_1, 1/\rho_2, ..., 1/\rho_m) \quad \text{и} \quad \beta \to (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m),$$

от размерност $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$E_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right),(\mu_i)}(z) = E^m_{\left(\frac{1}{\rho_i}\right),(\mu_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho_1}+\mu_1\right) \ldots \Gamma\left(\frac{k}{\rho_m}+\mu_m\right)}, \tag{6.1}$$

където $\rho_1, ..., \rho_m > 0$ и $\mu_1, ..., \mu_m$ са произволни реални (комплексни) числа.

Този интересен клас от функции се появява за първи път в качеството на явно решение на задачи от типа на Коши за дробни диференциални уравнения от дробен мултиред в монографията [88]. Теорията на този клас от мултииндексни функции на Митаг-Лефлер е подробно развита в поредица от статии от Кирякова и други автори. По-конкретно, в Кирякова [25] е доказано, че мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.1) са цели функции от ред ρ и тип σ, свързани със зависимостите:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_m}, \qquad \sigma = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}} \cdots \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_m}}. \tag{6.2}$$

В тази статия, а също и в [28], могат да бъдат намерени редица други основни свойства, интегрални и диференциални формули и пр. за (6.1). Информация за приложенията на този клас от специални функции в решенията на уравнения и модели от дробен ред може да се намери например в Кирякова и Лучко [31]. Изследването на Килбас, Королева и Рогозин [18] описва историческото развитие на теорията на тези мултииндексни ($2m$-параметрични) Митаг-Лефлерови функции като подклас на обобщените хипергеометрични функции на Райт ${}_p\Psi_q(z)$. Методът на представянето чрез интеграл от типа на Мелин–Барнс позволява на тези автори да разширят въпросните функции и да ги изучат за случая на произволни стойности на параметрите (например за комплексни параметри информация има в [16] и [17]).

Мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.1) могат да се разглеждат също и като "дробно индексни" аналози на Беселовите и хипер-Беселовите функции и обобщения на дълъг списък от специални функции, използвани в математическата физика, дробното смятане и също така като решения на разнообразни математически модели (например в изследванията на Кирякова [28], [27], [26], и Кирякова и Лучко [31]).

Гореизложения материал от тази глава се съдържа в Секция 6.1. В Секция 6.2 са дадени резултати, свързани с параметрите на (6.1), а в Секция 6.3 – неравенства и асимптотични формули за тях от типа на (1.4) и (1.5).

Наскоро, в [56], [59] и също в монографията [65], които са основата на тази глава, са въведени и изучавани $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер, които обобщават едновременно функциите на Прабхакар (5.3) и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с $2m$ параметъра, дадени с (6.1). По-долу е дадена тяхната дефиниция от Секция 6.4.

Дефиниция 6.1. [56, 65] *Нека $m > 1$ е естествено число и да разгледаме параметрите α_i, β_i, $\gamma_i \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha_i) > 0)$, за всички стойности на $i = 1, 2, \dots m$. Посредством мултииндексите (α_i), (β_i), (γ_i) въвеждаме така наречените $3m$-параметрични функции (мултииндексни) на Митаг-Лефлер, именно:*

$$E^{(\gamma_i),\,m}_{(\alpha_i),\,(\beta_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \, \frac{z^k}{(k!)^m}. \tag{6.3}$$

По-нататък в тази секция ние сме доказали следното твърдение, което дава реда и типа на (6.3).

Теорема 6.1. [65] *Ако никой от параметрите $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ не е отрицателно цяло число или нула, то мултииндексната функция на Митаг-Лефлер* (6.3) *е цяла функция с ред ρ и тип σ, дадени със зависимостите:*

$$\frac{1}{\rho} = Re(\alpha_1) + \dots + Re(\alpha_m), \tag{6.4}$$

съответно

$$\frac{1}{\sigma} = |(\rho\alpha_1)^{\rho\alpha_1}| \dots |(\rho\alpha_m)^{\rho\alpha_m}| \,. \tag{6.5}$$

Освен това, за всяко положително число ε е в сила асимптотичната оценка

$$|E^{(\gamma_i),\,m}_{(\alpha_i),\,(\beta_i)}(z)| < \exp((\sigma + \varepsilon)|z|^\rho), \quad |z| \geq r_0 > 0, \tag{6.6}$$

със стойности на ρ и σ както е дадено в (6.4) *и* (6.5), *за $|z| \geq r_0(\varepsilon)$ и $r_0(\varepsilon)$ достатъчно голямо.*

Съответно, в другия случай, когато някой от параметрите $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ е отрицателно цяло число или нула, имаме следното алтернативно твърдение.

Теорема 6.2. [65] *Ако поне един от параметрите $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ е отрицателно цяло число или нула, то мултииндексната функция на Митаг-Лефлер* (6.3) *се редуцира до крайна сума, както следва:*

$$E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),\,(\beta_i)}(z) = \sum_{k=0}^{M} \frac{(\gamma_1)_k \dots (\gamma_m)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) \dots \Gamma(\alpha_m k + \beta_m)} \, \frac{z^k}{(k!)^m} \,. \tag{6.7}$$

Тъй като повечето от специалните функции на математическата физика са частни случаи на обобщените хипергеонетрични функции ${}_pF_q$, и по този начин на по-общите G-функции на Майер [10, Том 1, Гл. 5] и H-функция на Фокс, то в Секция 6.5 са дадени тяхните дефиниции.

Дефиниция 6.2. *Под понятието H-функция на Фокс се разбира обобщена хипергеометрична функция, дефинирана чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс*

$$
\begin{aligned}
H_{p,\,q}^{m,\,n}(\sigma) &= H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[\sigma \left| \begin{matrix} (a_1,\ A_1)\dots(a_p,\ A_p) \\ (b_1,\ B_1)\dots(b_q,\ B_q) \end{matrix} \right.\right] \\
&= H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[\sigma \left| \begin{matrix} (a_k,\ A_k)_1^p \\ (b_k,\ B_k)_1^q \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}'} \mathcal{H}_{p,\,q}^{m,\,n}(s)\sigma^s ds
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

с подинтегрална функция от вида

$$
\mathcal{H}_{p,\,q}^{m,\,n}(s) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}\Gamma(b_i - sB_i)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+sA_j)}{\prod\limits_{i=m+1}^{q}\Gamma(1-b_i+sB_i)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j - sA_j)}.
$$

Кривата $\mathcal{L}'$ е подходящо избран контур в $\mathbb{C}$, $m,\ n,\ p,\ q$ са цели числа $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$, параметрите $a_j, b_i \in \mathbb{C}$, $A_j, B_i > 0$, $j = 1,\dots,p$, $i = 1,\dots,q$ и $A_j(b_i + l) \ne B_i(a_j - l' - 1)$, $l, l' = 0, 1, 2, \dots$. Информация за различни типове контури и условия за съществуване и аналитичност на функцията (6.8) в кръгове $\subset \mathbb{C}$ с радиуси $\rho = \prod\limits_{j=1}^{p} A_j{}^{-A_j}\prod\limits_{i=1}^{q} B_i{}^{B_i}$, може да бъде намерена в [74], [22, Апендикс], [21], [42] и други.

За $A_1 = \dots = A_p = 1$, $B_1 = \dots = B_q = 1$, функцията (6.8) се обръща в по-популярната $G-$функция на Майер [10, Том 1, Гл. 5, 23, 14]. Тъй като G- и H-функциите обхващат почти всички елементарни и специални функции, това прави познаването им изключително полезно. Да отбележим, че обобщените хипергеометрични ${}_pF_q$ функции представляват специални случаи на G-функцията:

$$
\begin{aligned}
{}_pF_q(a_1,\dots,a_p; b_1,\ \dots, b_q; \sigma) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\dots(a_p)_k}{(b_1)_k\dots(b_q)_k}\frac{\sigma^k}{k!} \\
&= \frac{\prod\limits_{i=1}^{q}\Gamma(b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(a_i)} G_{p,\,q+1}^{1,\,p}\left[-\sigma \left| \begin{matrix} 1-a_1,\dots,1-a_p \\ 0, 1-b_1,\ \dots, 1-b_q \end{matrix} \right.\right],
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

докато функциите на Митаг-Лефлер (5.2) с ирационални параметри $\alpha > 0$ и обобщените хипергеометрични ${}_p\Psi_q$ функции на Райт с ирационални

