АЛГЕБРИ С ПОЛИНОМНИ ТЪЖДЕСТВА И БЪЛГАРСКИЯТ ПРИНОС КЪМ ТЯХ

ВЕСЕЛИН ДРЕНСКИ

Въведение

В множеството $\mathbb{Z}$ на целите числа има две операции – събиране и умножение, които удовлетворяват обичайните комутативни, асоциативни и дистрибутивни закони, а събирането има обратна операция – изваждането. Множество R с подобни свойства се нарича *комутативен пръстен*. Ако K е комутативен пръстен с единица, а ненулевите елементи имат обратни относно умножението, K се нарича *поле*. Типични примери на полета са множествата на рационалните, реалните и комплексните числа, означавани съответно с $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и множеството $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ от класовете остатъци по прост модул p. Ако в пръстена R е дефинирано умножение с елементите на полето K, което превръща R в линейно пространство над K и $\alpha \cdot (a \cdot b) = (\alpha \cdot a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot b)$ за всеки $\alpha \in K$ и $a, b \in R$, то R се нарича K-*алгебра*. Примери на алгебри са множествата $K[x_1, \ldots, x_n]$ на полиномите на n променливи с коефициенти от полето K, всяко поле L, което е разширение на полето K (т.е. L съдържа K) и др. Пример за некомутативна алгебра е множеството $M_2(K)$ от квадратните матрици от втори ред с елементи от K и обичайните операции умножение на матрици със скалар (т.е. с елемент на K), събиране и умножение на матрици:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{21} & \alpha\beta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}+\gamma_{11} & \beta_{12}+\gamma_{12} \\ \beta_{21}+\gamma_{21} & \beta_{22}+\gamma_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11}\gamma_{11}+\beta_{12}\gamma_{21} & \beta_{11}\gamma_{12}+\beta_{12}\gamma_{22} \\ \beta_{21}\gamma_{11}+\beta_{22}\gamma_{21} & \beta_{21}\gamma_{12}+\beta_{22}\gamma_{22} \end{pmatrix},$$

където $\alpha, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ са произволни елементи на K.

Линейните пространства, групите, пръстените и алгебрите са основни алгебрични обекти. Те са интересни не само от чисто алгебрична гледна точка, а и заради многобройните си приложения в другите области на математиката и информатиката, в естествените науки и в много други области на живота.

Например, съгласно теорията на Галоа, въпросът за разрешимост на едно алгебрично уравнение в радикали (т.е. представяне на решенията на уравнението с формули, подобни на формулата за решенията на квадратното уравнение) се свежда до установяване дали една крайна група, свързана с корените на уравнението, е разрешима, свойство, което (поне по принцип) може да се провери ефективно, ако е зададено уравнението. Подобна теория, също използваща групи, решава въпроса дали едно диференциално уравнение може да се реши в интеграли. С помощта на теория на групите се описват кристалографските групи в равнината и пространството. Оказва се, че типовете мозайки, които отговарят на всички кристалографски групи в равнината, са били използвани още от древните майстори, а теория на групите само доказва, че няма други типове. Но в тримерния случай с чисто алгебрични методи се дава пълен списък на кристалографските групи, като много от тях не са били известни преди това.

Групите, пръстените и алгебрите са сред основния апарат за изследване в теория на кодирането, теоретичната физика, електротехниката и др. Дори такива области, като теория на числата, за които доскоро се смяташе, че са без никакви приложения, днес се използват съществено например в криптографията.

В наивна формулировка, една от основните задачи на алгебрата е да се опишат всички групи, пръстени и алгебри над поле. Едва ли е разумно да се иска да се направи списък на всички обекти. Ние ще се спрем на два основни подхода за изучаване на алгебричните обекти – структурен и комбинаторен.

Ако говорим образно, структурният подход е анатомичен. Както при изучаването на един организъм, групата, пръстенът или алгебрата се разделят на части и се изучават отделните части (както се изучават отделните системи на организма) и връзката между тях (т.е. взаимодействието между отделните системи). Типичен пример е теорията на крайномерните асоциативни алгебри над поле. Ако R е алгебра над полето K, $\dim(K) < \infty$, то в R се дефинира идеал $J(R)$, наречен *радикал на Джекобсън* на R такъв, че:

1) Фактор-алгебрата R/J е полупроста. Всяка полупроста алгебра е директна сума от прости алгебри. Единствените прости алгебри са матричните алгебри над крайномерни тела над K (*тяло* е необезателно комутативно поле).

2) Радикалът J е *нилпотентен*, т.е. съществува естествено число n такова, че $u_1 \cdots u_n = 0$ за всички $u_1, \dots, u_n \in J$ (записано накратко, $J^n = 0$).

3) Радикалът J се отцепва, т.е. R е сума на J и на полупроста алгебра S.

Друг пример е теорията на крайно-породените комутативни пръстени и алгебри.

Комбинаторният подход в известен смисъл имитира класификацията на Линей. Както живите организми се разделят по някои общи признаци на големи групи, например земноводни, птици, бозайници и др., всяка група се разделя на подгрупи и т.н., така и алгебричните обекти се групират в класове, наречени многообразия, в зависимост от тъждествените съотношения, изпълнени в тях. Тази идея води началото си от 30-те години на XX век в работите на Биркхоф за универсални алгебри и на Бърнард Нойман за групи.

Една от първите задачи, която трябва да реши структурният подход към теорията на асоциативните алгебри, е да се намери разумно голям клас със съдържателна структурна теория, който по възможност да съдържа в себе си крайномерните и комутативните алгебри. Практиката показва, че такъв клас е класът на PI-алгебрите, т.е. алгебрите, удовлетворяващи нетривиално полиномно тъждество. Оказва се, че PI-алгебрите притежават и редица хубави комбинаторни свойства, а много класически структурни резултати се доказват с чисто комбинаторни методи.

