ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА -
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ЖИВКО ИВАНОВ ЖЕЛЕВ

ЕВРИСТИЧНИ ПОХВАТИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ИЗЯВЕНИ УЧЕНИЦИ И БЪДЕЩИ УЧИТЕЛИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ по научната специалност 05.07.03 „Методика на обучението по математика“

СОФИЯ
2012

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА -
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
СЕКЦИЯ „ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И
ИНФОРМАТИКА“

ЖИВКО ИВАНОВ ЖЕЛЕВ

ЕВРИСТИЧНИ ПОХВАТИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ИЗЯВЕНИ УЧЕНИЦИ И БЪДЕЩИ УЧИТЕЛИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ по научната специалност 05.07.03 „Методика на обучението по математика“

Научни ръководители: проф. дпн С. Гроздев
проф. д-р П. Петров

СОФИЯ
2012

Дисертационният труд е обсъден на разширено заседание на секция „Обучението по математика и информатика“ към ИМИ-БАН в разширен състав на 30.01.2012.

Дисертантът е докторант на свободна подготовка в секция „Обучението по математика и информатика“ към ИМИ-БАН.

Дисертационният труд съдържа увод и три глави, заключение, приложения и библиография.

Библиографията се състои от 123 заглавия. Общият обем на ръкописа е 146 страници, от които 122 страници научен текст, 16 страници – приложения и 8 страници библиография.

На свое заседание, проведено на 24 февруари 2012 г., Научният съвет на ИМИ-БАН избира Научно жури в състав: проф. дпн Сава Гроздев, проф. дпн Васил Милушев, проф. д-р Здравко Лалчев, доц. д-р Борислав Лазаров и доц. д-р Иван Тонов.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на разширено заседание на секция „Обучението по математика и информатика“ към ИМИ-БАН на 19 април 2012 г. (четвъртък) от 14:00 часа в Заседателната зала на ИМИ-БАН.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в Библиотеката на ИМИ-БАН.

Изследването на евристичната дейност при решаване на задачи е едно от перспективните направления, в което може да се развива методиката на обучението по математика. Наред с блестящите публикации на Д. Пойа [21], [22], [23], редица автори извеждат евристични схеми за решаване на математически задачи [10], [11], [12], [13], [14], [15], [17], [25], [26] [28].

Евристичните похвати като операционални структури са част от изследванията на С. Гроздев [7] с обект на изследване изявени ученици и участници в математически олимпиади. В тази посока те са едни от най-новите у нас. Една от основните тези на автора е, че в дефиницията на възможностите, свързани с явяване на математически олимпиади, понятието умение да се решава задача е определящо. Очертаните перспективи за използване на изследването водят до следните три извода:

1. Резултатите от изследването на евристичните похвати могат да се използват чрез различни модификации за масовия ученик;
2. Един от ключовите обекти на бъдещи изследвания в методиката на обучението по математика (МОМ) е разработване на подход за управление на развитието и усъвършенстването на учителите по математика и университетските преподаватели;
3. Добра перспектива за развитие на методическото познание е то да е в съответствие с рефлексията и самоорганизацията.

Освен това според него „досещането при решаване на математически задачи може да бъде подготвено и един от най-важните елементи на евристичното мислене е възможността за избор. Въпросът не е само за натрупване на информация и за нейното обработване, каквото могат да правят компютрите, а за такова обработване, което да доведе до качествено ново ниво, до нова стратегия, на каквато е способен единствено човекът. Евристиката не се заключава в пълното преработване на съществуващата информация, т. е. в изследване на всички възможни варианти за решаване на дадена задача, а в използване само на част от вариантите съгласно разумни критерии, създадени от решаващия задачата.“ [[27], стр. 170].

Решаването на задачи като процес на изследване е актуално не само в частните методики като МОМ, но и в други области на знанието – когнитивна психология, психометрия, кибернетика и др. Това е процес, който се явява индикатор не само за достигнатото ниво на знанията и уменията, на интелектуалното ниво, но и за възможностите и най-вече способностите за творчество. Именно чрез творчеството изпъкват най-силно интелектуалните качества на индивида, а само-то то не би могло да бъде напълно оценено, пълнокръвно анализирано и точно характеризирано без изграждането на хомогенен понятиен апарат на евристичната съставяща на процеса на решаване на математически задачи.

Основните теоретични цели на настоящия научен труд се изразяват в следните основни аспекти:

– Създаване на дидактически системи от задачи за формиране на умения за използване на евристики;

– Изследване на възможностите за решаване на математически задачи от гледна точка на използването на евристики;

– Изследване на възможностите на компютърните евристики при решаването на математически задачи и някои техни приложения в конкретни евристични задачи;

– Оценка на значението и ролята на рефлексията и обучаващите решения на математически задачи като част от евристичната дейност;

– Разработване на синергетичен модел на евристичната дейност при решаване на математически задачи.

Основните практически цели са осъществени чрез изработване на специални дидактически средства (дидактически тест от серии от алгоритмични, полуевристични и евристични задачи, както и чрез рефлексивен анализ на собствени и чужди решения на математически задачи, а така също и с практически оценки при използването на компютърни евристики.

Използвани са следните *методи на изследване*:

– Изучаване и анализ на дидактическа, методическа и специализирана литература по въпроса;

– Наблюдение на процесите на обучение;

– Беседи със студенти и ученици;

– Тестиране;

– Статистически анализ на емпирични данни.

Обект на изследване в дисертационния труд са изявени ученици от природоматематически гимназии и бъдещи начални учители, студенти в педагогически факултети, а *предмет на изследване* са евристичните похвати и формирането чрез тях на умения за решаване на математически задачи.

Основната хипотеза на изследването е, че развитието на уменията да се решават математически задачи е основна дейност. Тази дейност представлява сложна синергетична нелинейна система, която има възможности сама да се самоорганизира и тази самоорганизация е пряко свързана с усвояването на евристични похвати за решаване, откъдето можем да заключим, че обучаването в евристики е неотменна част в структурното изграждане на дидактиката на математиката, тъй като открива конкретни възможности в дейности, процеси, явления и фактори на качествено ново междупредметно равнище.

Използването на евристичните похвати е свързано с овладяването им както на операционално ниво, така и като рефлексия в процеса на анализ на собствени решения. Именно този дуален аспект на дейността решаване на математически задачи ще наричаме нейна „евристична съставяща“. В синергетичен план евристичните похвати и тяхното овладяване се явяват флуктуационни точки при самоорганизацията в процеса на решаване на математически задачи. Накратко *евристиките са ключът към нова дидактическа парадигма в МОМ.*

Настоящата работа е разпределна в три глави, като първата глава съдържа пет параграфа и пет подпараграфа, втора глава съдържа три параграфа и седем подпараграфа, а трета глава съдържа четири параграфа и девет подпараграфа.

Първа глава има въвеждащ характер и нейната цел е да разгледа математическата задача от гледна точка на алгоритмичния и евристичен подход. Разгледана е също така феноменологията на понятието математическа задача, а също така и някои евристични аспекти от процеса на решаване на математически задачи. Даден е и обобщен дихотомичен модел на понятието „задача“ чрез използването на математически категории.

За понятието „задача“ в науката няма общоприета трактовка. В специализираната англоезична литература например се прави разлика между понятията „problem solving“ и „solving a problem“. В първия случай се визира решаването на задачи с изградена вече методика, а във втория – частно решение на конкретна задача.

Едно от най-задълбочените и пълни изследвания върху понятието „задача“ е направено от Д. Милушева-Бойкина в [16]. Там се прави опит да се анализират и систематизират някои от основните схващания за понятието „задача“, изложени в различни научни източници. Основният извод, който се прави там, е че „отделните автори използват различни родови понятия, на базата на които да дефинират понятието „задача“ в зависимост от областта на своята дейност (проблемна ситуация, система, информационни процеси, състояние), като най-често използвана основа за определяне на понятието „задача“ е понятието „проблемна ситуация““ [[16], стр. 60].

Процесът на решаване на задачи е тясно свързан с формиране на такива мисловни похвати като анализ, синтез, обобщение, абстракция и т. н. Установено е, че процесът на мислене е преди всичко анализиране, синтезиране и обобщение. Моделите на феномена задача се различават съществено, което е резултат на различните гледни точки, от които той се разглежда. Често му се приписват характеристики, които са коренно противоположни. Най-общо изследванията се групират в две групи:

1. Тълкуване на понятието задача в широк смисъл;

2. Тълкуване на понятието задача в тесен смисъл, като тук авторите са методици и специалисти в определена научна област. Изследванията тук са насочени към типологии, структури на задачите компоненти, обосноваване на основни множества от задачи [2], [12].

Редица автори като [2], [11] изясняват същността на понятието задача както в широк, така и в тесен смисъл. За основен принос може да се счита типологията на задачите, направена от Ю. Колягин в зависимост от неизвестните нейни компоненти [2].

Често използвана основа за определяне на понятието задача е понятието „проблемна ситуация“. В този аспект са се очертали две направления в зависимост от степента на абстрахиране на задачата от субекта. В първото се счита, че задачата не съществува извън проблемната ситуация, т. е. без субект няма задача, докато във второто се поддържа тезата, че задачата може да бъде анализирана и описана откъснато от субекта, осъществяващ дейността [[11], стр. 22]. Естествено своите основания имат и двете направления.