$A_j, B_i > 0$, дават примери за H-функции, които не могат да се редуцират до G-функции, като например представянето (6.12) (по-долу), и също така

$$
\begin{aligned}
{}_p\Psi_q\left[\left.\begin{matrix}(a_1,\ A_1)\dots(a_p,\ A_p)\\(b_1,\ B_1)\dots(b_q,\ B_q)\end{matrix}\right|\sigma\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+kA_1)\dots\Gamma(a_p+kA_p)}{\Gamma(b_1+kB_1)\dots\Gamma(b_q+kB_q)}\frac{\sigma^k}{k!} \\
&= H^{1,\,p}_{p,\,q+1}\left[-\sigma\left|\begin{matrix}(1-a_1,\ A_1),\dots,(1-a_p,\ A_p)\\(0,1),(1-b_1,\ B_1),\dots,(1-b_q,\ B_q)\end{matrix}\right.\right].
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Обаче за $A_1 = \dots = A_p = 1,\ B_1 = \dots = B_q = 1$, както се вижда и от (6.9), е изпълнено равенството

$$
\begin{aligned}
{}_p\Psi_q\left[\left.\begin{matrix}(a_1,\ 1)\dots(a_p,\ 1)\\(b_1,\ 1)\dots(b_q,\ 1)\end{matrix}\right|\sigma\right] &= \frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a_i)}{\prod_{i=1}^{q}\Gamma(b_i)}\,{}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\ \dots,b_q;\sigma) \\
&= G^{1,\,p}_{p,\,q+1}\left[-\sigma\left|\begin{matrix}1-a_1,\dots,1-a_p\\0,1-b_1,\ \dots,1-b_q\end{matrix}\right.\right].
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Само да отбележим, че функциите на Митаг-Лефлер са пример за специални функции, които не могат да бъдат включени в схемата на G-функциите на Майер, бидейки образец за по-общата H-функция на Фокс, именно

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) &= H^{1,\,1}_{1,\,2}\left[-z\left|\begin{matrix}(0,\ 1)\\(0,\ 1),(1-\beta,\ \alpha)\end{matrix}\right.\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}'}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}ds,
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

с подходящ контур на интегриране $\mathcal{L}'$ (може да се види например в [22, Апендикс]), и само за рационални стойности на $\alpha = p/q$, (6.12) се свежда до G-функция. По-общите ${}_p\Psi_q$ функции на Райт също служат за такъв пример.

В Секция 6.6 е определено мястото на въведените функции (6.3) сред познатите специални функции, по-специално в класовете на обобщените хипергеометрични функции на Райт и H-функциите на Фокс (повече за техните дефиниции и свойства може да се намери например в [74], [22, Апендикс]).

За тази цел, вземайки

$$\gamma_i \in \mathbb{C},\ Re(\gamma_i) > 0; \quad i = 1,\dots,m,$$

първо определяме две числови множества, както е дадено по-долу:

$$S_l = \{s : s = -k \quad (k \in \mathbb{N}_0)\},$$

$$S_r = \{s : s = l + \gamma_i, \quad (l \in \mathbb{N}_0)\},$$

за които веднага може да бъде записана следната забележка.

Забележка 6.1. *Сечението на множествата S_l и S_r е празно множество, т.е. $S_l \cap S_r = \varnothing$. Освен това, ако*

$$\widetilde{\gamma} = \min_{i=1\div m} Re(\gamma_i), \tag{6.13}$$

то множеството S_l лежи от лявата страна на ивицата

$$S = \{s : s \in \mathbb{C}, \quad 0 < \gamma' \le Re(s) \le \gamma'' < \widetilde{\gamma}\}, \tag{6.14}$$

докато множеството S_r лежи от дясната ѝ страна.

Тука ние доказваме следните нови представяния.

Теорема 6.3. [65] *Нека $\alpha_i > 0$, $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, и $Re(\gamma_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.3) се изразяват чрез обобщените хипергеометрични функции на Райт, а също така и чрез H-функциите на Фокс, както следва:*

$$\begin{aligned} E^{(\gamma_i), m}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) &= A\ {}_m\Psi_{2m-1}\left[\begin{array}{c} (\gamma_1,\ 1), \dots, (\gamma_m,\ 1) \\ (\beta_1,\ \alpha_1), \dots, (\beta_m,\ \alpha_m), (1,1), \dots, (1,1) \end{array} \middle| z \right] \\ &= A\ H^{1, m}_{m, 2m}\left[-z \middle| \begin{array}{c} (1-\gamma_1,\ 1), \dots, (1-\gamma_m,\ 1) \\ [(0,1), (1-\beta_i,\ \alpha_i)]_1^m \end{array} \right], \end{aligned} \tag{6.15}$$

където с A е означен следният израз $A = \left[\prod\limits_{i=1}^{m} \Gamma(\gamma_i)\right]^{-1}$.

Те имат следните представяния чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс, разширяващи интегралната формула (6.12):

$$E^{(\gamma_i), m}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(z) = \frac{A}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}'} \mathcal{H}^{1, m}_{m, 2m}(s)(-z)^s ds = \frac{A}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \mathcal{H}^{1, m}_{m, 2m}(-s)(-z)^{-s} ds, \tag{6.16}$$

за $|\arg(-z)| < \pi$, където $\mathcal{H}^{1, m}_{m, 2m}(s)$ е функцията

$$\mathcal{H}^{1, m}_{m, 2m}(s) = \frac{\Gamma(-s) \prod\limits_{i=1}^{m} \Gamma(\gamma_i + s)}{[\Gamma(1+s)]^{m-1} \prod\limits_{i=1}^{m} \Gamma(\beta_i + s\alpha_i)}, \tag{6.17}$$

и $\mathcal{L}$ е произволен контур в $\mathbb{C}$ разположен от $-i\infty$ до $+i\infty$ по такъв начин, че полюсите $s = -k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(s)$ да лежат отляво на $\mathcal{L}$, а полюсите $s = l + \gamma_i$ ($l \in \mathbb{N}_0$) на $\Gamma(\gamma_i - s)$ ($i = 1, \dots, m$) – от дясната ѝ страна.

Като следствие от тази теорема се получава следният резултат.

Следствие 6.1. [65] *Нека $\alpha_i > 0$, $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ и $Re(\gamma_i) > 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава трансформацията на Мелин от $3m$-индексната функция на Митаг-Лефлер се изразява както следва:*

$$\mathcal{M}[E^{(\gamma_i), m}_{(\alpha_i), (\beta_i)}(-t)](s) = A\ \mathcal{H}^{1, m}_{m, 2m}(-s) \tag{6.18}$$

с $t > 0$, $0 < Re(s) < \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}$ *и* $\mathcal{H}^{1,\,m}_{m,\,2m}$ *са като определените в* (6.13), *респективно* (6.17), *а коефициентът* $A = \left[\prod_{i=1}^{m} \Gamma(\gamma_i)\right]^{-1}$.

За илюстрация в Секция 6.7 са описани различни интересни специални случаи на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер, както с $2m$, така и с $3m$ индекса.

7 Глава 7

Глава 7, която се състои от 6 секции, е свързана с дробно смятане в разглежданите класове от мултииндексни функции. Понятието "дробно смятане" (ДС) или "дробен анализ" се използва като разширение на "смятане" ("анализ"), когато редът на диференциране и интегриране може да бъде произволно число (дробно, ирационално, комплексно), т. е. не задължително цяло. Подробности за неговата теория и приложение могат да се намерят например в *енциклопедията на ДС* [77] и също в неотдавна публикуваните [83, 71], а стратегията и идеологията за по-нататъшното развитие може да се видят в [38, 39].

Най-популярната дефиниция за интегриране от ред

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad (Re(\lambda) > 0),$$

е за *дробния интеграл на Риман–Лиувил*

$$R^{\lambda} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z-t)^{\lambda-1} f(t)dt = \frac{z^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} f(z\tau)d\tau\,. \tag{7.1}$$

Тогава *дробната производна на Риман–Лиувил* от ред

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad (Re(\lambda) > 0),$$

се дефинира като композиция на производна от цял ред и интеграл от дробен ред от вида (7.1), именно:

$$D^{\lambda} f(z) := D^n\, R^{n-\lambda} f(z), \tag{7.2}$$

където

$$n := [Re(\lambda)] + 1 > Re(\lambda),\ [Re(\lambda)] = \text{цялата част на } Re(\lambda).$$

В първата секция на тази глава (Секция 7.1) ние пресмятаме дробните интеграли (7.1) и производни (7.2) на Риман–Лиувил от мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.3). За тази цел най-напред се нуждаем от производните от цял ред. Диференцирането на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер (6.3) е дадено със следното елементарно твърдение.

Теорема 7.1. [56, 65] *Нека $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \omega \in \mathbb{C}$. Нека освен това са изпълнени условията*

$$Re(\alpha_i) > 0,\ Re(\beta_{i_0}) > 0,\ i = 1, \ldots, m, \quad 1 \le i_0 \le m,\ \text{и}\ i_0 \in \mathbb{N}.$$

Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила следното тъждество:

$$\begin{aligned} D^n[z^{\beta_{i_0}-1} E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] &= \left(\frac{d}{dz}\right)^n [z^{\beta_{i_0}-1} E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] \\ &= z^{\beta_{i_0}-n-1} E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\widetilde{\beta}_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}}), \quad |\arg z| < \pi, \end{aligned} \tag{7.3}$$

със стойности на параметрите съответно

$$\widetilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - n \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}_i = \beta_i,\ \text{ако}\ i \neq i_0.$$

Забележка 7.1. *Допълнително, ако $\alpha_{i_0},\ \beta_{i_0} \in \mathbb{N}$, то* (7.3) *е коректно не само за $|\arg z| < \pi$ но и за всички комплексни стойности на z, евентуално с изключение на нулата. Всичко това се отнася и за останалите резултати в тази глава.*

Забележка 7.2. *В частност, като резултат от* (7.3)*, ние получаваме следните тъждества, свързани с 3-параметричните и мултииндексните (с $2m$ параметъра) функции на Митаг-Лефлер:*

$$D^n[z^{\beta-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\omega z^{\alpha})] = z^{\beta-n-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta-n}(\omega z^{\alpha}),$$

$$D^n[z^{\beta_{i_0}-1} E^{m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-n-1} E^{m}_{(\alpha_i),(\widetilde{\beta}_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}}),$$

със стойности $\widetilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - n$ и $\widetilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$. Тези резултати следват, като се вземат предвид (5.3) *и* (6.1)*, за $m = 1$, съответно $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 1$. Споменатите релации са добре познати и могат да се намерят например в [20] и [25].*

Останалите резултати, доказани в тази секция, са свързани с интегралите и производните на Риман–Лиувил за мултииндексните функции от произволен ред и са формулирани по-долу.