1. PI-алгебри – определение и примери

За формалната дефиниция на PI-алгебра, нека $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ е безкрайно множество от променливи и нека

$$K\langle X\rangle = K\langle x_1, x_2, \dots\rangle$$

е *свободната асоциативна алгебра* от изброим ранг. Това е алгебрата на полиномите на некомутиращите променливи $x_1, x_2, \dots$. Елементите на множеството X се наричат *свободни пораждащи* на алгебрата $K\langle X\rangle$, а елементите на $K\langle X\rangle$ и на нейните подалгебри $K\langle X_d\rangle = K\langle x_1, \dots, x_d\rangle$ от ранг d се наричат полиноми. Понякога ще използваме и други букви, например y, y_i, z, z_i, за означаване на свободните пораждащи.

Дефиниция 1. Полиномът $f(x_1, \dots, x_d) \in K\langle X\rangle$ се нарича *полиномно тъждество* за алгебрата R, ако

$$f(r_1, \dots, r_d) = 0 \text{ за всички } r_1, \dots, r_d \in R.$$

Ако R удовлетворява нетривиално тъждество, тя се нарича *PI-алгебра* (PI е съкращение за polynomial identity).

Очевидно, комутативните алгебри са PI-алгебри, защото удовлетворяват комутаторното тъждество

$$[x, y] = xy - yx = 0.$$

Крайномерните алгебри са също PI-алгебри. Ако $\dim(R) < n$, то R удовелтворява *стандартното тъждество* от степен n

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0,$$

където сумирането се води по всички субституции (или пермутации) σ от симетричната група S_n от степен n и знакът $\operatorname{sign}(\sigma) = \pm 1$ на пермутацията σ се определя от нейната четност. (Поведението на стандартния полином е като на детерминантите. Той се анулира, ако променливите се заместят с линейно зависими елементи.) Освен това, крайномерните алгебри удовлетворяват и *тъждеството на Капели* на n алтерниращи променливи

$$c_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)} = 0$$

което, въпреки че изглежда по-сложно от стандартното тъждество, в много случаи има по-важни приложения от него.

В частност, матричната алгебра от n-ти ред $M_n(K)$ удовлетворява стандартното тъждество от степен $n^2 + 1$ и тъждеството на Капели $c_{n^2+1} = 0$. За тъждеството на Капели това е минималната степен, която се изпълнява в $M_n(K)$, но след малко ще видим, че това не е така за стандартното тъждество. Ще отбележим, че матричните алгебри вероятно са най-използваните некомутативни алгебри. Те се появяват практически във всички области на математиката и естествените науки, в много области на техниката и икономиката, до голяма степен благодарение на линейната алгебра и аналитичната геометрия.

Друг важен пример на PI-алгебра е *грасмановата* (или *външна*) алгебра над поле с характеристика, различна от 2. Ако V_m е линейно пространство с базис $\{e_1, \dots, e_m\}$, то грасмановата алгебра $E(V_m)$ на V_m се поражда от $\{e_1, \dots, e_m\}$ и има определящи съотношения

$$e_j e_i = -e_i e_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq m.$$

С други думи, $E(V_m)$ е изоморфна на фактор-алгебрата на свободната алгебра $K\langle y_1, \dots, y_m \rangle$ по модул идеала, породен от всички елементи от вида $y_iy_j + y_jy_i$, $1 \leq i \leq j \leq m$. Известно е, че $E(V_m)$ има базис, който се състои от елементите

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m.$$

Когато линейното пространство $V = V_\infty$ е безкрайномерно, ще означаваме $E(V_\infty)$ с E. Алгебрата E удовлетворява тъждеството

$$[x, y, z] = [[x, y], z] = 0.$$

Грасмановата алгебра е един от първите примери на безкрайномерна некомутативна алгебра. Тя намира приложения например в алгебричната и диференциалната геометрия. В последните тридесетина години грасмановата алгебра е основен обект в суперaлгебрата и супергеометрията, където освен обичайните n евклидови (четни) координати, които могат да се отъждествят с комутиращите променливи $x_1, \ldots, x_n$, се добавят и m грасманови (нечетни) координати, антикомутативните променливи $e_1, \ldots, e_m$.

2. Предистория

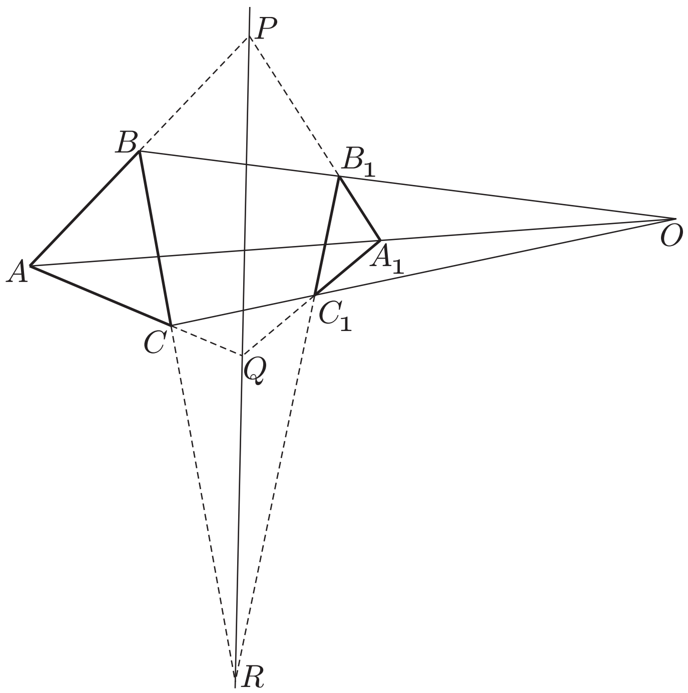
Исторически, първото появяване на алгебрите с полиномни тъждества е във връзка с основите на проективната геометрия. Една от основните теореми в (линейната) проективна геометрия е теоремата на Дезарг (Фиг. 1).