Според известния руски геометър И. Шаригин (1937-2004) „задачите е удобно да се делят на три групи: учебни, конкурсни и олимпийски. Може да се говори и за творчески задачи, но това е по-скоро контекст, отколкото нормален признак, творческата характеристика се отнася не толкова до самата задача, колкото до процеса на нейното решаване“.

Според Балл в процеса на обучение се предлага множество от задачи, което съществува независимо от учащите се. Но по същество една задача става задача само когато ученикът я приеме, т. е. започне работа по нея. Авторът дава следната последователност за определението на понятието задача:

- Задачата е ситуация, изискваща от субекта някакви действия;
- Мисловната задача е ситуация, изискваща от субекта няколко действия за намиране на неизвестното на основата на връзките му с известните;
- Проблемната задача, или проблемът е ситуация, изискваща от субекта няколко действия за намиране на неизвестното, използвайки връзката му с известните и условието, когато субектът не познава начина за тези действия.

В. Крупич [[11], стр. 37] отбелязва, че в дидактиката се различават три нива на познавателната дейност: репродуктивно, частично търсещо и изследователско (творческо) и въз основа на това той дели задачите на три групи – алгоритмични, полуевристични и евристични. Според него алгоритмични са тези задачи, при които обучаваният придобива нови знания и установява нови закономерности, отношения и свойства необходими за обосноваването на решението на задачата, като при това алгоритмите или последователността от алгоритми е известна, а така също е известна и теоретическата основа (базис) на решението на задачата. При полуевристичните задачи неизвестни са самите алгоритми, докато при евристичните (творческите) задачи липсва информация както за самия алгоритъм на решаване на задачата, така и за теоретичните и практичните основи на нейното решение. Алгоритмична задача е например всяка задача, в която се търсят корените на квадратно уравнение. Полуевристична е например следната

Задача 1. (Кандидатстудентски изпит за всички учебни заведения, 1968) *Да се докаже, че при всяка реална стойност на параметъра* m *корените* x_1 *и* x_2 *на уравнението*

$$(m^2 - m + 2)x^2 - (2m^2 - 2m + 5)x + m^2 - m + 2 = 0$$

са положителни и да се пресметне изразът $M = \dfrac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2}}$.

За евристична може да бъде определена например следната

Задача 2. (Ж. Желев, сп. „Математически форум“, т. XI, бр. 1, 2009) *В едно крайно множество* X *са избрани 2009 подмножества* $X_1, X_2, \ldots, X_{2009}$, *като всяко от тези подмножества съдържа повече от половината елементи на X. Да се докаже, че могат да се изберат 10 елемента от множеството X, така че във всяко X_i да се съдържа поне един от така избраните елементи.*

В зависимост от най-различни условия (напр. кой решава дадена задача, на какъв етап от своето обучение се намира решаващият и т. н.) една и съща задача може да бъде отнесена към различни типове.

В методическата литература понякога се използва и понятието *полуалгоритмични задачи.* Съпоставянето на тези задачи с полуевристичните ни позволява да твърдим, че в полуалгоритмичните задачи евристичната съставяща не се явява преобладаваща, както е в полуевристичните задачи, където обратно, алгоритмичната съставяща не преобладава.

В първа глава даваме и една по-събирателна и обхватна дефиниция на понятието „развиващи функции“ на задачите.

Дефиниция 1. *Под обобщени развиващи функции на задачите и сериите от математически задачи ще разбираме всички корелации (функции, отношения, свойства), с които тези задачи стимулират, подпомагат и въздействат на всеки един структурен елемент от следните пет основни когнитивни ядра в математическото обучение, които са в съответствие с особеностите на интелектуалното развитие и математическото образование:* **метапознание, отношения, умения, процеси и концепции.**

Дефиниция 2. *Всяка една съпоставяща корелация на задачите и сериите от математически задачи с различните когнитивни ядра и конкретни техни съставящи ще наричаме тяхна специална развиваща функция, т. е. всяка една специална развиваща функция се получава от обобщаващата при съотнасянето към определен структурен елемент от дадено когнитивно ядро.*

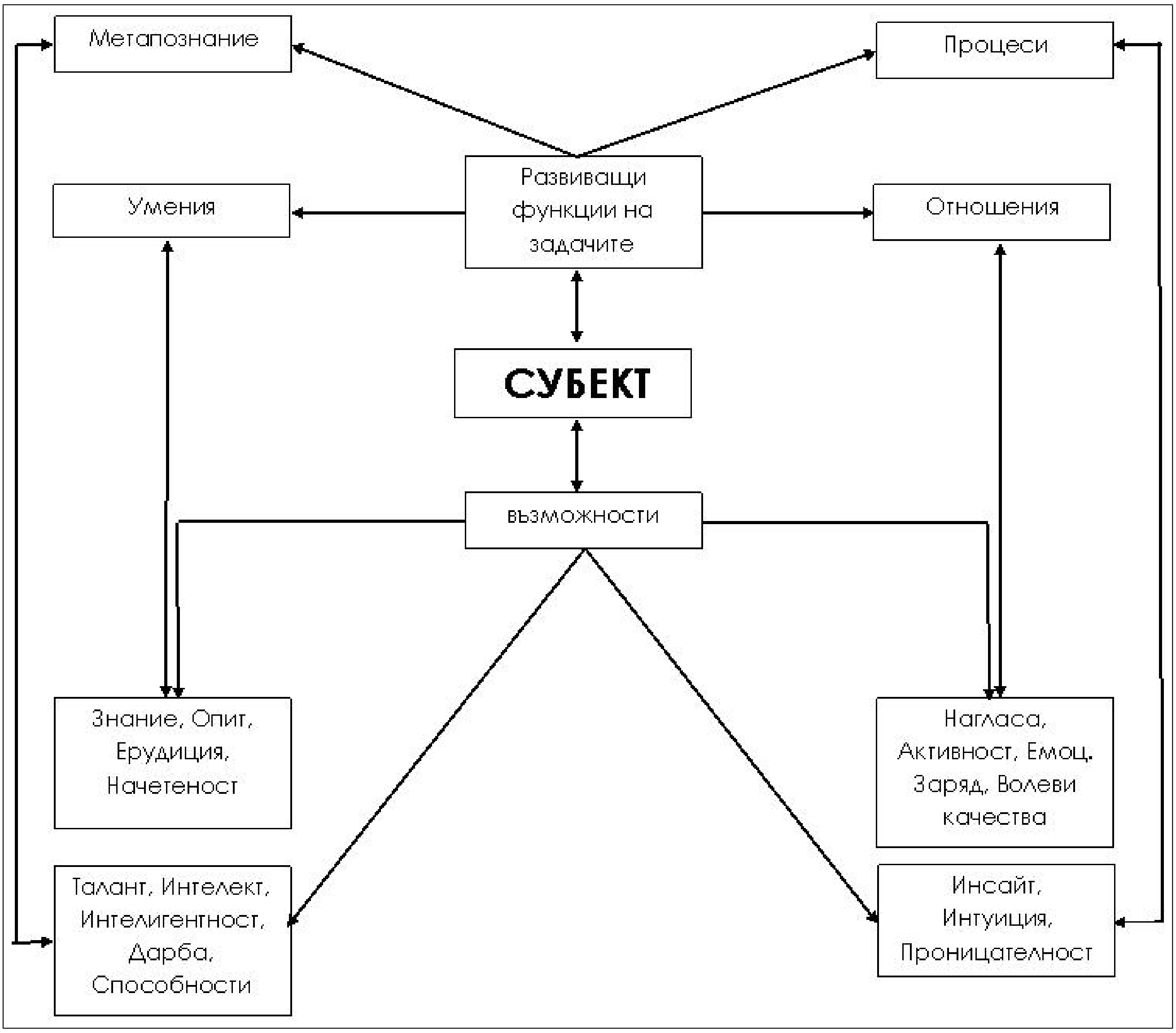
Например развитието на способност да се обобщава дадено геометрично понятие е специална развиваща функция, която се получава от следната последователност:

$$\text{задачи (серии от задачи)} \longrightarrow \text{концепции} \longrightarrow \text{геометрични концепции.}$$

Като цяло специалните развиващи функции не се определят от една единствена структурна последователност, подобна на тази по-горе, а от няколко. Причината за това е широката многоаспектност на развиващите функции на задачите, а така също и тясната връзка между отделните структури в различните когнитивни ядра.

В този си вид дефиницията ни позволява да установим връзка между развиващите функции на задачите и някои основни понятия в МОМ като „умението да се решават задачи“ [9], [17], [18], [19], [20] и „възможностите“ [[7], стр.69]. Взаимодействието между обобщените развиващи функции на задачите и възможностите на учениците (по С. Гроздев) се вижда и на Фиг 1.

Основните изводи, които можем да изведем от анализите в първа глава са,



Фигура 1: Връзка между обобщените развиващи функции на задачите и възможностите (по Гроздев).

че евристиката по своята същност представлява система от методи, които, на основата на задълбочено и всестранно познаване на конкретната предметна сфера и в резултат на приложението на нестандартни подходи при разглеждане на проблемите, ни довеждат до творчески решения и разкриване на непознати и неизследвани до момента връзки, закономерности и възможности. Последователното и правилно приложение на нейните методи е в състояние да даде нов тласък и посока на развитието на всяка област на човешкото знание. Използвана в конкретна практическа дейност, тя може да обогати нейния инструментариум на основата на адекватно съчетание на рационални и интуитивни елементи.