Теорема 7.2. [56, 65] *Нека $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \omega,\ \lambda,\ z \in \mathbb{C}$, и освен това $Re(\alpha_i) > 0$, $Re(\beta_{i_0}) > 0$, $Re(\lambda) > 0$, за $i = 1, \ldots, m$, $1 \le i_0 \le m$, $i_0 \in \mathbb{N}$. Тогава е в сила следното тъждество:*

$$R^{\lambda}[z^{\beta_{i_0}-1} E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}+\lambda-1} E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\widetilde{\beta}_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}}) \quad (|\arg z| < \pi), \tag{7.4}$$

с $\widetilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} + \lambda$ и $\widetilde{\beta}_i = \beta_i$, ако $i \neq i_0$.

Теорема 7.3. [56, 65] *Нека* $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \omega,\ \lambda,\ z\ \in \mathbb{C}$, *и освен това* $Re(\alpha_i) > 0$, $Re(\beta_{i_0}) > 0$, $Re(\lambda) > 0$, *за* $i = 1, \ldots, m$, $1 \le i_0 \le m$, $i_0 \in \mathbb{N}$, *тогава е в сила следното тъждество*

$$D^{\lambda}[z^{\beta_{i_0}-1} E^{(\gamma_i),\,m}_{(\alpha_i),\,(\beta_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}})] = z^{\beta_{i_0}-\lambda-1} E^{(\gamma_i),\,m}_{(\alpha_i),\,(\widetilde{\beta}_i)}(\omega z^{\alpha_{i_0}}) \quad (|\arg z| < \pi), \tag{7.5}$$

с $\widetilde{\beta}_i = \beta_i$, *ако* $i \ne i_0$, *и* $\widetilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} - \lambda$.

Наред с класическите дефиниции на Риман–Лиувил за оператори от дробен ред, в литературата се използват много други модификации и техни обобщения. Изглежда, че най-полезните оператори на класическото ДС са тези на Ердей–Кобер (за подробности може да се види например в Кирякова [22]). Изключителен интерес в това отношение представлява и наскоро публикуваната статия [30].

Както е отразено в Секция 7.2, дробният интегрален оператор на Ердей–Кобер е дефиниран по следния начин:

$$\begin{aligned} I^{\beta,\lambda}_{\mu} f(z) &= \left[z^{-(\beta+\lambda)} R^{\lambda} z^{\beta} f(z^{1/\mu})\right]_{z\to z^{\mu}} \\ &= \frac{z^{-\mu(\beta+\lambda)}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z (z^{\mu} - t^{\mu})^{\lambda-1} t^{\beta\mu} f(t) d(t^{\mu}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^1 (1-\tau)^{\lambda-1} \tau^{\beta} f(z\tau^{1/\mu}) d\tau, \end{aligned} \tag{7.6}$$

а съответният диференциален оператор на Ердей–Кобер може да бъде записан символично както следва:

$$D^{\beta,\lambda}_{\mu} f(z) = \left[z^{-\beta} D^{\lambda} z^{\beta+\lambda} f(z^{1/\mu})\right]_{z\to z^{\mu}}, \tag{7.7}$$

където λ, $\mu > 0$ и β са реални параметри ($D^{\beta,0}_{\mu} f(z) = I^{\beta,0}_{\mu} f(z) = f(z)$ по подразбиране) и $D^{\beta,\lambda}_{\mu} I^{\beta,\lambda}_{\mu} = Id$. Случаите $\mu = 2$ са въведени от Снедон, докато тези, първоначално разглеждани от Кобер и Ердей имат $\mu = 1$. Операторите на Ердей–Кобер (7.6) и (7.7) имат многобройни приложения, подчертани още от Снедон, и са широко използвани в ДС и диференциалните уравнения от дробен ред, за да моделират различни видове от физични, икономически, и други процеси. Така например Пагнини [54], разглежда така наречената дробна дифузия на Ердей–Кобер и фамилия от дифузионни процеси, управлявани от ggBm (обобщено сиво Брауново движение).

По същество в тази секция е използван операторът (7.6), като първо са пресметнати дробните интеграли на Ердей–Кобер от функциите (5.3), а след това и на (6.3). Установеният резултат е формулиран по-долу.

Теорема 7.4. [59, 65] *Нека* $i = 1, 2, \ldots, m$, i_0 *е фиксирано естествено число,* $1 \le i_0 \le m$, $z, \omega \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi$, $\omega \ne 0$, *и* $\alpha,\ \beta,\ \alpha_i,\ \beta_{i_0},\ \lambda > 0$. *Тогава*

$$I^{\beta-1,\lambda}_{1/\alpha} E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\omega z) = E^{\gamma}_{\alpha,\,\beta+\lambda}(\omega z), \tag{7.8}$$

$$I_{1/\alpha_{i_0}}^{\beta_{i_0}-1,\lambda} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\widetilde{\beta}_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) \tag{7.9}$$

със стойности

$$\widetilde{\beta}_{i_0} = \beta_{i_0} + \lambda; \quad \widetilde{\beta}_i = \beta_i, \ i \neq i_0.$$

Секция 7.3 започва с припомняне на дефиницията на операторите от така нареченото Обобщено дробно смятане (ОДС) на Кирякова [22], [25].

Дефиниция 7.1. *Нека $m \geq 1$ е цяло число и*

$$\lambda_i \geq 0, \ \mu_i > 0, \ \beta_i \in \mathbb{R}, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Да разгледаме вектора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ като мултитегло и съответно $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ като мултиред на дробно интегриране. Интегралните оператори, дефинирани по-долу:

$$I_{(\mu_i),m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) = \begin{cases} \int\limits_0^1 H_{m,m}^{m,0} \left[\tau \left| \begin{smallmatrix} (\beta_i+\lambda_i+1-1/\mu_i, 1/\mu_i)_1^m \\ (\beta_i+1-1/\mu_i, 1/\mu_i)_1^m \end{smallmatrix} \right. \right] f(z\tau) d\tau, \ \text{ако} \ \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i > 0, \\ f(z), \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0, \end{cases} \tag{7.10}$$

се наричат многократни (m-кратни) интегрални оператори на Ердей–Кобер за дробно смятане. По-общо, операторите от вида

$$I f(z) = z^{\lambda_0} I_{(\mu_i),m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) \quad \text{с} \quad \lambda_0 \geq 0 \tag{7.11}$$

накратко се наричат обобщени (m-кратни) дробни интеграли.

Нека сега σ е произволно реално число. Означаваме с $\mathcal{H}(\Omega)$ пространството от холоморфни функции в комплексната област Ω, звездообразна относно началото $z = 0$, и разглеждаме пространствата

$$\mathcal{H}_\sigma(\Omega) = \{f(z) = z^p \tilde{f}(z); \ p \geq \sigma, \tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\Omega)\}, \quad \mathcal{H}_0(\Omega) := \mathcal{H}(\Omega).$$

За $\beta_i > -1 - \sigma/\mu_i$ and $\lambda_i > 0$, операторите (7.10) изобразяват пространството $\mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ в самото него (Кирякова, [22]).

Основното свойство на обобщените многократни (m-кратни) дробни интеграли е, че единичните интеграли (7.10), които съдържат H-функция, могат да се представят еквивалентно като комутативни композиции на единични интеграли на Ердей–Кобер от вида (7.6), а именно за $f \in \mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ с $\beta_i > -1 - \sigma/\mu_i$, $\lambda_i > 0$ и $i = 1, 2, \ldots, m$, както следва:

$$\begin{aligned} I_{(\mu_i),m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) &= \prod_{i=1}^m I_{\mu_i}^{\beta_i,\lambda_i} f(z) \\ = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 &\left[\prod_{i=1}^m \frac{(1-\tau_i)^{\lambda_i-1} \ \tau_i^{\beta_i}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] f(z \, \tau_1^{1/\mu_1} \ldots \tau_m^{1/\mu_m}) \, d\tau_1 \ldots d\tau_m. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ако стойностите на някои λ_i са нули, например $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0, 1 \leq k \leq m$, то съответните им оператори $I_{\mu_i}^{\beta_i,\lambda_i} = I$ са оператори-идентитети и кратността на (7.10) се свежда от m до $m-k$ (както и при H-функциите, които са ядро на интеграла). Декомпозиционната зависимост (7.12) е ключ към разнообразни приложения на (7.10) и (7.11), произтичаща от простичките, но доста ефективни свойства на G- и H-функциите и мощния апарат на прилагането им.