Теорема 2. *Нека съответните страни на два триъгълника ABC и $A_1B_1C_1$ се пресичат в точките P, Q и R. Трите точки P, Q и R лежат на една права тогава и само тогава, когато правите, съединяващи съответните върхове на триъгълниците, се пресичат в една точка.*

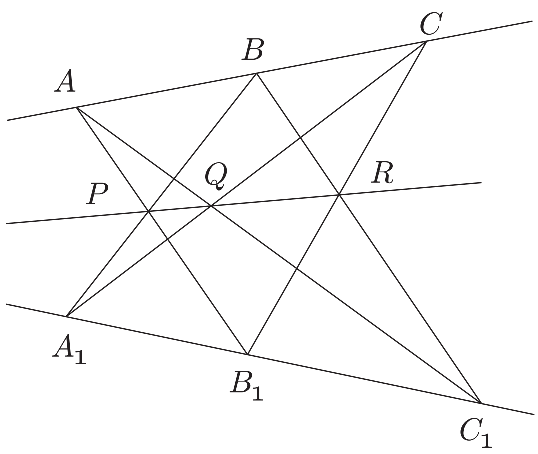
Валидността на теоремата на Дезарг в една проективна геометрия позволява да се въведат проективни координати от алгебра с деление D, по същия начин, както в комплексната проективна равнина се въвеждат координати от тройки комплексни числа (x_0, y_0, z_0), които не са едновременно равни на нула. Но в общия случай алгебрата D може да бъде некомутативна. Друга основна теорема е на Пап – Паскал (Фиг. 2).

Теорема 3. *Ако A, B, C и A_1, B_1, C_1 са точки, лежащи съответно върху две прави, но различни от пресечната точка на правите, то пресечните точки P, Q, R на двойките прави (AB_1, A_1B), (AC_1, A_1C) и (BC_1, B_1C) лежат на една права.*

Теоремата на Пап-Паскал е еквивалентна на факта, че алгебрата D е от теоремата на Дезарг комутативна. През 1922 г. немският



Фиг. 1. Теорема на Дезарг.



Фиг. 2. Теорема на Пап – Паскал.

геометър Макс Ден [De] се заинтересува от въпроса какви тъждествени съотношения, удовлетворявани от D, гарантират нейната комутативност. Той показва, че комутивността следва от тъждество от вида

$$\sum \alpha_{ij} x^i y x^j = 0, \quad \alpha_{ij} \in K,$$

когато $\mathrm{char}(K) = 0$, както и от някои други тъждества на две променливи. През 1936 г. неговият ученик Валтер Вагнер [W] публикува статия (със същото заглавие като [De]), която е първата статия, която е на езика на съвременните статии в областта на PI-алгебрите. Той доказва първата теорема за PI-алгебри:

Теорема 4. *Нареден пръстен, който удовлетворява полиномно тъждество, е комутативен.*

Статията на Вагнер съдържа и други пионерни резултати. Например:

Теорема 5. *Матричната алгебра от втори ред $M_2(K)$ удовлетворява тъждеството*

$$[[x,y]^2,z] = (xy-yx)^2z - z(xy-yx)^2 = 0.$$

Освен това той намира в явна форма и тъждества в матриците от произволен ред. Впоследствие, идеята на Вагнер довежда до намиране и на по-прости тъждества в $M_n(K)$, известни като тъждества на алгебричност:

Теорема 6. *Алгебрата $M_n(K)$ удовлетворява тъждествата*

$$s_n([x,y],[x^2,y],\ldots,[x^n,y]) = 0,$$

$$c_{n+1}(1,x,x^2,\ldots,x^n;y_1,\ldots,y_n) = \sum_{\sigma\in S_{n+1}} \mathrm{sign}(\sigma)x^{\sigma(0)}y_1x^{\sigma(1)}y_2\cdots y_nx^{\sigma(n)} = 0,$$

където симетричната група S_{n+1} действа върху символите $0,1,2,\ldots,n$.

И двете тъждества следват от теоремата на Хамилтън-Кейли от линейната алгебра. Ако a е матрица от n-ти ред, то тя удовлетворява своето характеристично уравнение и

$$f_a(a) = a^n + \alpha_1a^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}a + \alpha_ne = 0$$

за подходящи $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n \in K$. Следователно матриците $e,a,a^2,\ldots,a^n$ са линейно зависими, което доказва второто тъждество. Ако вземем комутатора на характеристичното уравнение на a с произволно $b \in M_n(K)$, ще получим

$$[f_a(a),b] = [a^n,b] + \alpha_1[a^{n-1},b] + \cdots + \alpha_{n-1}[a,b] = 0,$$

т.е. комутаторите $[a^n,b],[a^{n-1},b],\ldots,[a,b]$ са линейно зависими, откъдето се получава първото тъждество.

Следващата важна статия за теорията на PI-алгебрите е на Маршал Хол [Ha] и се появява през 1943 г. Повечето резултати в нея са от геометрично естество, но има и няколко чисто алгебрични резултата, които са сред глашатаите на съвременната теория на PI-алгебрите.

Теорема 7. *Всяка некомутативна алгебра с деление, която удовлетворява тъждеството* $[[x,y]^2,z]=0$ *е обобщено кватернионна, т.е. е четиримерна над своя център.*

Освен това, Хол повдига следния въпрос.

Проблем 8. *Вярно ли е, че пръстен с деление, удовлетворяващ тъждеството* $x^{p^n}-x=0$*, е комутативен.*

Теоремата на Хол и повдигнатия от него въпрос се появяват във връзка с опита да се опишат дезарговите геометрии, които удовлетворяват конфигурационни теореми, породени от 5 и 6 точки. Вторият проблем е свързан и с проблема на Бърнсайд за крайно-породените периодични групи и с теоремата на Ведербърн за крайните пръстени с деление.

Друг, чисто алгебричен източник на теорията на PI-алгебрите е проблемът на Курош, който е проблем от т.н. бърнсайдов тип. През 1902 г. Бърнсайд [Bu] поставя своя знаменит проблем, който се смята за един от главните проблеми в теория на групите в продължение на повече от 90 години:

Проблем 9. *Нека* G *е група, породена от краен брой елементи. Ако всеки елемент на* G *е от краен ред, т.е.* $g^n=1$ *за всяко* $g\in G$*, където естественото число* n *зависи от* g*, следва ли от това, че* G *е крайна?*

През 1941 г. Курош [Ku] поставя подобен проблем в теория на пръстените:

Проблем 10. (a) *Ако* R *е крайно-породена алгебра без единица, в която всеки елемент е нил, т.е.* $r^n=0$ *за подходящо* n*, зависещо от* $r\in R$*, вярно ли е, че* R *е нилпотентна, т.е. съществува естествено число* n *такова, че* $r_1\cdots r_n=0$ *за всеки* $r_1,\dots,r_n\in R$*?*