Можем да обобщим, че характерна черта за алгоритмичните похвати е пълната и строга детерминация на мисловните процеси с помощта на указания, съдържащи се в алгоритми, които точно и еднозначно предписват определената поредица от действия и операции, докато похватите от неалгоритмичен тип се характеризират с неопределеност и нееднозначност при избора на различни операции или редици от операции.

Във **втора глава** се изследва формирането на умения за използване на евристични похвати. Прави се опит да се изградят дидактически системи от задачи, които да показват възможностите за обучение в евристики. Кратко се очертават основите на евристичната дейност като се субординират основните понятия, свързани с понятието „евристика“.

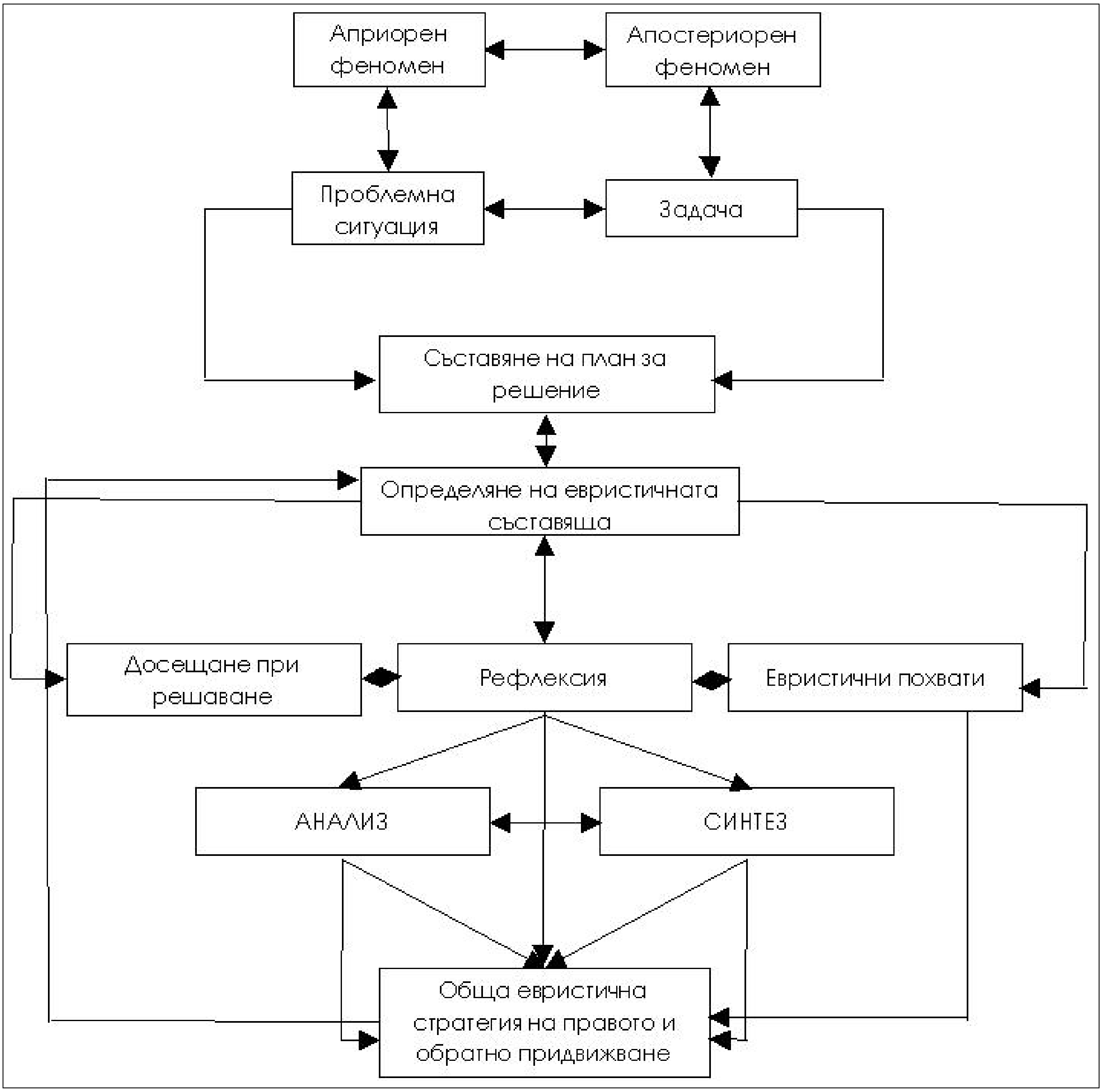
Във втора глава е разгледана и ролята на прогнозирането в дейността решаване на математически задачи, като е показано, че прогнозирането е в основата на установяването на правдоподобни твърдения и играе роля при решаване на задачи от алгоритмичен и евристичен тип, но има водеща роля при решаване на задачи от втория тип.

Въведено е и понятието „евристична съставяща“ на дейността решаване на математически задачи, като е дадена следната много важна

Дефиниция 3. *Евристичната съставяща е структурна единица във формирането на умения да се решават задачи, която изгражда правата и обратната връзка в отношението задача (проблемна ситуация)–досещане при решаване (инсайт). В правата връзка задача–досещане евристичната съставяща се реализира на операционално ниво като евристичен похват, напр. индукция, аналогия, обобщение и др., а в обратната връзка евристичната съставяща се реализира в дейностен план като рефлексия.*

Една обща схема за реализация на евристичната съставяща може да се види на Фиг. 2

Създаденият от нас тест с дидактически системи от задачи, се състои от



Фигура 2: Евристичната съставяща в общата схема на решаване на задача

четири основни дидактически серии – първата с четири подточки, а останалите с по три подточки. Всяко подусловие дава една или две точки в зависимост от своята сложност. Максималният брой точки е 25, като скалата за оценяване се дава с формулата $G = 2 + 0,16 \cdot N$, където N е общият брой на получените точки $(0 \leq N \leq 25)$.

Контролната група (КГ) при провеждането на нашия експеримент се състоеше от 27 ученика от XII кл. на МГ „Гео Милев“, гр. Ст. Загора и един осмокласник (който е вече десетокласник), състезател в математически олимпиади и първенец на България на математическото състезание „Кенгуру“ през 2006 г. от същото училище. Като цяло, резултатите, показани от КГ, са незадоволителни – от 700 възможни точки за всички тествани общо са получени само 230, като 13 човека получават оценка „Добър“ (46 % от всички тествани в КГ), 6 – оценка „Среден“ (22 % от всички тествани в КГ) и 9 – човека оценка „Слаб“ (32 % от всички тествани в КГ). Най-висока оценка (Добър (4,24)) получи осмокласникът Петър Тонев. Експерименталната група (ЕГ) се състоеше от 15 студенти трети курс, специалност „НУПЧЕ“ към Педагогически факултет при Тракийски университет, на които авторът на настоящето изследване е водил курсовете „История на математиката“ и „Развиващи функции на задачите по математика в средното училище“ съответно през зимните семестри на 2007/2008 и 2008/2009. Целите на тези два курса бяха насочени към запознаването на студентите с основни понятия в математиката както в контекста на историческото ѝ развитие, така и чрез съвременни методи за нейното изучаване, свързани с такива понятия като теория на множествата, математическа логика, числа и фигури. Цели на курсовете бяха също така развитието на основни структури на мисленето, свързани с категориите сензомоторика, дивергентно моделиране и оценка чрез решаване на серии от задачи, усвояването на знания за задачите, които да са мобилна основа за доживотно търсене и рефлексия върху търсенето. Примерите и задачите в курсовете бяха насочени към подобряване на изчислителната техника на студентите и умението за визуализация и моделиране на задачите, както и решаването и съставянето на задачи. За съжаление и студентите в ЕГ не се представиха особено убедително на теста като шестима от тях получиха оценка „Добър“ (40 % от всички тествани в ЕГ), четирима оценка „Среден“ (27 % от всички тествани в ЕГ) и петима оценка „Слаб“ (33 % от всички тествани в ЕГ). Прави впечатление почти еднаквите процентни отношения в двете групи. Липсата на оценки „Много добър“ и „Отличен“ се дължи, според нас, на несправянето на тестваните от двете групи с евристичните задачи, които, от своя страна, изискват по-нестандартно мислене, широк диапазон на представите и разсъжденията и разгърнато използване на евристични методи и похвати.

Всички тези резултати показват изключително ниската преносимост на уменията да се решават задачи в следните три тествани когнитивни равнища:

A. *Знания и умения на равнище алгоритмични задачи*;

B. *Знания и умения на равнище полуевристични задачи*;

C. *Знания и умения на равнище евристични задачи.*

В качестовото на критерии за оценка на учебните постижения са приети четири съдържателни критерия, а именно умения за справяне с:

1. *Аритметични задачи*;
2. *Задачи от теория на числата и алгебрични задачи*;
3. *Комбинаторни задачи*;
4. *Геометрични задачи.*

Таблица 1: Процент ученици, покрили критериите

Критерии	**Процент ученици**	
	КГ	**ЕГ**
Елементарна аритметика	50,75 %	49 %
Теория на числата и алгебра	41,67 %	37,67 %
Комбинаторика	41,67 %	30,67 %
Елементарна геометрия	35,67 %	34 %

Таблица 1 показва процента ученици, решили алгоритмичните задачи и част от полуевристичните. Сравнително ниските проценти на успеваемост се определят от затрудненията, които двете групи срещат при решаването на нестандартните евристични задачи (1d, 2c, 3c и 4c). От всички ученици само един е успял да се справи и то с известни пропуски със задача 2c, като е успял да формулира правилното предположение, че този случай е нерешим и частично да го докаже. Всички тези резултати (успеваемост, процентни съотношения и цялостна дескриптивна статистика) при анализа на дидактическия тест потвърждават нашата хипотеза, че развиващите функции на задачите (обобщени и специални) и евристичните похвати са трудно преносими и почти липсват между отделните групи задачи (алгоритмични, полуевристични и евристични). Потвърждава се необходимостта от разработване на специални методики за работа с ученици с изявени математически способности за различни състезания.