Сега по аналогия с Теорема 7.4 е доказана релация, съдържаща обобщения дробен интеграл (7.10).

Теорема 7.5. [59, 65] *Нека $z, \omega \in \mathbb{C}$, $|\arg z| < \pi$, $\omega \neq 0$, и α_i, β_i, $\lambda_i > 0$ за $1 \leq i \leq m$. Тогава*

$$I_{(1/\alpha_i),m}^{(\beta_i-1),(\lambda_i)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z) = E_{(\alpha_i),(\beta_i+\lambda_i)}^{(\gamma_i),m}(\omega z).$$

За пълнота да отбележим, че обобщените дробни производни, съответни на (7.10), са дефинирани в [22] с диференциално-интегрални изрази, по аналогия с идеята за (7.2).

Дотук в тази глава се занимавахме с намиране на различни производни и интеграли от произволен ред от представители на $3m$-параметрични функции, при които полученият резултат е функция от същия вид. По-нататъшните ни усилия са насочени към намиране на зависимости между представители на двата класа от функции (Секция 7.4 – Секция 7.6).

В неотдавнашната публикация [2] е доказана проста зависимост която свързва n-та производна на двупараметричните функции на Митаг-Лефлер и трипараметричните им обобщения (направени от Прабхакар), а именно:

$$E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) = n! E_{\alpha,\beta+n\alpha}^{n+1}(z). \tag{7.13}$$

Тази зависимост провокира интерес към въпроса за съществуването на подобна връзка между мултииндексните аналози на тези функции и възбужда желание за намирането ѝ, ако тя съществува.

Преди да преминем нататък, в Секция 7.4 въвеждаме следното общоприето означение за оператора за n-кратно диференциране

$$D^n = \frac{d^n}{dz^n} = \left(\frac{d}{dz}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

като отбележим, че ако $n = 0$, по подразбиране се приема, че $D^n f(z) = f(z)$, т. е. $D^0 f(z) = f(z)$.

В следващата теорема е получена зависимост между функцията$E_{(\alpha_i),(\beta_i+n\alpha_i)}^{(\gamma_i),m}$ (при посочени стойности на параметрите γ_i) и n-та производна на $E_{(\alpha_i),(\beta_i)}$. Оказва се, че в този случай е вярна формула, аналогична на (7.13), т.е производните от цял ред на $2m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер се изразяват чрез $3m$-параметричните, също с точност до константа. По-конкретно, в сила е следната теорема.

Теорема 7.6. *Нека $\alpha_i, \beta_i, z \in \mathbb{C}$ и нека $Re(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \ldots, m$. Тогава е в сила следното равенство:*

$$D^n \left[E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)\right] = \frac{d^n}{dz^n} \left[E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)\right] = \Gamma(n+1)\, E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i+n\alpha_i)}(z), \qquad (7.14)$$

за всички стойности на $n \in \mathbb{N}_0$, с параметри $\gamma_1 = n+1$, $\gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 1$.

В Секция 7.5 са разгледани интегралите (7.1) и производните (7.2) на Риман–Лиувил от дробен ред и са пресметнати такива за мултииндексните функции (6.1), умножени с подходяща степенна функция. В резултат се получава функция от вида (6.3), с точност до константа. За целта нека да вземем $\widetilde{\lambda}$, $z \in \mathbb{C}$ и $|\arg z| < \pi$ и да въведем означението

$$\widetilde{E}_{\alpha,\beta}(z) = z^{\widetilde{\lambda}} E_{\alpha,\beta}(z), \quad \widetilde{E}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z) = z^{\widetilde{\lambda}} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z) = z^{\widetilde{\lambda}} E^m_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z) \qquad (7.15)$$

за функциите, чиито дробни производни и интеграли са намерени по-нататък в тази секция.

Започвайки с най-простия случай $m = 1$, можем да формулираме следващото елементарно твърдение и едно следствие от него.

Теорема 7.7. *Нека α, β, $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $0 < Re(\widetilde{\lambda}) < 1$, $n \in \mathbb{N}$, и нека $\lambda = n - 1 + \widetilde{\lambda}$. Тогава*

$$D^\lambda[\widetilde{E}_{\alpha,\beta}(z)] = \Gamma(\lambda+1) E^{\lambda+1}_{\alpha,\beta+(n-1)\alpha}(z) \qquad (\text{за } |\arg z| < \pi). \qquad (7.16)$$

Следствие 7.1. *Ако α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$ и $0 < Re(\lambda) < 1$, то е в сила тъждеството*

$$D^\lambda[z^\lambda E_{\alpha,\beta}(z)] = \Gamma(\lambda+1) E^{\lambda+1}_{\alpha,\beta}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi). \qquad (7.17)$$

По-надолу са формулирани и останалите получени резултати в тази секция. Първите два от тях са свързани с диференцирането, а останалите с интегрирането.

Теорема 7.8. *Нека α_i, β_i, $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{C}$ и $Re(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \ldots, m$. Нека освен това $0 < Re(\widetilde{\lambda}) < 1$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lambda = n - 1 + \widetilde{\lambda}$. Тогава е в сила*

$$D^\lambda[\widetilde{E}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)] = \Gamma(\lambda+1) E^{(\gamma_i)}_{(\alpha_i),(\beta_i+(n-1)\alpha_i)}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \qquad (7.18)$$

с параметри $\gamma_1 = \lambda + 1, \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 1$.

Следствие 7.2. *Ако α_i, β_i, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \ldots, m$, и $0 < Re(\lambda) < 1$, то е изпълнено равенството*

$$D^\lambda[z^\lambda E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z)] = \Gamma(\lambda+1) E^{(\gamma_i)}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \qquad (7.19)$$

с параметри $\gamma_1 = \lambda + 1, \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 1$.

Теорема 7.9. *Нека α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$, и нека $Re(\alpha) > 0$ и $0 < Re(\lambda) < 1$. Тогава*

$$R^{\lambda}[z^{-\lambda} E_{\alpha,\beta}(\omega z)] = \Gamma(1-\lambda)\, E^{1-\lambda}_{\alpha,\beta}(\omega z) \qquad (\text{за } |\arg z| < \pi). \tag{7.20}$$

Теорема 7.10. *Нека α_i, β_i, $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Re(\alpha_i) > 0$ за $i = 1, \ldots, m$. Нека освен това $0 < Re(\lambda) < 1$. Тогава*

$$R^{\lambda}[z^{-\lambda} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z)] = \Gamma(1-\lambda)\, E^{(\gamma_i)}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z) \quad (\text{за } |\arg z| < \pi), \tag{7.21}$$

с параметри $\gamma_1 = 1-\lambda, \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 1$.

В последната секция на Глава 7 разглеждаме интеграла от дробен ред на Ердей–Кобер, дефиниран с (7.6), в комплексната равнина и го изучаваме за стойности на параметрите

$$\mu = 1,\ \lambda > 0,\ \beta = -\lambda,$$

като го прилагаме за двупараметричните функции $E_{\alpha,\beta}$ на Митаг-Лефлер (5.2) и $2m$-параметричните мултииндексни функции (6.1). В резултат се получават съответно трипараметричните функции на Митаг-Лефлер и $3m$-параметричните мултииндексни функции (6.3).

Лема 7.1. *Нека $i = 1, 2, \ldots, m$ и нека α, β, α_i, β_i, γ_i, ω, $z \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$. Нека освен това $Re(\alpha) > 0$, $Re(\alpha_i) > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Тогава*

$$I_1^{-\lambda,\lambda} E_{\alpha,\beta}(\omega z) = \Gamma(1-\lambda) E^{1-\lambda}_{\alpha,\beta}(\omega z), \tag{7.22}$$

$$I_1^{-\lambda,\lambda} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z) = \Gamma(1-\lambda)\, E^{(\gamma_i),m}_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z), \tag{7.23}$$

с параметри

$$\gamma_1 = 1-\lambda; \quad \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 1.$$

Забележка 7.3. *Всъщност, трябва да отбележим, че получените дотук в тази секция резултати съвпадат с тези от Секция 7.5, свързани с Риман–Лиувиловия интеграл, защото разглеждания интеграл на Ердей–Кобер е с параметри*

$$\mu = 1 \quad \text{и} \quad \beta + \lambda = 0$$

и поради това формулата (7.6), която дефинира интеграла на Ердей–Кобер, се свежда до следния вид

$$I_1^{(-\lambda),(\lambda)} f(z) = R^{-\lambda}\left(z^{-\lambda} f(z)\right)$$

за стойности на параметъра $\lambda > 0$.