(b) *Ако всеки елемент* r *на крайно-породената алгебра* R *е алгебричен, т.е. съществува ненулев полином* $f(x)\in K[x]$ *такъв, че* $f(r)=0$*, то крайномерна ли е* R*?*

Ще отбележим, че отговорите на различните варианти на проблема на Бърнсайд са дадени: на общия проблем на Бърнсайд от Новиков и Адян (контрапример, когато експонентата n е достатъчно голямо просто число, което е едно и също за всички елементи на групата), на ограничения проблем на Бърнсайд, когато се пита дали редът на групата е ограничен, ако тя е от фиксирана експонента и вече е известно, че тя е крайна (положително решение от Кострикин, когато n е просто число и от Зелманов в общия случай). За този резултат Ефим Зелманов получи Филдсов медал. Множество други математици са давали нови контрапримери или са получавали частични резултати в това направление. Ще отбележим, че доказателствата на Кострикин и Зелманов използват идеи и методи от теорията на PI-алгебрите. Първият контрапример към проблема на Курош е на Голод и Шафаревич, също с методи на теорията на пръстените. (Виж книгата на Зелманов [Z] за повече информация за тематиката.)

През 1945 Джекобсън [J1] показва, че алгебричните алгебри от ограничена степен (т.е. степента на полинома $f(x)$ в (б) е ограничена) имат това свойство. Както при тъждествата на Вагнер за матричните алгебри от произволен ред се вижда, че алгебричните алгебри от ограничена степен удовлетворяват полиномно тъждество.

През 1946 г. Каплански [Ka1] с комбинаторни средства и Левицки [Le] с методи на структурната теория на пръстените решават положително проблема на Курош за нил-алгебри от ограничен индекс, т.е. удовлетворяващи полиномното тъждество $x^n = 0$. Впоследствие се оказва, че всички тези резултати се получават като директно следствие от теоремата на Ширшов за височината, за която ще стане дума след малко.

Повече за ранната история (или по-точно за предисторията) на PI-алгебрите може да се намери в прекрасния обзор на Амицур [A2].

3. От теоремата на Каплански до централните полиноми и нилпотентността на радикала

Счита се, че истинската теория на PI-алгебрите започва със статията на Каплански [Ka2] от 1948 г., в която той доказва своята класическа теорема.

Теорема 11. *Всяка примитивна (т.е. имаща точен неприводим модул) PI-алгебра е крайномерна над своя център проста алгебра.*

Освен това, Каплански доказва, че *крайно-породените PI-алгебри, в които всеки елемент е нил (от степен, зависеща от елемента), са нилпотентни.* В следващите години са получени множество резултати, които показват, че алгебрите с полиномни тъждества притежават богата и съдържателна структурна теория. През това време се оформят и някои от основните проблеми пред теорията на PI-алгебрите:

(а) *Кои са тъждествата, удовлетворявани от конкретни важни и интересни алгебри?*

(б) *Какво може да се каже за алгебрите, които удовлетворяват конкретно тъждество?*

(в) *Какво може да се каже за алгебрата, ако е известно, че тя удовлетворява някакво (но неизвестно какво) тъждество, т.е. единствената информация е, че алгебрата е PI?*

Ще се спрем накратко на някои резултати, които се считат за крайъгълни камъни в теорията, без да претендираме за пълнота.

През 1950 г. Амицур и Левицки [ALe] доказват своята прочутата теорема.

Теорема 12. *Матричната алгебра $M_n(K)$ удовлетворява стандартното тъждество*

$$s_{2n}(x_1,\dots,x_{2n})=0$$

от степен $2n$. Всяко тъждество от степен $\leq 2n$ в $M_n(K)$ е пропорционално на стандартното. Единствените изключения са случаите, когато $n=1,2$ и $K=\mathbb{F}_2$ е полето с два елемента, защото $M_1(\mathbb{F}_2)=\mathbb{F}_2$ удовлетворява тъждеството $x^2-x=0$, а $M_2(\mathbb{F}_2)$ удовлетворява нехомогенно тъждество от четвърта степен на три променливи.

През същата 1950 г. се появява и статията на Шпехт [Sp], където той поставя проблем, който е една от основните движещи сили в теорията в продължение на повече от 30 години.

Проблем 13. *Вярно ли е, че тъждествата във всяка PI-алгебра R следват от краен брой? С други думи, съществуват ли краен брой тъждества $f_1=f_2=\cdots=f_k=0$ на R със свойството, че всяка алгебра, която удовлетворява тези тъждества, удовлетворява всички тъждества на R?*

Проблемът на Шпехт е частен случай за асоциативни алгебри на проблема за крайната базируемост в универсалната алгебра (който за групи е поставен от Бърнард Нойман още през 1937 г.). Но влиянието му е толкова голямо, че понятието шпехтовост днес се използва и в случая на групи или неасоциативни алгебри.

Доказателството на следващата теорема на Нагата – Хигман [Na, Hi] от 1953 г. е чисто комбинаторно, но то лежи в основата на много структурни резултати.

Теорема 14. *Над поле с характеристика 0 всяка алгебра, която удовлетворява тъждеството $x^n=0$, удовлетворява и тъждеството $x_1x_2\cdots x_d=0$ за подходящо $d=d(n)$, зависещо от n. С други думи, всяка нил-алгебра от ограничен индекс е нилпотентна.*

Впоследствие се оказва, че тази важна теорема е била доказана доста преди това, през 1943 г. от руските математици Дубнов и Иванов [DI], но е останала незабелязана от математическата общност.

В много отношения развитата през 50-те и 60-те години на XX век структурна теория на PI-алгебрите показва, че те наистина приличат на крайномерните и на комутативните алгебри. Теоремата на Ширшов за височината [Sh] дава потвърждение на този факт на комбинаторен език. Тя показва, че крайно-породените PI-алгебри приличат на крайно-породени модули на полиномни алгебри на краен брой променливи.