Резултатите от нашите анализи потвърждават също така и необходимостта да се работи целенасочено с различно подготвени по математика групи от ученици и студенти. Справянето с определени алгоритмични и полуевристични задачи не означава автоматически безпроблемно навлизане в структурите на по-сложните (евристични) задачи. Обяснението на този факт, според нас, се дължи на ниската преносимост на уменията да се решават математически задачи, което е обратно пропорционално на увеличаването на сложността на задачите. Оттук още по-ясно се вижда нуждата да се работи в посока на подготовка на бъдещи „олимпийци“ по математика. Като потвърждение на казаното по-горе се явява и фактът, че най-висок резултат (14 т.) на дидактическия тест постигна ученикът П. Тонев от осми клас на МГ „Г. Милев“, гр. Ст. Загора, с когото авторът на настоящия труд работи и подготвя индивидуално за различни математически състезания и към момента.

Трета глава е посветена на синергетичния подход в изучаване на евристичните похвати като е създаден модел за такъв синергетичен подход в дейността решаване на математически задачи.

Крайъгълният камък в разбирането на евристичните похвати си остава тяхната ниска преносимост, която се определя от следните няколко фактора:

- Липса на точна систематизация на евристичните и полуевристичните задачи и методиката за тяхното решаване чрез даден конкретен набор от евристики;

- Често пъти един и същ евристичен похват може да бъде използван по различен начин за различни задачи, което затруднява неговото усвояване и употреба;

- Основните функции в използването на евристичните похвати са съкращаващите. Прогностичните функции при евристичното търсене на решение имат пряка връзка с отношението на правдоподобност при решаване на задачи и формиране на хипотези. Всеки ученик, който разбере това и оцени неговата важност, ще има по-добра интуитивна представа за пътя на решението на всяка евристична задача;

- Рефлексивният аспект на процеса на решаване на математически задачи е доминантен по отношение на разбирането на решаващия за възникване на самото решение (инсайт, озарение и т. н.). Добрите решавачи на задачи не винаги са добри рефлексивни практици.

През последните десетилетия обучението като процес се разглежда като една нелинейна система от позициите на теорията на хаоса и синергетиката. Така например, анализът на различни изследвания, които е направил В. Милушев, му позволяват да разработи рефлексивно-синергетична схема в обучението чрез създаване на структурен модел на системата „обучаван-обучаващ“ в контекста на рефлексивно-синергетичния подход в съответната образователна среда [[14], стр.

48]. Според В. Милушев „синергетиката може да се разглежда като системна рефлексия, основаваща се на самоорганизацията“ [[14], стр. 47].

За да бъде една система хаотична, независимо от това дали тя е абстрактна математическа конструкция (някаква система от уравнения) или реално съществуващ обект (апарат във физиката или техниката, съобщества от различни биологични видове в екологията, химическа реакция и т. н.), необходимо (но не и достатъчно!) условие е тя да бъде нелинейна.

За да квалифицираме поведението на една нелинейна система като хаотично, трябва да са налице поне следните два признака:

1. Системата да е детерминирана, т. е. да съществува правило, което да определя бъдещето ѝ поведение при дадени начални данни;

2. Системата да показва силна чувствителност към началните условия (което я прави по принцип непредсказуема или с ограничен срок на предсказуемост).

Математически такива системи се описват от нелинейни диференциални уравнения (обикновени или частни) или диференчни (в крайни разлики) уравнения. Тогава първото изискване означава, че в тези уравнения няма коефициенти или свободни членове, както и гранични условия, които да са случайни величини. Ако въпреки това решението (изходният сигнал) има толкова сложен вид, че изглежда като случайна функция, казваме, че е налице *детерминиран хаос*.

Сега съвременната наука също разглежда ученето като детерминиран хаос. С. Гроздев отбелязва, че „съвременното схващане за ученето, както за обучението и образованието изобщо, е, че става дума за *детерминиран процес*, т. е. за процес с предистория и тази предистория оказва съществено влияние върху самия процес“ [[6], стр. 11]. Процесът на решаване на математически задачи е също детерминиран процес, тъй като и той има своя предистория, която му влияе.

В [[7], Гл. II. т.3] и [[27], 2.3] детайлно е анализиран синергетичния аспект на процеса на ученето. В тези изследвания са дефинирани нови функции $k(t)$ – ниво на подготвеност (опит) [6] и ниво на възможностите [7], [27]. Открити са забележителни сходства между теоретично изведената формула за нивото на възможностите

$$k(t) = -\frac{P}{\alpha} + \left(k_1 + \frac{P}{\alpha}\right)\exp(t - t_1), \tag{1}$$

където $F(k) = \alpha k$ отчита активната роля на ученика в процеса на учене, $F(t_1) = k_1$ и $F = F(t, k)$, а $\alpha < 0$ е показател за скоростта на възприемане (забравяне). $P = P(t)$ е самата подготовка на ученика. Веднага се вижда колко формула (1) прилича на известната формула на Ебингхаус за обема на запомнения материал:

$$x(t) \approx C_1 - C_2 \exp(\alpha t), \ \ C_1, C_2 \text{ са константи.} \tag{2}$$

Да разгледаме сега дефинираната от С. Гроздев функция $P = P(t)$, която описва нивото на подготовка за ученика. Той отбелязва, че „в частност $P(t)$ може да означава и *самоподготовка*, включваща самостоятелно учене, четене на книга, работа в библиотека и т. н.“ [[7], стр. 112]. Последното, според нас, е много важно, тъй като има пряко отношение към процеса на учене в синергетичен аспект – процеса на учене като самоорганизация. Най-общо процесът на самоорганизация се характеризира с появата на устойчиви наредени структури с произволна природа. Необходимо е да отбележим две много важни свойства на високоефективните синергетични системи:

1. Непрекъснат обмен с външната среда на енергия, вещество или информация;

2. Задължително *взаимосъдействие* между компонентите на системата.

В тази връзка можем да обобщим, че ученето като синергетична система се състои в повишаването и подобряването на интелектуалното развитие на обучаемите в условията на утвърдени учебни методики за обучение и самообучение, чрез които се извършва непрекъснат обмен на информация. Основната цел на ученето като такава система тогава се явява преобразуването на начините, методите и средствата за обучение и възпитание в знания и умения, които имат пряко отношение към самото качество на живот. В този смисъл на ученето като процес е присъщо първото от свойствата на синергетичните системи. Второто свойство (взаимосъдействието) е заложено в самата същност на ученето, където всеки обучаван субект (предполагаме, че самият субект има реална психологическа и социалноадаптивна нагласа за учене) се стреми да постигне максимален ефект от обучението в условията на колективно взаимодействие и конкуренция, като това се проявява в борбата за по-висока оценка, по-добри резултати на изпити, конкурси, олимпиади; в стремеж за изява, развитие, творчество и т. н.

Първото фундаментално понятие на синергетиката се явява *самоорганизацията*. По какво се отличава „самоорганизацията“ от „организацията“?

Да допуснем, че ученици се намират в час по математика, например. Тогава за организация можем да говорим, ако всеки ученик следва точно някакви методични указания, поставени от учителя на урока. В този случай под „организация“ трябва да разбираме обстоятелството, че поведението на учениците се контролира по такъв начин от учителя, че да се разбере някакъв математически метод, да се реши конкретна задача или да се осмисли дадено математическо понятие.

Описаният по-горе процес можем да наречем „самоорганизация“, ако външно направляващо въздействие отсъства и учениците изучават дадения учебен материал например в групи, в СИП или чрез самоподготовка. Аналогично коопериране се наблюдава и в работата на всеки оркестър, например. *Организацията* на работа на оркестъра се състои в това, че той изпълнява музикални произведения, точно следвайки указанията на диригента; но може и да съществува ситуация, в която оркестърът вдъхновено свири без диригента – това е пример за самоорганизация.

Да разгледаме отново функцията $P = P(t)$, дефинирана по-горе и имаща пряко отношение към самоорганизацията, тъй като видяхме, че тя би могла да се разглежда като функция, която отразява нивото на получените знания чрез самоподготовка или друг самоорганизиращ се процес. Ще се опитаме да моделираме този процес математически с известни условности.