Забележка 7.4. *Ако $\mu_i = \mu$, за $i = 1, \ldots, m$, то изразът (7.10) се означава просто с $I^{(\beta_i),(\lambda_i)}_{\mu,m} f(z)$ вместо с $I^{(\beta_i),(\lambda_i)}_{(\mu),m} f(z)$, а самите формули (7.10) и (7.11) се редуцират до*

$$I_{\mu,m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) = \begin{cases} \int\limits_0^1 G_{m,m}^{m,0} \left[\tau \left| \begin{smallmatrix} (\beta_i+\lambda_i)_1^m \\ (\lambda_i)_1^m \end{smallmatrix} \right. \right] f(z\tau^{\frac{1}{\mu}}) d\tau, & \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i > 0, \\ f(z), \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0, & \end{cases} \tag{7.24}$$

и съответно

$$If(z) = z^{\lambda_0} I_{\mu,m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) \quad c \quad \lambda_0 \geq 0. \tag{7.25}$$

Аналогично на (7.10), еднократните интеграли в (7.24), съдържащи G-функцията могат да се представят в еквивалентна форма като комутативни композиции на еднократни интеграли на Ердей–Кобер от вида (7.6), а именно за $f \in \mathcal{H}_\sigma(\Omega)$ с $\beta_i > -1 - \sigma/\mu$, $\lambda_i > 0$ и $i = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{gathered} I_{\mu,m}^{(\beta_i),(\lambda_i)} f(z) = \prod_{i=1}^m I_\mu^{\beta_i,\lambda_i} f(z) \\ = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left[\prod_{i=1}^m \frac{(1-\tau_i)^{\lambda_i - 1}\, \tau_i^{\beta_i}}{\Gamma(\lambda_i)} \right] f\left((z\,\tau_1 \ldots \tau_m)^{1/\mu} \right) \, d\tau_1 \ldots d\tau_m. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Ако някои от λ_i са нули, например $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0, 1 \leq k \leq m$, то съответните множители $I_\mu^{\beta_i,\lambda_i} = I$ са оператори-идентитети и тогава кратността на (7.24) се редуцира от m до $m-k$, както и реда на G-функцията (която е ядрото). Декомпозиционната зависимост (7.26) е ключ към различни приложения на (7.24) и (7.25), произтичащи от простичките, но доста ефективни свойства на G-функциите. Обобщените дробни производни, съответстващи на (7.24), са дефинирани в [22] с диференциално-интегрални изрази, по аналогия с идеята за (7.2) и (7.7).

Сега, по аналогия с Лема 7.4 е доказана зависимост, съдържаща обобщения дробен интеграл (7.24), която свързва $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер с интеграла (7.24) от $2m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер, дадена във формулираната по-долу теорема.

Теорема 7.11. *Нека α_i, β_i, ω, $z \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha_i) > 0$, $0 < \lambda_i < 1$ $(1 \leq i \leq m)$ и $\omega \neq 0$. Тогава е в сила тъждеството*

$$I_{1,m}^{(-\lambda_i),(\lambda_i)} E_{(\alpha_i),(\beta_i)}(\omega z) = \Gamma(1-\lambda_1) \ldots \Gamma(1-\lambda_m) \; E_{(\alpha_i),(\beta_i)}^{(1-\lambda_i),m}(\omega z). \tag{7.27}$$

8 Глава 8

Глава 8 (6 секции) е посветена на изучаването на редове по различни изброими системи от функции от типовете, разглеждани дотук. За да се получат резултатите във възможно по-опростен вид, системите от функции са нормирани, чрез умножаване на разглежданите функции с подходящи коефициенти и степенни функции.

За целта първо въвеждаме следните означения, свързани с функциите от Беселов тип:

$$\widetilde{J}_n^{\mu}(z) = z^n \Gamma(n+1) J_n^{\mu}(z), \tag{8.1}$$

$$\widetilde{J}^{\mu,\,m}_{n-2\lambda,\,\lambda}(z) = (-1)^p z^{-2p} 2^{n+2p} \Gamma^m(\lambda+p+1)\Gamma(n-\lambda+p\mu+1) J^{\mu,\,m}_{n-2\lambda,\,\lambda}(z), \tag{8.2}$$

за $n = 0, 1, 2, \ldots$ и със съответните p, дефинирани в Секция 4.2.

По-нататък са въведени функциите от Митаг-Лефлеров тип:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_0(z) = 1, \quad \widetilde{E}_n(z) = z^n\, E_n(z), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{E}^0_{\alpha,\,0}(z) = 1, \quad \widetilde{E}^0_{\alpha,\,n}(z) = \Gamma(n)\, z^n\, E^0_{\alpha,\,n}(z), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{E}^{\gamma}_{\alpha,\,n}(z) = \frac{\Gamma(\alpha p + n)}{(\gamma)_p}\, z^{n-p}\, E^{\gamma}_{\alpha,\,n}(z) \quad (\gamma \neq 0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{8.3}$$

със съответните стойности на p, определени в Секция 5.4 (тук $\widetilde{E}_0(z)$ и $\widetilde{E}^0_{\alpha,\,0}(z)$ са въведени само за пълнота).

Най-сетне, за мултииндексните функции въвеждаме означенията:

$$\widetilde{E}_{(\alpha_i),\,\left(\mu_{i_0}(n)\right)}(z) = z^{n-p}\, E_{(\alpha_i),\,(\mu_i)}(z)\, \Gamma(\alpha_{i_0} p + n) {\prod_{i=1}^{m}}{}' \,\Gamma(\alpha_i p + \mu_i), \tag{8.4}$$

с $\mu_{i_0} = n$, $1 \leq i_0 \leq m$ и съответните стойности на p, определени в Секция 6.2, съответно

$$\widetilde{J}^{(m)}_{(\nu_{i_0}(n))}(z) = C_{m,n} \left(\frac{z}{m+1}\right)^{-{\sum\limits_{i=1}^{m}}{}'\nu_i} J^{(m)}_{(\nu_i)}(z), \quad \nu_{i_0} = n, \tag{8.5}$$

където символът $C_{m,n}$ е използван за означаване на израза

$$C_{m,n} = (m+1)^n\, \Gamma(n+1) {\prod_{i=1}^{m}}{}' \,\Gamma(\nu_i + 1), \tag{8.6}$$

с параметри, както следва:

$$\alpha_i > 0,\ \mu_i,\ \nu_i \in \mathbb{C},\ Re(\nu_i + 1) > 0\ (i = 1, \ldots, m),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Накрая, нека за удобство да означим кратко

$$\widetilde{J} := \left\{\widetilde{j}_n\right\}_{n \in \mathbb{N}_0}$$

коя да е от споменатите фамилии. В тази глава се изучават редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \widetilde{j}_n(z), \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8.7}$$

в комплексната равнина, т.е. намират се техните кръгове на сходимост и се изследва поведението им по границата, а получените резултати са аналогични на класическите резултати, както е и при редовете по Беселови функции (2.10) в Глава 2. Формулировките на резултатите и подробностите от техните доказателства са първо публикувани в [57], [58] и [60]–[63].

9 Глава 9

Последната Глава 9 (6 секции) е посветена на свръхсходимостта на изучаваните редове в Глава 8, а резултатите отново са аналози на класическите. Изложението започва с достатъчни условия за свръхсходимост (Секция 9.1) за редовете от Беселов тип. В Секция 9.2 са намерени някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, които се отнасят до подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях, а обратните теореми са доказани в Секция 9.3.

Достатъчни условия за свръхсходимост на редове от Митаг-Лефлеров тип се съдържат в Секция 9.4. Полезни неравенства за подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях за такива редове се намират в Секция 9.5, а обратните теореми са доказани в Секция 9.6 (резултатите са публикувани в [66], [68, 69]).

Заключителни бележки

Тук се посочва аналогията между получените резултати с класическите резултати. Изложени са примери от литературата, потвърждаващи практическата значимост на получените резултати.

10 Използвана литература и участие в научни проекти

Библиографията се състои от 132 заглавия, публикувани до 2017 г. Тя обаче няма претенциите да представя пълния списък от литературни източници. Допълнителна информация може да намери в монографиите и обзорните статии, споменати в Увода.

Дисертационият труд се базира в голяма степен на монографията на дисертанта "*From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence*" [65], публикувана в международното издателство World Scientific Publishing, а също така и на редица публикации в специализирани международни научни списания, индексирани в световната мрежа (повечето от тях с импакт фактор или импакт ранг).

Резултатите, включени в дисертацията са установени в рамките на 1 национален проект към МОМН - НС - НИ а именно: Д ИД 02 / 25/ 2009 "Интегрално трансформационни методи, специални функции и приложения", 3 международни проекти по двустранни научни договори: "Mathematical modelling by means of integral transform methods, partial differential equations, special and generalized functions" и "Analytical and numerical methods for differential and integral equations and mathematical models of arbitrary (fractional or high integer) order"–между БАН и Сръбската АНИ и "Анализ, геометрия и топология" –

между БАН и Македонската АНИ и два бюджетни проекта на ИМИ: "Трансформационни методи, специални функции, операционни смятания и приложения" (срок: 2001 – 2014), "Трансформационни методи, специални функции и комплексни апроксимации" (срок: 2014 – продължава).

III. АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Получените резултати са докладвани на общия семинар "Анализ, геометрия и топология" на секция АГТ, годишните научни сесии на ИМИ – БАН и повече от 20 международни конференции, както у нас така и в чужбина. Между тях могат да бъдат посочени например специализираните международни конференции "Transform Methods and Special Functions", "Geometric Functions Theory" и "Fractional Differentiation and Applications". Списъкът е отделно приложен.