Теорема 15. *Нека R е PI-алгебра, удовлетворяваща полиномно тъждество от степен k и породена от d елемента $r_1, \dots, r_d$. Тогава съществува число h_0 такова, че R се поражда като линейно пространство от елементи от вида*

$$v_{i_1}^{a_1} \cdots v_{i_h}^{a_h}, \quad a_i \geq 0,$$

където $h \leq h_0$ и $v_i = r_{b_1} \cdots r_{b_n}$ са произведения с дължина $\leq k-1$ на пораждащите r_j на алгебрата R.

Най-малкото h_0 с това свойство се нарича *височина* на алгебрата R. Лесно се вижда, че от теоремата на Ширшов за височината непосредствено следват резултатите на Левицки и Каплански за положителното решение на проблема на Курош в класа на PI-алгебрите. Оригиналното доказателство на Ширшов използва анализ на думите в крайни азбуки. Впоследствие, теоремата получава редица уточнения и подобрения, които засягат стойността на височината h_0 и дължината на думите v_i, вж. например книгите [D1, KBR].

Множеството $T(R)$ от всички полиномни тъждества на алгебрата R е идеал на свободната алгебра $K\langle X\rangle$, който е инвариантен относно заместванията на неизвестните с елементи на $K\langle X\rangle$, т.е. ако $f(x_1, \dots, x_d) \in T(R)$ и $u_1, \dots, u_d \in K\langle X\rangle$, то $f(u_1, \dots, u_d) \in T(R)$. Такива идеали се наричат *T-идеали* (защото са инвариантни относно трансформациите на $K\langle X\rangle$). Всяко пораждащо множество на $T(R)$ като T-идеал на $K\langle X\rangle$ се нарича *базис на тъждествата* в R. Класът от всички алгебри, удовлетворяващи дадени тъждества $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ се нарича *многообразие от алгебри*, определено от тези тъждества.

Още от самото начало на развитието на теорията на PI-алгебрите става ясно, че много (особено комбинаторни) свойства на тъждествата зависят съществено от характеристиката на основното поле K и дали K е крайно или безкрайно. Оказва се, че в случая на поле с характеристика 0 няма нужда да се изучават всички тъждества, а само полилинейните. Ще припомним, че едно тъждеството $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ е *хомогенно*, ако всички негови мономи са от една и съща степен. То е *полилинейно*, ако мономите му са от първа степен относно всяка една от променливите. Нека P_n е линейното пространство на полилинейните полиноми от степен n в $K\langle X\rangle$. Очевидно P_n е от размерност $n!$ и има базис, който се състои от всички произведения $x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$, $\sigma\in S_n$.

Лема 16. *Всяка PI-алгебра R удовлетворява полилинейно тъждество. Ако полето е безкрайно, то всички тъждества в R следват от хомогенните. Ако полето е с характеристика 0, то всички тъждества на R следват от полилинейните.*

Един от основните въпроси в теорията на PI-алгебрите е тяхното поведение относно естествени алгебрични конструкции. В частност, вярно ли е, че *ако A и B са PI-алгебри, то тяхното тензорно произведение $A\otimes_K B$ е също PI-алгебра?* Положителен отговор е даден от Регев [Re1] през 1972 г., който за целта прави количествен анализ на тъждествата на една алгебра. Представяме теоремата на Регев за ръста на коразмерностите в уточнената форма, доказана от Латишев [La1].

Теорема 17. *Нека*

$$c_n(R)=\dim(P_n/(P_n\cap T(R)),\quad n=1,2,\dots,$$

е редицата от коразмерности на полиномните тъждества на алгебрата R, т.е. размерността на линейното пространство на полилинейните полиноми от степен n по модул тъждествата в R. Ако R удовлетворява полиномно тъждество от степен k, то

$$c_n(R)\leq (k-1)^{2n}.$$

Тъй като за големи стойности на n факториелът $n!$ е много по-голям от експонентата $(k-1)^{2n}$, теоремата на Регев дава числов израз на факта, че наличието на полиномно тъждество е много силно ограничение върху алгебрата.

В случая на крайно-породени алгебри количествената оценка на сложността на алгебрата се определя от нейния ръст. Ако R се поражда от елементите $r_1,\dots,r_d$ и R_n е линейната обвивка на произведенията $r_{i_1}\cdots r_{i_k}$, $k=1,2,\dots,n$, то редицата

$$g_R(n)=\dim(R_n),\quad n=1,2,\dots,$$

се нарича *функция на ръста* на R. Разбира се, $g_R(n)$ зависи от избора на пораждащото множество на R, но горната граница

$$\mathrm{GKdim}(R)=\limsup_{n\to\infty}\log_n(g_R(n))$$

не зависи от избора на пораждащите на R и се нарича *размерност на Гелфанд-Кирилов* на R. Когато $\mathrm{GKdim}(R)$ е крайна, това означава, че ръстът на R е като на алгебра на полиномите на краен брой променливи. Нарушавайки историческия ход на развитие на PI-теорията, ще споменем и важната теорема на Берел [Ber] от 1981 г.

Теорема 18. *Крайно-породените PI-алгебри имат крайна размерност на Гелфанд-Кирилов.*

Оригиналното доказателство на Берел използва вариант на теоремата на Ширшов за височината. Впоследствие Амицур и Дренски намериха просто доказателство, което се получава като непосредствено следствие от теоремата на Ширшов, вж. книгата на Роуен [Ro2].

През 1956 г. Каплански поставя 12 проблема в теория на пръстените, които оказват огромно влияние върху развитието на теорията (вж. [Ka3] за ревизираната версия на проблемите на Каплански). Един от проблемите е мотивиран от тъждеството на Вагнер – Хол за матриците от втори ред. Тъй като $[[x,y]^2,z]=0$ е тъждество в алгебрата $M_2(K)$, то полиномът $[x,y]^2$ приема само скаларни стойности в $M_2(K)$ и, както лесно се вижда, не е полиномно тъждество.

Проблем 19. *Вярно ли е, че за всяко естествено число n съществува полином $c(x_1,\dots,x_m)\in K\langle X\rangle$, който е хомогенен, не е тъждество в матричната алгебра $M_n(K)$, и приема само стойности от нейния център?*

С други думи, $[c(x_1,\dots,x_m),x_{m+1}]=0$ е тъждество в $M_n(K)$, а $c(x_1,\dots,x_m)=0$ не е. Такъв $c(x_1,\dots,x_m)\in K\langle X\rangle$ се нарича *централен полином* за $M_n(K)$. Положителен отговор на проблема на Каплански е даден независимо и почти едновременно от Форманек [F1] и Размислов [Ra1] през 1972-73 г.