Нека $P(t_1)$ изразява нивото на подготвеност на ученика в момента t_1. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че в периода $[t_1, t_2]$ ученикът забравя част от нещата, които е учил, т. е. имаме интеграла:

$$\alpha \int_{t_1}^{t_2} P(s)ds, \ \ \alpha < 0,$$

където α е коефициентът на забравяне, дефиниран по-горе. Тогава, ако направим разумното предположение, че ученикът натрупва знания в едни периоди от време, а в други – не, то използвайки дискретни функции, можем да дефинираме

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако ученикът учи в момента } t \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Тогава времето, посветено на учене за целия интервал $[t_1, t_2]$ ще бъде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds.$$

Количеството натрупани знания и опит в периода $[t_1, t_2]$ ще се определя така:

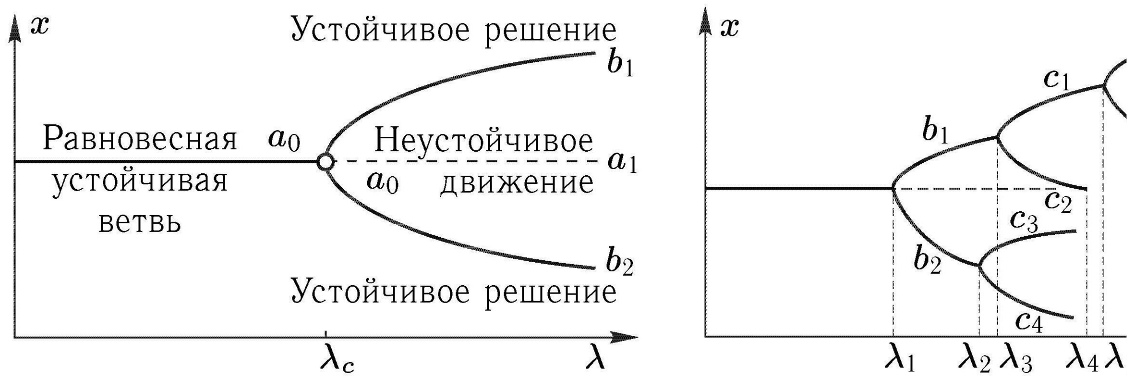
$$P(t_2) = P(t_1) + \alpha \int_{t_1}^{t_2} P(s)ds + \beta \int_{t_1}^{t_2} \delta(s)ds,$$

където $\beta > 0$ е коефициент на възприемане. Тогава след граничен преход и отчитайки факта, че функцията $\delta(t)$ действа върху $P(t)$ с положителен знак само когато ученикът учи, то можем условно да редуцираме горното интегрално уравнение до задача на Коши с линейно диференциално уравнение, разглеждано и от Хакен:

$$P'(t) = \alpha P(t) + \beta,\ P(t_1) = P_1 > 0,$$

откъдето $P(t) = -\dfrac{\beta}{\alpha} + \left(P_1 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \exp \alpha(t - t_1)$. Както се вижда, тази формула има същия вид както (1) и (2), което ни убеждава в близката корелация на тези три функции.

Следващото важно понятие на синергетиката се явява *бифуркацията* или раздвоението, което означава разделянето на някакво решение $x(\lambda)$ на няколко клона при изменение на някой параметър на системата. На фигурата по-долу изображението вляво е бифуркация от тип „вилица“.



При прехода на параметъра λ през някакво значение λ_c, т. е. в момента $\lambda = \lambda_c$, числото на разклоненията скокообразно нараства от едно (a_0) до три – две устойчиви разклонения b_1 и b_2 и едно неустойчиво a_1. Кое от устойчивите разклонения b_1 или b_2 след точката на бифуркация $(\lambda = \lambda_c)$ ще „избере“ системата, решават *флуктуациите*, т. е. малките случайни вътрешни или външни смущения. В резултат на действието даже на малки флуктуации, системата неизбежно попада в b_1 или b_2, а точно на кое от двете конкретно – това никой предварително не може да каже. Системата сама „избира“ своето бъдещо състояние и точно в това се проявява нейната „самоорганизация“.

В общия случай системата преминава през последователност (каскади) от бифуркации, които могат да се видят на графиката вдясно по-горе. Ако бифуркациите нарастват, то в системата се появява състояние, което прилича на *хаос*. При бифуркациите системата сама определя своите следващи състояния – клон на равновесие ($b_1 \longrightarrow c_1 \longrightarrow d_1$) или стагнация в процеса на учене ($b_2 \longrightarrow c_4$) и т. н. Всичко това ни разкрива многопосочността на пътищата на развитие на сложните системи на учене.

Бифуркационната диаграма вдясно на фигурата по-горе ни показва как следва да се управляват процесите в сложни системи. За тази цел е необходимо да се измени параметърът λ, който поради тази причина се нарича и *управляващ параметър*. Както се вижда още от фигурата, поведението на сложна система се състои от устойчиви и неустойчиви режими. Преходът от един режим в друг се осъществява в точките на бифуркация $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Управлението на поведението на такива системи може да се сравни с карането на колело. Тези системи са статически неустойчиви (стоящият велосипед пада), но движението им може да се управлява – движещият се велосипед е устойчив. Устойчивите и неустойчивите състояния са обяснени подробно в [[7], стр. 118].

Като пример за бифуркация в ученето може да се посочи преминаването от една форма на учене към друга. Изменението на някакъв параметър λ в системата, например посещаването на допълнителни семинарни занятия или СИП, може да доведе до ново състояние на нивото на подготвеност на ученика и да повлияе върху неговите възможности, т. е. имаме качествено нова форма на обучение. Колебанието между тези две състояния на обучение в редовна и факултативна форма може да се обясни чрез синергетични методи. Примери за бифуркации могат да се посочат и в други науки, например в икономиката това може да бъде преминаването от пълна заетост към непълна или пък еволюцията на обществото от аграрно към индустриално и т. н.

Важно свойство на ученето като система се явява неговата *нелинейност*. В тази връзка С. Гроздев пише, че „процесът на учене и подготовка не може да се отъждестви с *пълнене на съд*, откъдето заключавам, че принципът на суперпозиция е неприложим, т. е. не всичко, което се учи, се научава. Следователно **процесът на учене е нелинеен**.“ [[7], стр. 113]. Най-общо нелинейността на една система се състои в това, че нейната реакция на едно или друго изменение на външната или вътрешната среда, не е пропорционална на това изменение. Да разгледаме отново функцията $P(t)$, която отразява нивото на подготовка (натрупани знания), която зависи от времето и нека $P(t_0) = P_0$ дава знанията по математика на ученик за $t = t_0$, и нека P^* отразява средната подготвеност спрямо дадени фиксирани стандарти. В зависимост от P_0 функцията $P(t)$ може да се изменя по най-различен начин. Например, ако $P_0 = P^*$, то естествено $\Delta P(t) = P_0 - P^* = 0$, а при $P_0 < P^*$, натрупването на знания и опит се влошава. В случая, когато

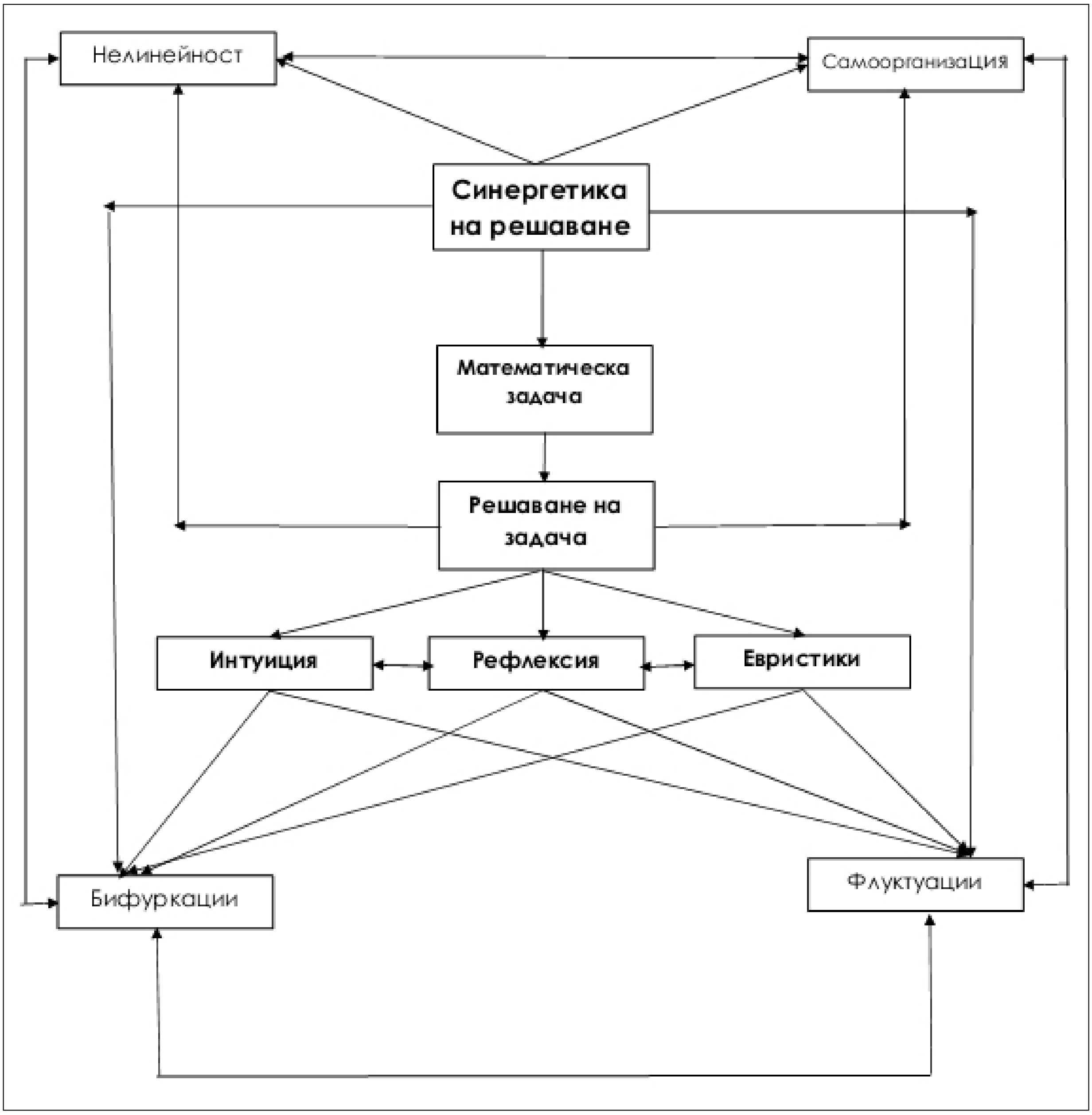
$P_0 > P^*$, т. е. когато подготовката на даден ученик и неговите знания надхвърлят средните, характерът на изменение на самото учене принципно се изменя, като при това в зависимост от конкретните стойности на P_0, подготовката се повишава значително и може да покаже качествено развитие (напр., ученикът успешно преодолява предварителните кръгове и се класира за националния математически отбор и т. н.). Оттук следва и качествения смисъл на нелинейността – множеството от пътища за развитие на ученето и процеса на решаване на задачи като системи. В една нелинейна система могат да възникнат само онези структури, които отговарят на вътрешните тенденции на развитие на процесите в дадената система за конкретния период от време. Това на свой ред означава, че е възможно обединение не на произволни структури и не на произволни етапи от развитието им.