Благодарности

Преди всичко искам да изразя благодарността си на научния ми консултант на дисертацията за придобиване на образователната и научна степен "доктор", проф. д.м.н. П. Русев, който ме въведе в света на Беселовите функции преди повече от четвърт век.

Особено признателна съм на сътрудниците на секция "Анализ, геометрия и топология" на ИМИ – БАН за създадения благоприятен микроклимат, за отзивчивостта и постоянно проявяваното внимание към моята работа, както при участията ми на различни научни форуми, така и по време на съвместни дейности. Изказвам своята благодарност за полезните препоръки и горещата подкрепа по време на предварителната защита.

Благодарна съм и на ръководителя на катедра "Математически анализ и диференциални уравнения" на ФПМИ, ТУ – София, проф. д-р Кр. Проданова, за нейното усърдно, ентусиазирано и вдъхновяващо мотивиране за оформянето на този труд.

Най-сетне, изключително съм благодарна на моя съпруг П. Коновски и дъщеря ми Мег за тяхното всекидневно разбиране, любов и подкрепа.

Йорданка Панева-Коновска, доц. д-р
Факултет по приложна математика и информатика
Технически университет – София
&
Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

Литература

[1] R.P. Agarwal: A propos d'une note de M.Pierre Humbert, C.R. Seances Acad. Sci., **236**, No.21, pp.2031–2032, 1953.

[2] E. Bazhlekova, I. Dimovski: Exact solution for the fractional cable equation with nonlocal boundary conditions, Central European Journal of Physics, **11**, No.10, pp. 1304–1313, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0213-5.

[3] E. Bazhlekova, I. Dimovski: Exact solution of two-term time-fractional Thornley's problem by operational method, Integral Transforms and Special Functions, **25**, No 1, 61–74, 2014; DOI:10.1080/10652469.2013.815184.

[4] P. Delerue: Sur le calcul symbolic *à n* variables et fonctions hyperbesséliennes (II), Annales Soc. Sci. Bruxelle, Ser. 1, No 3, 229–274, 1953.

[5] I. Dimovski: Operational calculus for a class of differential operators, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **19**, No 12, 1111–1114, 1966.

[6] I. Dimovski, V. Kiryakova: Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., **39**, No 10, 29–32, 1986.

[7] I. Dimovski, V. Kiryakova: Generalized Poisson representations of hypergeometric functions ${}_pF_q$, $p < q$, using fractional integrals, In: Proc. 16^{th} Spring Conf. Union Bulg. Math., Sofia (1987), 205–212.

[8] M.M. Dzrbashjan: On the integral transformation generated by the generalized Mittag-Leffler functions, Izv. AN Arm.SSR **13**, No 3, 21–63 (1960) (in Russian).

[9] M.M. Dzrbashjan: Integral Transforms and Representations in the Complex Domain (in Russian), Nauka, Moskow (1966).

[10] A. Erdélyi et al. (ed-s): Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, **1–3** (1953–1955).

[11] R. Garra, R. Garrappa: The Prabhakar or three parameter Mittag–Leffler function: theory and application, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018; doi: 10.1016/j.cnsns.2017.08.018.

[12] Hille, E., Tamarkin, J. D.: On the theory of linear integral equations, Ann. Math., **31**, 479–528, 1930.

[13] P.Humbert et R.P.Agarwal: Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelquesunes de ses généralisations, Bulletin des Sciences Mathematiques, **77**, No.10, pp.180–185, 1953.

[14] L. Iliev: Нули на цели функции, Издателство на БАН, София (1979).

[15] L. Iliev: Laguerre Entire Functions, Publ. House of Bulg. Acad. Sciences, Sofia (1987).

[16] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva: Generalized Mittag-Leffler function and its extension, Tr. Inst. Mat. Minsk, **13** (1), 43–52, 2005, (In Russian).

[17] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva: Integral transform with the extended generalized Mittag-Leffler function, Mathematical Modeling and Analysis, **11**, No 2, 173–186, 2006.

[18] A. A. Kilbas, A. A. Koroleva, S. V. Rogosin: Fract. Calc. Appl. Anal., **16**, 378–404, 2013; DOI:10.2478/s13540-013-0024-9.

[19] A.A. Kilbas, M. Saigo: H-Transform. Theory and Applications, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton/London/New York/Washington, DC (2004).

[20] A.A. Kilbas, M. Saigo, R. K. Saxena: Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators, Integral Transforms and Special Functions, **15**, No. 1, 31–49 (2004).

[21] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo: Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier (2006).

[22] V. Kiryakova: Generalized Fractional Calculus and Applications, Longman Sci. Tech. & J. Wiley, Harlow - N. York (1994).

[23] V. Kiryakova: All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions, J. Physics A: Math. & General, **30**, No 14, 5085–5103, 1997; doi: 10.1088/0305-4470/30/14/019.

[24] V. Kiryakova: Multiindex Mittag-Leffler functions, related Gelfond-Leontiev operators and Laplace type integral transforms, Fract. Calc. Appl. Anal., **2**, No 4, 445–462, 1999.

[25] V. Kiryakova: Multiple (multiindex) Mittag-Leffler functions and relations to generalized fractional calculus, Journal of Computational and Applied Mathematics, **118**, 241–259, 2000; doi:10.1016/S0377-0427(00)00292-2.

[26] V. S. Kiryakova: Some special functions related to fractional calculus and fractional (non-integer) order control systems and equations, Facta Universitatis, Ser.: Automatic Control and Robotics, **7**, No 1, 79–98, 2008.

[27] V. Kiryakova: The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions, Computers and Mathematics with Appl., **59**, No 3, 1128–1141, 2010; doi:10.1016/j.camwa.2009.05.014.

[28] V. Kiryakova: The multi-index Mittag-Leffler functions as important class of special functions of fractional calculus, Computers and Mathematics with Appl., **59**, No 5, 1885–1895, 2010; doi:10.1016/j.camwa.2009.08.025.

[29] V. Kiryakova: From the hyper-Bessel operators of Dimovski to the generalized fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal., **17**, No 4, pp. 977–1000, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0210-4.

[30] V. Kiryakova: Fractional calculus operators of special functions? – The result is well predictable!, Chaos, Solitons & Fractals, **102**, pp. 2–15, 2017; doi.:10.1016/j.chaos.2017.03.006.

[31] V. Kiryakova, Yu. Luchko: The multi-index Mittag-Leffler functions and their applications for solving fractional order problems in applied analysis, In: American Institute of Physics - Conf. Proc., **1301** 597–613, 2010; doi:10.1063/1.3526661.

[32] M. Kljuchantzev: On the construction of r-even solutions of singular differential equations, Dokladi AN SSR, **224**, No 5, 1000–1008, 1975 (In Russian).

[33] M. Kljuchantzev: An introduction to the theory of $(\nu_1, ..., \nu_{r-1})$-transforms, Mat. Sbornik, **132**, No 2, 167–181, 1987 (In Russian).

[34] R. Kovacheva: Overconvergence and zero distribution of Fourier series, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **61**, No 11, 1377–1384, 2008.

[35] C. Lavault: Fractional calculus and generalized Mittag-Leffler type functions, arXiv:1703.01912v2, LIPN, Université Paris 13 (2017); https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01482060/document.

[36] Yu. Luchko: Operational method in fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal., **2**, No 4, 463–488, 1999.

[37] Yu. Luchko, R. Gorenflo: Scale invariant solutions of a PDE of fractional order, Fract. Calc. Appl. Anal., **1**, No 1, 63–78, 1998.

[38] J. T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova: Fractional calculus: quo vadimus? (Where are we going?) (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2014), pp. 495-526, **18**, No 2, 2015; DOI: 10.1515/fca-2015–0031.

[39] J.A.T. Machado, F. Mainardi, V. Kiryakova, T. Atanacković: Fractional calculus: d'où venons-nous? Que sommes-nous? Où allons-nous? (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA 2016), Fract. Calc. Appl. Anal., **15**, No 5, 1074–1104, 2016; DOI: 10.1515/fca-2016-0059.

[40] F. Mainardi: Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models, Imperial College Press & World Sci., London - Singapore (2010).

[41] O.I. Marichev: A Method of Calculating Integrals of Special Functions (Theory and Tables of Formulas) (In Russian: Metod vychisleniya in- tegralov ot spetsial'nykh funktsij (Teoriya i tablitsy formul)), Nauka i Tekhnika, Minsk (1978).

[42] A. M. Mathai, H. J. Haubold: Special Functions for Applied Scientists, Springer (2008).

[43] A. M. Mathai, R. K. Saxena: The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines, Wiley Eastern Ltd, New Delhi (1978).

[44] A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold: The H-function. Theory and applications, Springer, Dordrecht (2010).

[45] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (première note), Acta Math., **23**, pp. 43—62, 1899.

[46] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (seconde note), Acta Math., **24**, pp. 183 — 204, 1900.

[47] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (troisième note), Acta Math., **24**, pp. 205 — 244, 1900.

[48] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (quatrième note), Acta Math., **26**, pp. 353 — 392, 1902.

[49] M. G. Mittag-Leffler: Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note), Acta Math., **29**, pp. 101 — 181, 1905.

[50] M. G. Mittag-Leffler: Sur la represéntation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (sixième note), Acta Math., **42**, pp. 285 — 308, 1920.