Теорема 20. *Матричната алгебра $M_n(K)$ над произволно поле K има централен полином за всяко $n\geq 1$.*

Откриването на централните полиноми за матричните алгебри се оказва изключително важно за общата теория на PI-алгебрите. Скоро след това, през 1975 г., излиза книгата на Джекобсън [J2], в която изцяло се ревизира структурната теория на PI-алгебрите на базата на съществуването на централните полиноми.

Конструкциите на Форманек и Размислов се базират на различни идеи, които впоследствие са използвани при решаването па редица други задачи в PI-теорията. Централният полином на Форманек е от степен n^2, и това е минималната степен на централните полиноми за матриците от ред 1 и 2. Полиномът на Размислов е от степен $3n^2-2$, но впоследствие Халпин [Hp] показва, че с метода на Размислов могат да се конструират централни полиноми също от степен n^2.

По това време се появява и хипотезата, че *минималната степен на централните полиноми за матриците от n-ти ред е n^2.*

Ще завършим този параграф с теоремата на Размислов – Кемер – Браун. По аналогия със структурната теория на крайномерните алгебри и на крайно-породените комутативни алгебри, когато радикалът на Джекобсън е нилпотентен, и в духа на изследванията на нил-идеалите в PI-алгебрите, възниква хипотезата, че *радикалът на Джекобсън на крайно-породените PI-алгебри е нилпотентен.* Това е доказано на три стъпки. Най-напред през 1974 г. Размислов [Ra3] доказва, че *над поле с характеристика* 0 *радикалът на Джекобсън на една крайно-породена PI-алгебра R е нилпотентен, ако R удовлетворява тъждество на Капели.* След това през 1980 г. Кемер [Ke1] показва, *също над поле с характеристика* 0*, че всяка крайно-породена алгебра удовлетворява тъждество на Капели.* Доказателствата на Размислов и Кемер са комбинаторни. Накрая Браун [Br] през 1984 г. установява с методи на структурната теория на PI-алгебрите и съществено използване на централни полиноми теоремата в нейната максимална общност, за крайно-породени алгебри над ньотерови комутативни пръстени.

4. Тъждества в конкретни алгебри

Въпреки, че изучаването на полиномните тъжества на конкретни алгебри винаги е била една от основните задачи на PI-теорията, даже в наши дни тази задача е решена напълно в много малко случаи. Основните резултати в това направление са над поле с характеристика 0. Един от първите резултати е описанието на Юрий Малцев [Ma] от 1971 г. на тъждествата на алгебрата $U_n(K)$ на горно-триъгълните матрици от n-ти ред.

Теорема 21. *Над поле с нулева характеристика T-идеалът $T(U_n(K))$ поражда от тъждеството*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0.$$

Ще отбележим, че това тъждество е важно не само за алгебрата на горно-триъгълните матрици. Известно е, че всяка крайно-породена алгебра R, която удовлетворява *нематрично тъждество*, т.е. тъждество, което не се изпълнява в алгебрата на матриците от втори ред, удовлетворява тъждествата на $U_n(K)$ за подходящо n. По тази причина полиномните тъждества в $U_n(K)$ служат за мярка на сложността на тъждествата в крайно-породените алгебри с нематрично тъждество по същия начин, както тъждествата в матричните алгебри се използват за мярка на сложността на тъждествата в произволни PI-алгебри.

Следващият резултат, който ще спомена, е теоремата на Краковски и Регев [KRe] от 1973 г. Освен базиса на тъждествата в грасмановата алгебра, резултатът дава и коразмерността на нейните тъждества.

Теорема 22. (а) *T-идеалът на тъждествата на грасмановата алгебра E се поражда от тъждеството $[x, y, z] = 0$.*

(б) *Коразмерностите на E се задават от формулата*

$$c_n(E) = 2^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

По това време вече е известно, че тъждеството за алгебричност за матриците от n-ти ред не следва от стандартното тъждество от степен $2n$ (и тъждеството на Вагнер – Хол за $M_2(K)$ не следва от $s_4 = 0$). Актуален става въпросът *да се намери базис на тъждествата на матриците от произволен ред* и по-общо *да се опишат тези тъждества от различна гледна точка.* В началото на 70-те години на XX век Размислов разработва своя метод, с който не само построява централни полиноми за матричните алгебри, но и решава редица други задачи от теорията на асоциативните и лиевите алгебри и теория на групите. В частност той доказва крайната базируемост на тъждествата в матричните алгебри от втори ред над поле с характеристика 0 и дава в явен вид базис на тъждествата в $M_2(K)$.

Теорема 23. *Тъждествата в матричната алгебра от втори ред над поле с нулева характеристика следват от стандартното тъждество $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, тъждеството на Вагнер – Хол $[[x, y]^2, z] = 0$ и от още седем тъждества от пета и шеста степен.*

След резултата на Лерон [Lr], че *при $n > 2$ тъждествата от степен $2n + 1$ в $M_n(K)$ следват от $s_{2n} = 0$* се поставя въпросът *да се намери минималната степен на тъждествата в $M_n(K)$, които не следват от $s_{2n} = 0$.*

В течение на почти две десетилетия Регев разработва своя метод за количествено изучаване на полиномните тъждества. В своите изследвания от гледна точка на представянията на симетричните групи той привлича солиден арсенал от методи от различни математически дисциплини, като се започне от комбинаторика и се стигне до оценка на многомерни интеграли в комплексната област. Сред резултатите на Регев ще отбележим точната асиптотика на коразмерностите на тъждествата в матричните алгебри, вж. обзора [Re2].

$$c_m(M_n(K)) \approx (2\pi)^{(1-n)/2} 2^{(1-n^2)/2} 1!2! \cdots (n-1)! n^{(n^2+4)/2} m^{(1-n^2)/2} n^{2m+2}.$$