Един от най-ярките примери, който подчертава универсалността в закономерностите на развитието на ученето като нелинейна система, се явява възходящото развитие на възможностите изобщо (функциите $P(t), k(t)$ и $x(t)$ монотонно нарастват) в резултат на обучението или обединение на две или повече форми на обучение. Такова явление е прието да се нарича **синергетика**. Конкретно в нашия случай това означава, че учителите (и не само те) трябва да търсят точно тези методи и средства за работа с конкретни групи ученици, така че като цяло да постигнат кооперативен обучителен ефект. Според нас изучаването на евристичните похвати в училище би постигнало този ефект за много широк кръг от обучавани.

Синергетиката на процеса на решаване на математически задачи можем отново да опишем с *функция на решаване* $y = x(\lambda)$, където независимата променлива λ е управляващ параметър за използването на различни похвати – евристични или алгоритмични (виж Фиг. по-горе). Ако за две различни стойности на λ, напр. $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ (т.е при използването на два евристични похвата), флуктуациите около тези две точки водят до едно и също устойчиво разклонение, то двете решения $y_1 = x(\lambda_1)$ и $y_2 = x(\lambda_2)$ ще наричаме *синергетически изоморфни*, в противен случай ще ги наричаме *синергетически неизоморфни*.

Всяко стандартно (алгоритмично) решение λ_c на конкретна задача дефинира достигане на устойчиво състояние на системата $x(\lambda)$ (виж състоянието a_0 на фиг. по-горе). Използването на евристични похвати обаче не дефинира отнапред устойчиво състояние на системата, т. е. решаване на задачата.

Множеството от всички синергетически неизоморфни решения $\mathcal{S}$ на дадена задача (система) ще наричаме *синергетичен спектър* за тази задача (система).



Фигура 3: Синергетика на процеса на решаване на задачи

Отговорът на въпроса за вида на това множество не е лесен, тъй като откриването на всички синергетически неизоморфни решения зависи както от уменията на решаващия да използва различни евристични похвати, така и от пълнотата на обема от знания, които той притежава и съответната психична нагласа, която той има. Спектърът от решения на различните задачи зависи още и от техния вид – алгоритмични, полуевристични или евристични. За всяка неразрешена математическа задача имаме празен спектър от решения, докато за всички останали видове задачи $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Спектърът от решения за всяка задача е относителна величина, която зависи най-вече от уменията на субекта да решава математически задачи и той е толкова по-голям, колкото по-развити са неговите способности и умения да прилага различни похвати (евристични или алгоритмични) в процеса на решаване на математически задачи.

Със следващите задачи може да се видят примери за достигане на устойчиви разклонения на системата $x(\lambda)$, а така също получаване на синергетически неизоморфни решения и примери за задачи със спектър, който съдържа повече от едно решение, за задачи със спектър само от едно решение и за задачи с празен синергетичен спектър.

Задача 3. *Ако $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, да се докаже, че $|ac - bd| \leq 1$.*

Първо решение ($\mathbf{s_1}$): Това е стандартното алгоритмично решение на задачата и най-вероятният подход към нея. То се състои в директно доказване на модулното неравенство чрез повдигане двете страни на квадрат. Имаме, че

$$|ac-bd| \leq 1 \Longleftrightarrow (ac-bd)^2 \leq 1 \Longleftrightarrow a^2c^2-2acbd+b^2d^2 \leq a^2+b^2 \Longleftrightarrow 0 \leq (ad+bc)^2,$$

което е очевидно вярно и с това задачата е решена. □

Второ решение ($\mathbf{s_2}$): Това решение се базира на очевидните неравенства $(a + c)^2 + (b - d)^2 \geq 0$ и $(a - c)^2 + (b + d)^2 \geq 0$. Имаме, че $|ac - bd| \leq 1$ точно тогава, когато $-1 \leq ac - bd \leq 1$. Тогава

$$(a+c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2 + 2(ac - bd) \geq 0,$$

откъдето следва $2 \geq -2(ac - bd)$ или $-1 \leq ac - bd$. С това е доказано лявото неравенство. Дясното неравенство се доказва напълно аналогично, като се използва второто от неравенствата по-горе. С това задачата е решена. □

Трето решение ($\mathbf{s_3}$): Евристичният похват, който използваме в това решение, е въвеждане на ъгли и използване на тригонометрични равенства. Понеже $a^2+b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$, то съществуват α и β, такива че

$$a = \sin\alpha, \quad b = \cos\alpha, \quad c = \sin\beta, \quad d = \cos\beta.$$

Тогава $ac-bd = \sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta = -\cos(\alpha+\beta)$ и следователно $|ac-bd| \leq 1$. С това задачата е решена. □

Четвърто решение ($\mathbf{s_4}$): Да си разгледаме два вектора $\vec{m}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{n}(x_2, y_2, z_2)$. Очевидно за скаларното им произведение е в сила неравенството $|\vec{m}.\vec{n}| \leq |\vec{m}|.|\vec{n}|$ или в координатна форма

$$|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_1| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},$$

което е точно неравенството на Коши-Буняковски-Шварц. Именно това неравенство представлява ключът към решението. Да отбележим, че равенство се достига, когато векорите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ са колинеарни.

Да въведем векторите $\vec{m}(a, b)$ и $\vec{n}(c, -d)$. С оглед на условието получаваме $|\vec{m}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ и $|\vec{n}| = \sqrt{c^2 + d^2} = 1$. Освен това $\vec{m}.\vec{n} = ac - bd$. Следователно $|ac - bd| = |\vec{m}.\vec{n}| \leq |\vec{m}|.|\vec{n}| = 1$. □

Пето решение ($\mathbf{s_5}$): В това решение ще използваме известното тъждество на Диофант $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$, за произволни реални числа a, b, c и d. Оттук получаваме, че $(ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = 1$, откъдето следва и търсеното неравенство. □

Шесто решение ($\mathbf{s_6}$): Да разгледаме специалната линейна група от втори ред $SL(2, \mathbb{R})$ от квадратни реални матрици с детерминанта единица. Както е известно от теорията, тази група е нормална подгрупа на общата линейна група, която се състои от всички неособени квадратни матрици и се реализира като ядро на естествения хомоморфизъм между общата линейната група и мултипликативната група на реалните числа, който на всяка неособена квадратна матрица съпоставя нейната детерминанта.

Да разгледаме матриците $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ и $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. Тогава и $AB = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, тъй като $\det A. \det B = \det A.B = 1$. Но $\det A.B = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 1$, откъдето и следва търсеното неравенство. □

За нас спектърът от решения на задача 3 съдържа шест решения, като последните две са изоморфни, т. е. $\mathcal{S} = \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3}, \mathbf{s_4}, \mathbf{s_5}, \mathbf{s_6}\}$ и $\mathbf{s_5} \cong \mathbf{s_6}$.

Решенията $\mathbf{s_1}$ и $\mathbf{s_2}$ са повече или по-малко алгоритмично базирани и това ги прави по-достъпни за използване, а и ги отличава като решения с по-малка сложност.