[51] N. Obrechkoff: On the summation of Taylor's series on the contour of the domain of summability, In: Nikola Obrechkoff, Selected Papers, Part II, Academic Publ. House, Sofia (2006), Paper # 7, 39–70 (Transl. from Bulg. original in: Annuaire Univ. Sofia, Phys.-Math. 26, No 1, 53–100), 1930.

[52] N. Obrechkoff: On the summation of Taylor's series on the contour of the domain of summability, Fract. Calc. Appl. Anal., **19**, No 5, pp. 1316–1346 (Reprinted from: Annuaire Univ. Sofia, Phys.-Math. Fac. 26, No 1 (1930), 53–100, In Bulgarian), 2016; DOI: 10.1515/fca-2016-0069.

[53] A. Ostrowski: On representation of analytical functions by power series J.L.M.S., **1**, Part 4, 251–263, 1926.

[54] G. Pagnini: Erdélyi-Kober fractional diffusion, Fract. Calc. Appl. Anal., **15**, No 1, 117–127, 2012; DOI:10.2478/s13540-012-0008-1.

[55] J. Paneva-Konovska: A Tauber type theorem for series in Bessel functions, Fractional Calculus & Applied Analysis, **2**, No 5, 683–688, 1999.

[56] J. Paneva-Konovska: Multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions and fractional calculus, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., Tome **64**, No 8, 1089–1098, 2011.

[57] J. Paneva-Konovska: Series in Mittag-Leffler functions: Geometry of convergence, Adv Math Sci Journal, **1**, no. 2, 73–79 2012; UDC: 517.58:517.521.

[58] J. Paneva-Konovska: The convergence of series in multi-index Mittag-Leffler functions, Integr. Transf. Spec. Funct., **23**, No 3, 207–221, 2012; doi: 10.1080/10652469.2011.575567.

[59] J. Paneva-Konovska: On the multi-index (3m-parametric) Mittag-Leffler functions, fractional calculus relations and series convergence, Central European Journal of Physics (CEJP), **11**, no.10, 1164–1177, 2013; DOI: 10.2478/s11534-013-0263-8.

[60] J. Paneva-Konovska: Convergence of series in three-parametric Mittag-Leffler functions, Mathematica Slovaca, **64**, Issue 1, pp 73–84, 2014; DOI: 10.2478/s12175-013-0188-0.

[61] J. Paneva-Konovska: Series in Prabhakar functions and the geometry of their convergence, Mathematics in Industry (Chapter V "Algorithms in Industrial Mathematics"), pp 198–214, Cambridge, 2014.

[62] J. Paneva-Konovska: A family of hyper-Bessel functions and convergent series in them, Fract. Calc. Appl. Anal., **17**, No 4, pp. 1001–1015, 2014; DOI:10.2478/s13540-014-0211-3.

[63] J. Paneva-Konovska: On the multi-index Mittag-Leffler series and their boundary behaviour, Integral Transforms and Special Functions, **26**, No. 3, 152–164, 2015; DOI: 10.1080/10652469.2014.975129.

[64] J. Paneva-Konovska: Overconvergence of Bessel series, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **68**, No 9, 1091–1098, 2015.

[65] J. Paneva-Konovska: From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions: Enumerable Families, Series in them and Convergence, London, World Scientific Publ. (2016).

[66] J. Paneva-Konovska: On some Mittag-Leffler series: A set of overconvergence theorems, AMEE 2016, AIP Conf. proceedings, 1789, 050007, $1-6$ стр., 2016; doi: 10.1063/1.4968491.

[67] J. Paneva-Konovska: Bessel series: some results on their overconvergence, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **70**, No 1, 21–28, 2017; $http://www.proceedings.bas.bg/PDF17/H\_01-03.pdf$.

[68] J. Paneva-Konovska: Inequalities for the partial sums of some Mittag-Leffler type series, Journal of Inequalities and Special Functions, **8** No 1, pp. 42–47, 2017; URL: http://www.ilirias.com.

[69] J. Paneva-Konovska: Overconvergence of series in generalized Mittag-Leffler functions, Fract. Calc. Appl. Anal., **20**, No 2, pp. 506–520, 2017; DOI:10.1515/fca-2017-0026.

[70] R.S. Pathak: Certain convergence theorems and asymptotic properties of a generalization of Lommel and Maitland transformations, Proc. Nat. Acad. Sci., India, A-36, No 19, 81–86, 1966.

[71] I. Podlubny: What Euler could further write, or the unnoticed “big bang” of the fractional calculus, Fract. Calc. Appl. Anal., **16**, No 2, pp. 501–506, 2013; DOI:10.2478/s13540-013-0031-x.

[72] T. R. Prabhakar: A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama Math. J., **19**, 7–15, 1971.

[73] A.I. Prieto, S.S. de Romero, H.M. Srivastava: Some fractional-calculus results involving the generalized Lommel-Wright and related functions, Applied Mathematics Letters, **20**, 17–22, 2007.

[74] A. A. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev: Integrals and Series. More Special Functions, 1st edition, Gordon & Breach Sci. Publ., N. York etc. (1990).

[75] P. Russev: A theorem of a Tauber type for summation by means Laguerre polynomials, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **30**, No 3, 331–334, 1977 (In Russian).

[76] P. Russev: Classical Orthogonal Polynomials and Their Associated Functions in Complex Domain, Publ. House Bulg. Acad. Sci., Sofia (2005).

[77] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev: Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, N. York - London (1993).

[78] T. Sandev, A. Chechkin, H. Kantz, R. Metzler: Diffusion and Fokker-Planck-Smoluchowski equations with generalized memory kernel, Fract. Calc. Appl. Anal., **18**, No 4, 1006–1038, 2015; DOI: 10.1515/fca-2015-0059.

[79] T. Sandev, R. Metzler, Ž. Tomovski: Velocity and displacement correlation functions for fractional generalized Langevin equations, Fract. Calc. Appl. Anal., **15**, 426–450, 2012; DOI:10.2478/s13540-012-0031-2.

[80] T. Sandev, R. Metzler, Ž. Tomovski: Correlation functions for the fractional generalized Langevin equation in the presence of internal and external noise, J. Math. Phys. **55**, 023301, 2014; http://dx.doi.org/10.1063/1.4863478.

[81] T. Sandev, Ž. Tomovski, J. Dubbeldam: Generalized Langevin equation with a three parameter Mittag-Leffler noise, Physica A, **390**, Issue 21-22, 3627–3636, 2011; DOI: 10.1016/j.physa.2011.05.039.

[82] Ž. Tomovski, T. Sandev: Distributed-order wave equations with composite time fractional derivative, International Journal of Computer Mathematics, 14 pp, 2017. DOI:10.1080/00207160.2017.1366465.

[83] D. Valério, J.T. Machado, V. Kiryakova: Some pioneers of the applications of Fractional calculus (Historical survey), Fract. Calc. Appl. Anal., **17**, No 2, pp. 552–578, 2014; DOI: 10.2478/s13540-014-0185-1.

[84] Г.Н. Ватсон, Теория Бесселевых функций, Москва, Иностранная литература, **1** (1949).

[85] A. Wiman: Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, Acta Math., **29**, 191–201, 1905.

[86] Е.Т. Уиттекер, Г.Н. Ватсон, Курс современного анализа, Физ.-мат. литература, **1, 2**, Москва (1963).

[87] E.M. Wright: On the coeficients of power series having exponential singularities, J. London Math. Soc., **8**, 71–79, 1933.

[88] S. Yakubovich, Yu. Luchko: The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions, 1st edition, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht - Boston - London (1994).

АВТОРСКА СПРАВКА ЗА ПРИНОСИТЕ И ЦИТИРАНИЯТА

Изследванията в дисертационния труд принадлежат към една колкото стара, толкова нова област на класическия комплексен анализ – теорията на специалните функции, по-конкретно на функциите от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Започвайки развитието си още с класиците Ойлер, Коши, Бесел, Нойман, ..., преди повече от две столетия и половина, през XX век интересът към тази област е възобновен – като се започне с Митаг-Лефлер в началото на века и се премине през Райт (1933), Делерю (1953), Патак (1966), Прабхакар (1971) и т.н. Поради непрекъснато нарастващия интерес към класическите специални функции и широката им употреба се появяват многобройни техни обобщения, което продължава и в днешно време. Във връзка с приложението на интегралните трансформации и оператори за дробно смятане в математически модели на практически задачи се появяват многобройни публикации на Станкович, Маричев, Килбас, Майнарди, Горенфло, Лучко, Кирякова и много други. Трябва да се отбележи, че има достойно българско присъствие в тази област на математиката. Достатъчно е само да се споменат имената на П. Русев, Ив. Димовски, В. Кирякова, техните монографии и разбира се, издаваното от В. Кирякова и получило висок IF международно списание "Fract. Calc. Appl. Anal.".

Настоящият дисертационен труд се състои от увод, девет глави и заключителни бележки, разпределени общо в 55 секции, използвана литература и азбучен указател (индекс). В него се третира както въпросът за изследване на фамилии от известни функции, така и въвеждане на нов клас специални функции и резултати, свързани с него.