С тъждествата в матричните алгебри са свързани и други важни алгебрични обекти – алгебрите на общите матрици и на техните следи, въведени от Прочези [Pr1] през 1967 г. Нека $x_{pq}^{(i)}$, $p, q =$

$1, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots$, са комутиращи променливи. Алгебрата R_n, породена от *общите матрици* от n-ти ред

$$y_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & \cdots & x_{1n}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^{(i)} & \cdots & x_{nn}^{(i)} \end{pmatrix}$$

е хомоморфен образ на свободната алгебра $K\langle X\rangle$ под действието на естествения хомоморфизъм. *Ядрото на този хомоморфизъм съвпада с T-идеала от тъждествата на* $M_n(K)$, поради което изучаването на тъждествата в $M_n(K)$ е еквивалентно на изучаването на алгебрата R_n. Следите $\mathrm{tr}(f)$, $f \in R_n$, пораждат комутативна алгебра C_n, наречена *комутативна, или чиста, алгебра на следите*. Отъждествявайки елементите на C_n със скаларни матрици, R_n и C_n пораждат *некомутативната, или смесена, алгебра на следите* T_n. Алгебрите C_n и T_n имат редица хубави алгебрични свойства, което ги прави по-лесни за изучаване, отколкото алгебрата R_n. От друга страна, трите алгебри са много близки помежду си, което позволява пренасяне на редица резултати (особено асимптотични) от C_n и T_n към R_n. Много от важните резултати за тъждествата в матричните алгебри са получени по този начин. Освен това, C_n и T_n намират многобройни приложения в други области на алгебрата – в теория на инвариантите, в теория на крайномерните алгебри с деление, теория на полетата и др. Например, C_n е алгебра на инвариантите на общата линейна група, действаща на матриците от n-ти ред чрез едновременно спрягане, а разширяването на T_n с полето от частни на C_n дава важни контрапримери към известна хипотеза в теорията на алгебрите с деление. Подробности могат да се намерят в книгите на Джекобсън [J2], Форманек [F2] и Дренски и Форманек [DF].

Както се вижда от изложението, началото на 70-те години на XX век е време на разцвет на изучаването на тъждествата в конкретните алгебри над поле с характеристика 0. По това време се засилва и интересът към тъждествата в алгебри над поле с положителна характеристика. Крузе [Kr] и Лвов [Lv] доказват:

Теорема 24. *Всяка крайномерна алгебра над крайно поле има краен базис на тъждествата си. Същото е вярно и за полиномните тъждества на крайните асоциативни пръстени.*

Доказателствата в [Kr] и [Lv] си приличат и следват основните идеи на Шила Оутс и Пауел [OP], които използват структурна теория на крайните групи за получаване на подобен резултат за крайната базируемост на тъждествата в крайните групи. По правило, както резултатите, така и методите за изучаване на тъждествата над крайни полета се различават съществено от тези в характеристика 0. През 1978 г. Юрий Малцев и Кузмин [MaK] намират базис на тъждествата в $M_2(\mathbb{F}_q)$, където $\mathbb{F}_q$ е полето q с елемента. Те показват, че $T(M_2(\mathbb{F}_q))$ *се поражда от тъждествата*

$$(x-x^q)(y-y^{q^2})(1-[x,y]^{q-1})=0,\quad (x-x^q)\circ(y-y^q)-((x-x^q)\circ(y-y^q))^q=0,$$

където $u\circ v=uv+vu$.

Развитието на теорията на PI-алгебрите е повлияна съществено от положителните резултати и от контрапримерите към проблема за крайната базируемост за групи и алгебри на Ли над поле с положителна характеристика. Ще припомним, че *алгебра на Ли* е неасоциативна алгебра G, която удовлетворява тъждеството на антикомутативност $[x,x]=0$ и тъждеството на Якоби $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, където умножението в G е означено с квадратни скобки. Асоциативната алгебра R се превръща в алгебра на Ли (означавана с $R^{(-)}$) спрямо операцията $[a,b]=ab-ba$, $a,b\in R$. Всяка алгебра на Ли G е изоморфна на подалгебра на $R^{(-)}$ за подходяща асоциативна алгебра R. След първия пример на Олшански от 1970 г. на групи, чиито тъждества не са крайно-базируеми, се появява аналогичен пример на Воун-Ли [VL] за алгебри на Ли над поле с характеристика 2.

Теорема 25. (а) *Над поле K с характеристика 2 системата от лиеви тъждества*

$$[[[x_1,x_2],[x_3,x_4]],x_5]=0 \quad \text{(централно-метабелево тъждество)}$$

$$\text{и } [[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n],[x_1,x_2]]=0,\quad n=3,4,\ldots,$$

не следват от краен брой измежду тях.

(б) *Над безкрайно поле K с характеристика 2 тъждествата в лиевата алгебра $M_2(K)^{(-)}$ не следват от краен брой.*

Във връзка с резултата на Воун-Ли ще споменем един проблем, който все още не е решен.

Проблем 26. *Да се намери базис на тъждествата в асоциативната алгебра $M_2(K)$ над безкрайно поле с характеристика 2. Вярно ли е, че тези тъждетва не следват от краен брой?*

Тук е мястото да отбележим, че проблемът на Шпехт за асоциативни алгебри над поле с положителна характеристика е решен отрицателно съвсем неотдавна, на границата между двете хилядолетия. Първите контрапримери са получени от Белов [Be], Гришин [Gr] и Щиголев [Shch]. Един от най-простите примери на безкрайно-базируема система от полиномни тъждества е на Гупта и Красилников [GK] над поле с характеристика 2:

$$[x, y^2]x_1^2 \cdots x_n^2[x, y^2]^3 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

5. От теорията на Кемер до наши дни

Класическата теорема на Амицур [A1] дава, че над безкрайно поле Т-идеалите на матричните алгебри $T(M_n(K))$ са единствените първични Т-идеали. В началото на 80-те години на XX век Кемер [Ke2] развива своята структурна теория на Т-идеалите в свободната алгебра $K\langle X\rangle$ над поле K с характеристика 0, в духа на теорията на идеалите в полиномните алгебри, но много различна от нея по методи. Т-идеалът $T(R)$ се нарича *Т-полупървичен*, ако от включването $T(R_1)^n \subseteq T(R)$ следва $T(R_1) \subseteq T(R)$. Той е *първичен*, ако от $T(R_1)T(R_2) \subseteq T(R)$ следва, че $T(R_1) \subseteq T(R)$ или $T(R_2) \subseteq T(R)$.