Задача 4. *В произволен триъгълник със страни* a, b *и* c *и медиани към тях съответно* m_a, m_b *и* m_c *е в сила следното неравенство*

$$am_a + bm_b + cm_c \leq \sqrt{bc}m_a + \sqrt{ac}m_b + \sqrt{ab}m_c. \tag{3}$$

Задачата не е лесна и директен подход при решаването ѝ не води до успех. Трябва да отбележим, че доскоро не се знаеше дали това твърдение е изобщо вярно. Оказа се, че е така, още повече че различни *random* проверки на стойности за a, b и c, които бяха направени на големи изчислителни машини и на PC не доведоха до никакъв контрапример. Доказателството беше намерено, като първо беше доказано, че аналогичното твърдение за височините е вярно, т. е.

$$ah_a + bh_b + ch_c \leq \sqrt{bc}h_a + \sqrt{ac}h_b + \sqrt{ab}h_c. \tag{4}$$

Неравенство (4) се доказва непосредствено. Наистина, за да докажем (4), ще използваме очевидните равенства $ah_a = bh_b = ch_c = 2S_{\triangle ABC}$. Тогава

$$ah_a + bh_b + ch_c - \sqrt{bc}h_a - \sqrt{ac}h_b - \sqrt{ab}h_c = 6S - \frac{2S\sqrt{bc}}{a} - \frac{2S\sqrt{ac}}{b} - \frac{2S\sqrt{ab}}{c} =$$

$$2S\left(3 - \frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{\sqrt{ac}}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{c}\right).$$

Следователно,

$$ah_a + bh_b + ch_c \leq \sqrt{bc}h_a + \sqrt{ac}h_b + \sqrt{ab}h_c \iff \left(3 - \frac{\sqrt{bc}}{a} - \frac{\sqrt{ac}}{b} - \frac{\sqrt{ab}}{c}\right) \leq 0$$

$$\iff 3abc \leq (bc)^{\frac{3}{2}} + (ac)^{\frac{3}{2}} + (ab)^{\frac{3}{2}},\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Чрез субституциите $x = \sqrt{bc}$, $y = \sqrt{ac}$, $z = \sqrt{ab}$ получаваме, че

$$3abc \leq (bc)^{\frac{3}{2}} + (ac)^{\frac{3}{2}} + (ab)^{\frac{3}{2}} \iff 3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Последното неравенство е класическо и с това доказателството на (4) е завършено.

Доказателството по-нататък се базира върху теорията на функциите на една и две независими променливи, което считаме като известен недостатък като се има предвид, че формулираният проблем е от областта на елементарната математика. Задачата се свежда до разглеждането на следната функция на две променливи:

$$F(x,y) := (1-\sqrt{x}\sqrt{y})\sqrt{2x^2+2y^2-1}+(x-\sqrt{y})\sqrt{2+2y^2-x^2}+(y-\sqrt{x})\sqrt{2+2x^2-y^2}, \tag{5}$$

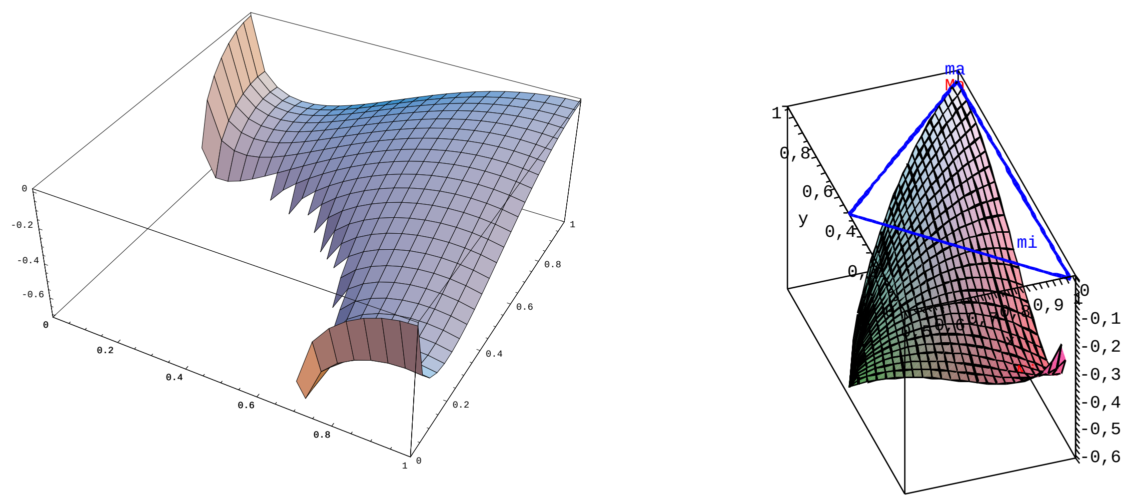
където $\dfrac{b}{a}=x, \dfrac{c}{a}=y.$

В тези означения доказателството на неравенство (3) се свежда до екстремалната задача:

$$\max_{(x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2} F(x,y), \text{където}$$
$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 0\le y\le x\le 1,\ x+y\ge 1\}, \tag{6}$$

където областта по-горе геометрически представлява правоъгълен триъгълник, а последното неравенство следва от факта, че $b+c>a$, което е вярно за всеки триъгълник. (Виж Фиг (b) по-долу)

Непосредствено се проверява, че $F(x,y)$ е добре дефинирана в Ω.



(а) Повърхнината $F(x,y)$

(б) Областта Ω върху повърхнината $F(x,y)$

Следователно, за да докажем (3), ние трябва да покажем, че $\max\limits_{(x,y)\in\Omega} F(x,y)=0.$

Непосредствена проверка по контура $\partial\Omega$, състоящ се от $\{x = y\}$, $\{x = 1\}$ и $x + y = 1$ ни убеждава, че т. $M_2(1, 1)$ е точка на абсолютен максимум за разглежданата област. Тогава за функцията $F(x, y)$ имаме, че

$$\sup_{(x,y)\in\Omega} F(x, y) = \max_{(x,y)\in\Omega} F(x, y) = F(1, 1) = 0.$$

Допълнително в точката M_1, където функцията $F(x, y)$ има локален минимум, получаваме:

$$F(x, y)_{|M_1} = F(0,9238127491\ldots, 0,1660179102\ldots) = -0,4280657968\ldots$$

Непосредствено може да се получи следното

Следствие 1. *Ако a, b и c са страни на триъгълник и m_a, m_b и m_c са съответно медианите към тях, то са в сила следните неравенства :*

а) $(2p - 3a)m_a + (2p - 3b)m_b + (2p - 3c)m_c \geq 0$, *където* $p := \dfrac{a + b + c}{2}$;

б) $\dfrac{m_a}{m_c} \leq \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}}{a + b + c} \leq 1$, $a \geq b \geq c$.

Естественият въпрос, който би могъл да възникне на този етап, е дали не могат да бъдат изведени други следствия или направени допълнителни изводи по аналогия. Отговорът е „да“. Наистина, резултатите, които изведохме по-горе засягаха медианите и височините в произволен триъгълник и тогава въпросът, който тук изниква от само себе си е: „Вярно ли е неравенството и за ъглополовящите в триъгълник?“. Макар и това да не е още доказано, то отговорът според нас е „да, вярно е“. Основания за това ни дават някои факти и разсъждения, базирани върху аналогията, които правят това предположение малко по-правдоподобно.

За целта ще използваме следното известно в геометрията твърдение [[7], стр. 184]:

Твърдение 1. *Всяка ъглополовяща в произволен триъгълник е разположена между височината и медианата от същия връх в този триъгълник.*

Знаейки този факт, неравенството за ъглополовящите изглежда повече правдоподобно, тъй като на базата на втория принцип от индуктивната схема на Пойа, знанието за верността на неравенството в „граничните“ случаи, а именно – при медиана и височина, ни дава основание да издигнем и следното

Предположение 1. *В произволен триъгълник със страни* a, b *и* c *и ъглополовящи към тях съответно* l_a, l_b *и* l_c *е в сила следното неравенство:*

$$al_a + bl_b + cl_c \leq \sqrt{bc}l_a + \sqrt{ac}l_b + \sqrt{ab}l_c.$$

За да се превърне в математически факт обаче (или опровергае), горната хипотеза трябва да бъде разгледана вече чисто дедуктивно.

Синергетичният спектър на Задача 4 се състои от едно решение, което разчита обаче изключително на система за компютърна алгебра каквато е *Maple*. Що се отнася до синергетичния спектър на горното твърдение, то той е празен, тъй като досега то не е проверявано.

Основният извод, който можем да направим в тази глава, е, че *развитието на евристичното мислене се явява важна част от синергетиката на процеса на решаване на математически задачи. Реализирането на рефлексивно-синергетичен подход изисква наличие на* [[14], стр. 47] :

- *вътрешни и външни въздействия;*
- *вътрешни и външни колебания (флуктуации);*
- *плато (зона на насищане) – място на критични, бифуркационни точки;*
- *атракторен спектър от различни състояния на изследваната система;*
- *преход от вида „хаос-ред“;*
- *качествени промени, свързани с рефлексивни изменения на системата, в резултат на което се достига до нова структура и приближаване все повече към идеалната цел.*

Апробация

Основните резултати от дисертационния труд са апробирани в съвместната работа с двама изявени ученици от гр. Стара Загора, както и в упражненията, които авторът е водил със студенти третокурсници в Педагогическия факултет на Тракийски университет, гр. Стара Загора.

По различни теми от дисертацията са изнесени доклади на международни и национални конференции и форуми, както и са публикувани статии по тази тематика в наши и чуждестранни реферирани издания.

Накрая може би трябва да отбележим, че авторът на дисертационния труд работи конкретно с двама младежи с изявени математически способности от гр. Стара Загора – Петър Тонев и Живко Йотов. Работата с тях е насочена най-вече към формирането на умения да се използват различни евристични похвати. За целта се решават разнообразни олимпиадни задачи, дискутират се решения и се търсят нови такива на вече решени задачи. Освен това им се изнасят лекции на различна математическа тематика и им се предоставят различни учебни четива. С един от младежите, ученика от X клас на ПМГ „Гео Милев“, гр. Ст. Загора Петър Тонев, авторът работи повече от 3 години и добрите резултати дойдоха в края на миналата година, когато през месец октомври в Сливен Петър спечели Турнира на четирите града в своята възрастова група, а в самия край на годината – в началото на декември – спечели и сребърен медал на Националния турнир „Иван Салабашев“, а ученикът Живко Йотов спечели бронзов медал на същия турнир.