По-нататък са проследени приносите в дисертационния труд по тези направления. Тематично те могат да бъдат класифицирани по следния начин:

1) Приноси свързани с фамилии от известни специални функции
    - Неравенства и асимптотични формули
    - Редове по тези функции – сходимост
    - Редове по тези функции – свръхсходимост
2) Приноси свързани с въведения нов клас от специални функции
    - Дефиниция и основни свойства
    - Интегрални представяния
    - Дробно смятане в този клас.

На първото от двете направления са посветени Глава 1 – Глава 5, Глави 8, 9 и част от Глава 6, където се изучават фамилии от функции на Бесел и техни обобщения с 2, 3, 4 и повече индекса, функции на Митаг-Лефлер и техни обобщения с 3 индекса, в това число хипер-Беселови функции и мултииндексните ($2m$-) функции на Митаг-Лефлер. За по-кратко гореизброените функции са наречени функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Най-общо казано, Беселовите и Митаг-Лефлеровите функции имат приложения при решаването в явен вид на различни моделни ЧДУ, като вълновото уравнение с фрикционна памет, уравнението на Фокър–Планк, някои дифузионни уравнения и други.

В първите три глави е отделено внимание на Беселовите функции от първи род. След като са дадени основни означения, факти и формули, известни в литературата, в Глава 1 е доказано важно неравенство (публикувано в монографията [65]), свързано с тези функции, и е прецизирана добре известната асимптотична формула за "големи" стойности на индексите, която се отнася за тях. Полученият резултат играе съществена роля в изследването на сходимост на редове по Беселови функции в следващите две глави, особено по периферията на областта на сходимост.

Както добре знаем, класическият едномерен комплексен анализ изучава степенни редове, които са сходящи в кръгове в равнината. Затова естествено възникват въпросите за пресмятане на радиуса на сходимост, а също така и изследване на поведението на реда по периферията на кръга. В тази област през XIX и началото на XX век са установени основни теореми от Коши, Абел, Таубер, Адамар, Островски и т. н. Специално внимание се е отделило на теоремите за свръхсходимост (Островски) и за празнините (Адамар).

Във втора и трета глава се изучават редове по Беселови функции и се изследва тяхната сходимост и свръхсходимост. Резултатите, свързани със сходимостта се намират в Глава 2 [55, 65], като е намерена областта на сходимост (теорема от типа на Коши–Адамар) и редовете са изследвани както в областта на сходимост, така и по нейната периферия, т.е. установени са теореми от Абелов, Тауберов, Литълудов и Фату типове за редове по Беселови функции. Тяхната свръхсходимост се изследва в Глава 3 [64, 65, 67], като са доказани теореми от типа на Островски (за свръхсходимост) и Адамар (за празнините). Резултатите са аналогични на класическите.

В Глава 4 се изучават фамилии от няколкоиндексните обобщения на Беселовите функции от първи род, получени с добавяне на допълнителни индекси, включително хипер-Беселовата функция, а накрая са разгледани някои специални случаи на тези функции. В Глава 5 се изучават съответно функциите на Митаг-Лефлер и техните 3-параметрични обобщения, въведени от Прабхакар. В част от Глава 6 се изследват мултииндексните ($2m$-индексни) функции на Митаг-Лефлер, въведени от Якубович, Лучко и Кирякова и изследвани подробно от Кирякова. В тези три глави се намират резултати, свързани с индексите на разглежданите функции. Намерени са важни неравенства и асимптотични формули за "големи" стойности на индексите, които се използват съществено в Глави 8 и 9 (при изследване сходимост и свръхсходимост на редове по съответните функции), а освен това имат и самостоятелна стойност. Резултатите са публикувани основно в [58, 62, 65].

Глава 8 е посветена на изучаването на редове по различни изброими системи от функции от типовете, разглеждани дотук, т. е. функции от Беселов и Митаг-Лефлеров тип, и тяхната сходимост в комплексната равнина. За тях са доказани резултати от типа на теоремата на Коши–Адамар, Абел, Таубер, Литълуд и Фату, с други думи казано, аналози на класическите резултати за степенни редове, както е и при редовете по Беселови функции в Глава 2. Формулировките на резултатите и подробностите от техните доказателства са публикувани в [57], [58], [60]–[63] и [65].

В последната Глава 9 се изследва свръхсходимостта на изучаваните редове в Глава 8, а резултатите отново са аналози на класическите. В изложението се съдържат достатъчни условия за свръхсходимост за редовете от Беселов и Митаг-Лефлеров тип. Намерени са някои свойства на разглежданите свръхсходящи редове, такива като полезни неравенства за подредици на редиците от парциалните им суми и интеграли от тях, след което те са използвани за доказване на обратни теореми. Получените в тази глава резултати имат и самостоятелна стойност. Публикувани са в [65, 66] и [68, 69].

Да отбележим, че мултииндексните функции на Митаг-Лефлер могат да се разглеждат също и като "дробно индексни" аналози на Беселовите и хипер-Беселовите функции и обобщения на дълъг списък от специални функции, използвани в математическата физика, дробното смятане и също така като решения на разнообразни математически модели.

Наскоро, в [56], [59] и също в монографията [65], са въведени и изучавани $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер, които обобщават едновременно функциите на Прабхакар и мултииндексните функции на Митаг-Лефлер с $2m$ параметъра. Резултатите, получени при тяхното изследване се съдържат в Глави 6 и 7, и представляват приноси по второто направление, а именно приноси свързани с новия клас от $3m$-параметричните (мултииндексни) функции на Митаг-Лефлер.

Най-напред са установени важни основни свойства на тези функции. Именно, според стойностите на разглежданите в дефиницията параметри е доказано, че или тези функции са цели функции, и в този случай е определен редът и типът им, или се редуцират до полиноми.

Тъй като повечето от специалните функции на математическата физика са частни случаи на обобщените хипергеометрични функции ${}_pF_q$, и по този начин на по-общите G-функции на Майер и H-функции на Фокс, по-нататък е определено мястото на въведените функции сред познатите специални функции, по-специално в класовете на обобщените хипергеометрични функции на Райт и H-функциите на Фокс. По-конкретно, мултииндексните функции на Митаг-Лефлер са изразени чрез обобщените хипергеометрични функции на Райт, а също така и чрез H-функциите на Фокс, като освен това са представени чрез интеграл от типа на контурния интеграл на Мелин–Барнс. Като следствие е намерено, че трансформацията на Мелин от $3m$-индексната функция на Митаг-Лефлер се изразява чрез H-функция на Фокс.

Глава 7 е свързана с оператори за дробно смятане в разглежданите класове от мултииндексни функции. Понятието "дробно смятане" (ДС) или "дробен анализ" се използва като разширение на "смятане" ("анализ"), когато редът на диференциране и интегриране може да бъде произволно число (дробно, ирационално, комплексно), т. е. не задължително цяло. Най-популярната дефиниция за интегриране от дробен ред е за *дробния интеграл на Риман–Лиувил*, а чрез композиция на такъв оператор и диференциране от целочислен ред се дефинира дробна производна. Риман-Лиувиловите дробни интеграли и производни на мултииндексните функции на Митаг-Лефлер са широко използвани в дробното смятане.

В началото на тази глава са получени резултати за дробните интеграли и производни на Риман–Лиувил от въведените мултииндексните функции на Митаг-Лефлер, като преди това най-напред са пресметнати производните от цял ред.

Наред с класическите дефиниции на Риман–Лиувил за оператори от дробен ред, в литературата се използват много други модификации и техни обобщения. Изглежда, че най-полезните оператори на класическото ДС са тези на Ердей–Кобер. Изложението в Глава 7 по-нататък продължава с твърдение, отнасящо се за интегралите на Ердей–Кобер от 3-параметричните, и съответно за $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер.

Дотук в тази глава са намерени различни производни и интеграли от произволен ред от представители на $3m$-параметрични функции, при които получените резултати са функции от същия вид. По-нататъшните ни усилия са насочени към намиране на зависимости между представители на двата класа от функции – $2m$- и $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер. Доказани са интересни релации, свързващи $3m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер с интегралите и производните (от разгледаните видове) от $2m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер. Накрая е намерена релация между $3m$-параметричните функции и обобщените (m-кратни) дробни интеграли от $2m$-параметричните функции на Митаг-Лефлер.

Отделно от това, в монографичния труд [65] има и приноси, свързани с други фамилии от функции и резултати за пълнота в пространства от холоморфни функции, но те нямат отношение към дисертационния труд.

В заключение, можем да отбележим, че са получени многобройни нови резултати с приносен характер в областта на теорията на специалните функции, в която безспорно се извършват интензивни научни изследвания.

От публикациите [55]–[69] от списъка, свързани с дисертацията, са забелязани 48 цитирания на 8 от публикациите (от тях 1 цитиране в монография, 2 в книга, 5 броя в списания с SJR, 26 броя в списания с импакт фактор). Сумарният импакт фактор на цитиранията е IF = 44,362 & SJR = 2,080. Индексът на Хирш на автора плава в зависимост от източниците: h=6 (съгл. Thomson R. Web of Knowledge & Scopus); h=11 (съгл. Google Scholar & Harzing's Publish or Perish).