Основни публикации на автора по темата на дисертацията

[1.] Желев, Ж. *Изграждане на thin-клиент архитектура чрез LTSP*, 5^{th} Annual Conference for FOSS and free knowledge share, $27-28^{th}$ October, 2007, Sofia, Bulgaria.

[2.] Желев, Ж. *Linux и свободният софтуер в обучението по математика*, Сборник доклади от Конференцията по случай 75 годишнината на проф. дмн. Гр. Станилов "Компютрите и компютърните методи в образованието 12-14 септември, 2008, Варна.

[3.] Zhelev, Zh. *Maple in solving some geometric mean triangle inequalities*, 8^{th} International Conference on Geometry and Applications, September 03-08, 2007, Varna, Bulgaria.

[4.] Zhelev, Zh. *One group of inequalities with altitudes and medians in triangle*, p. 7, 2008, *J. of Geometry* arXiv:mathMG 0811.2656v1, (to appear).

[5.] Желев, Ж., Савова, С., *Изграждане на thin-client архитектура чрез LTSP и приложения в обучението*, Международна научна конференция УНИТЕХ, 18-19 ноември 2011, Габрово, Vol. III, стр. 362-366.

Заключение

Формирането на умения да се използват евристични похвати е важна съставна част от уменията да се решават математически задачи. Култивирането на такива умения обаче става трудно, тъй като те са ниско преносими, слабо вербализуеми и зависят изключително силно от изграждането на добра рефлексивна практика в процеса на решаване на математически задачи. Добрите решавачи на задачи не винаги осъзнават ясно своята рефлексия при решаване, докато всички, които вникват в подсъзнателния аспект на процеса на решаване на задачи почти винаги са и способни решавачи.

Използването на евристични похвати разчита на формирането на солидни формалнологически ядра още в ранна възраст у учениците и на стимулирането на техните интелектуални способности. Липсата на ясна систематизация на евристичните похвати и трудностите в използването на съкращаващите им функции при формирането на правдоподобни хипотези, ги прави несигурни като методика за решаване на задачи.

Дейността решаване на задачи като синергетична система се характеризира с нелинейност и неустойчивост. Това е система, чиято организация и самоорганизация зависят от използването на евристични похвати, които се явяват флуктуационни точки, в които тази система може да достигне устойчиво състояние (решение на задачата). Овладяването на различни евристични похвати в дейностен план като операционални структури и в рефлексивен чрез анализ на собствени евристични решения определя и „евристичната съставяща“ на целия процес на решаване на математически задачи.

Научните приноси на дисертационния труд се състоят в

– съставянето и решаването на различни дидактически системи от задачи (алгоритмични, полуевристични и евристични) за формиране на умения за използване на евристики, някои от които сами по себе си представляват научен проблем или са математическа хипотеза;

– феноменологичното изследване на математическата задача от гледна точка на алгоритмичния и евристичен подход;

– дефиниране и приложение на понятието „евристичната съставяща“ като част от процеса на формирането на умения за използване на евристики;

– Разработване на синергетичен модел на евристичната дейност при решаване на математически задачи.

Практическите приноси се състоят в

- анализ на възможностите на някои конкретни евристики (напр. компютърни) при формирането на умения за решаване на математически задачи;
- имплементирането на конкретна операционна система с отворен код (Linux), а така също и на някои софтуерни и хардуерни решения (thin-client архитектура) за формиране на умения за използване на евристики.

Препоръки и предложения за бъдеща работа

По-нататъшните усилия за развиване на основните цели на дисертационния труд могат да продължат в следните посоки:

- Създаване, разработване и прилагане на нови дидактически серии от задачи за формиране на умения да се използват евристични похвати;
- Приложение на нови хардуерни и софтуерни решения като методика (визуализация, изчисляване и програмиране) на компютърни евристики в дейността решаване на задачи;
- Стимулиране на усвояването на нови и различни евристични похвати не само на операционално ниво, но и на цялостната им рефлексия;
- Задълбочаване на рефлексивно-синергетичния подход при изучаването на процеса на решаване на задачи – развиване на понятия като „евристична съставяща“, „синергетически спектър“, „синергетически изоморфни и неизоморфни решения“ и др.;
- Създаване на възможности и нагласи обучението в евристични похвати да стане водещо и в образованието по математика за масовия ученик.

Благодарности

Авторът изказва своите благодарности към научните си ръководители и отбелязва специалната подкрепа на проф. дпн Сава Гроздев и неоценимата му помощ при написването на този труд, а така също и подкрепата и ценните съвети на колегите от Катедра „Информатика и математика“ към Стопански факултет на Тракийски университет, гр. Стара Загора.

Библиография

[1] Ганчев, Ив. *За математическите задачи.* София, 1971.

[2] Ганчев, И., Колягин, Ю., Кученов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю. *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас.* „Модул“, София, Т. I, 1996.

[3] Ганчев, И. *Основни учебни дейности в урока по математика.* София, 1999.

[4] Гроздев, С., Дойчев, Св. Математическите игри като средство за откриване на математически таланти. *Математика и математическо образование*, стр. 237–244, ISSN 1313-3330, 2009.

[5] Гроздев, С. Олимпиади и синергетика. *Математика и математическо образование*, стр. 101–115, ISSN 1313-3330, 2003.

[6] Гроздев,С. Синергетика на ученето. *Педагогика*, **7**:3–23, 2002.

[7] Гроздев, С. *Теория и практика на подготовката на изявени ученици за участие в олимпиади по математика.* Дисертационен труд, ИМИ-БАН, София, 2002.

[8] Желев, Ж. Математическата задача и нейната евристична съставяща в схемите на правдоподобните разсъждения. *Годишник на Пед. ф-т, ТрУ*, **9**:5–16, 2009.

[9] Иванов, Г., Петров, П., Делчева, Т., Каснакова, Ц. *Целеполагането в педагогическата и изследователската дейност на учителя.* ИК „КОТА“, Ст. Загора, 2003.

[10] Крупич, В. И. *Структура и логика процесса обучения математике в школе.* Из-во МГПИ, Москва, 1985.

[11] Крупич, В. И. *Теоретические основы обучения решению школьных математических задач.* „Прометей“, Москва, 1995.

[12] Милушев, В. *Триадата дейности решаване, съставяне и преобразуване на математически задачи в контекста на рефлексивно-синергетичния подход.* Автореферат на дисертация за получаване на научната степен „доктор на педагогическите науки“ по научната специалност 05.07.03 (Методика на обучението по математика) , София, 2008.

[13] Милушев, В., Френкев, Д. За един рефлексивен модел на обучение и негово приложение. *Математика и математическо образование*, стр. 385–390, ISSN 1313-3330, 2008.

[14] Милушев, В. Рефлексивно-синергетичен подход в обучението. *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски"*, **45**:45–53, 2008.

[15] Милушев, В., Френкев, Д. Евристичен подход при решаване на геометрични задачи от определен вид. *Математика и математическо образование, изд. на БАН*, 418–423, 2006.

[16] Милушева-Бойкина, Д. Върху понятието „задача" в научната литература . *Научни трудове на ПУ „П. Хилендарски"*, **34**:51–62, 1997.

[17] Петров, П. *Евристична схема за откриване на решения на планиметрични задачи.* ИПКУ, Ст. Загора, 1993.

[18] Петров, П. Ролята на творческите задачи по математика за развитие на личността на ученика. *IV Балкански конгрес по педагогика, Ст. Загора*, **2**:262–267, 2007.

[19] Петров, П. *Умението да се решават задачи от училищния курс по математика – основен проблем в методиката на обучението по математика.* Хабилитационен труд, Ст. Загора, 2011.

[20] Петров, П. *Формиране на умения за решаване на задачи от училищния курс по математика – теоретико приложни аспекти.* ИК „КОТА", Ст. Загора, 2003.

[21] Пойа, Д. *Как се решава задача.* ДИ „Народна просвета", София, 1972.

[22] Пойа, Д. *Математиката и правдоподобните разсъждения – индукция и аналогия в математиката.* ДИ „Народна просвета", София, Т. I, 1970.

[23] Пойа, Д. *Математиката и правдоподобните разсъждения – схеми на правдоподобни заключения.* ДИ „Народна просвета", София, Т. II, 1976.

[24] Пойа, Д. *Математическото откритие. За разбирането, изучаването и обучаването в решаване на задачи.* ДИ „Народна просвета", София, 1968.

[25] Скафа, Е. , Милушев, В. *Конструиране на учебно-познавателна евристична дейност по решаване на математически задачи.* УИ „Паисий Хилендарски", Пловдив, 2009.

[26] Тонов, И.,Тонова, Т. Компютърна евристика – една възможност за приложение на ИКТ в образованието. *Конференция по случай 75 години от рождението на проф. дмн Гр. Станилов*, 12-14 септ., Варна, 2008.

[27] Grozdev, S. *For High Achievments in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia, 2007.

[28] Milloushev, V., Frenkev, D, Millousheva-Boikina, D. Model for Teaching in Rediscovery of Particular Methods for Mathematical Problem Solving. *Proceedings of the 3rd Congress of Mathematicians of Macedonia*, 123–130, Struga, 29.09-02.10.2005.