Теорема 27. (а) *За всеки Т-идеал $T(R)$ съществуват Т-полупървичен идеал $T(S)$ и число k такива, че*

$$T(S)^k \subseteq T(R) \subseteq T(S).$$

(б) *Всеки Т-полупървичен идеал $T(R)$ е сечение на краен брой Т-първични идеали $T(R_1), \dots, T(R_m)$ (и $T(R) = T(R_1 \oplus \cdots \oplus R_m)$).*

(в) *Пълният списък на Т-първичните идеали се състои от*

$$(0), K\langle X\rangle, T(M_n(K)), T(M_n(E)) \text{ и } T(M_{p,q}),$$

Тук $M_n(E)$ е алгебрата на матриците от n-ти ред, чиито елементи са от грасмановата алгебра E. Алгебрата

$$M_{p,q} = \begin{pmatrix} M_{p\times p}(E_0) & M_{p\times q}(E_1) \\ M_{q\times p}(E_1) & M_{q\times q}(E_0) \end{pmatrix}$$

е подалгебра на $M_{p+q}(E)$ и се състои от блочни матрици, където E_0 и E_1 са линейните подпространства на E, породени съответно от произведенията $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ от четна и нечетна дължина. Доказателствата използват суперaлгебри, т.е. $\mathbb{Z}_2$-градуирани алгебри и градуираните тъждества в тях. Като следствие от своята теория Кемер решава и проблема на Шпехт [Ke3] и показва, че вместо тъждествата в крайно-породените алгебри е достатъчно да се разглеждат тъждествата в крайномерните алгебри [Ke4].

Теорема 28. *Над поле с характеристика* 0 *тъждествата на всяка алгебра следват от краен брой.*

Теорема 29. *Тъждествата на всяка крайно-породена алгебра R над поле с характеристика* 0 *съвпадат с тъждествата на подходяща* *крайномерна алгебра R_0. Фактор-алгебрата $K\langle x_1,\dots,x_d\rangle/(K\langle x_1,\dots,x_d\rangle\cap T(R))$ се влага в матрична алгебра $M_n(F)$ над разширение F на полето K.*

Теоремата има и обобщение за PI-алгебри без условието за крайна породеност, но тогава резултатите се формулират на езика на крайномерни супералгебри. Подробно описание на теорията на Кемер е дадено в неговата монография [Ke5].

През 90-те години на XX век се натрупва значителен апарат за изучаването на PI-алгебрите от различна гледна точка. Едни от най-забележителните резултати по това време са получени в серия от статии на Джамбруно и Зайцев, в които се комбинират комбинаторни методи с теорията на Кемер, вж. тяхната книга [GZ5]. От теоремата на Регев следва съществуването на горната граница $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(R)}$ за произволна PI-алгебра R, и тя може да се използва за мярка на сложността на полиномните тъждества на R. Съществуването на границата $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(R)}$ е хипотеза, която стои нерешена от много години. Отговорът е даден в [GZ1, GZ2].

Теорема 30. *За произволна PI-алгебра R границата*

$$\exp(R)=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(R)}$$

съществува и е неотрицателно цяло число, наречено експонента на R.

Доказателството на теоремата съдържа ефективен алгоритъм, който позволява пресмятането на експонентата на една PI-алгебра. Освен това, теоремата дава частичен отговор на хипотезата на Регев, която е решена само в частни случаи – за алгебрите $M_n(K)$, E, $M_{1,1}$ и за произведения на техните T-идеали. Частични резултати са получени и за останалите T-първични алгебри $M_n(E)$, $n\geq 2$, и $M_{p,q}$, $p+q>2$.

Хипотеза 31. *За произволна PI-алгебра R съществуват $a\in\mathbb{N}_0$, $b\in\mathbb{Z}/2$ и $\gamma\in\mathbb{R}$ такива, че асимптотичното поведение на коразмерностите на R се задава от*

$$c_k(R)\approx\gamma k^b a^k.$$

Колкото един T-идеал $T(R)$ е по-голям, толкова повече ограничения се поставят върху PI-алгебрата R и толкова по-просто изглеждат тъждествата в R. Естествено възниква въпросът да се опишат всички идеали, които са съществено по-сложни от тези, които ги съдържат строго. На базата на редица частни случаи, като $T(M_n(K))$, $T(E)$, $T^n(K)$, $T^n(E)$, $T(E)T(K)$ и $T(K)T(E)$, през 1987 г. Дренски [D2] формулира следната хипотеза (доста преди да е доказана теоремата на Джамбруно и Зайцев).

Хипотеза 32. *Един T-идеал $T(R)$ е екстремален по отношение на коразмерностите, т.е. $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(R)}$ съществува и*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(R)} > \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{c_k(S)}$$

за всяка алгебра S, за която е в сила строгото включване $T(R)\subset T(R)$, тогава и само тогава, когато $T(R)$ е произведение на собствени T-първични T-идеали.

Положителното решение на тази хипотеза е дадено от Джамбруно и Зайцев [GZ3, GZ4] едва през 2003 г. Те наричат T-идеалите на такива алгебри R *максимални T-идеали от дадена експонента.*

Теорема 33. *Един T-идеал $T(R)$ е максимален T-идеал от дадена експонента тогава и само тогава, когато е произведение от T-първични T-идеали, т.е.*

$$T(R) = T(R_1)\cdots T(R_m),$$

където алгебрите R_i са някои от алгебрите $M_n(K)$, $M_n(E)$ и $M_{p,q}$.

Много често алгебрите, които се появяват в различни приложения, имат допълнителна структура. Такава може да бъде например наличието на инволюция или градуировка. Ще припомним, че линейният оператор $*$, действащ върху една алгебра R се нарича *инволюция*, ако $(a^*)^* = a$ и $(ab)^* = b^*a^*$ за произволни $a, b \in R$ (т.е. $*$ е *антиавтоморфизъм от втори ред* на R). Изучаването на полиномните тъждества с инволюция и по-специално на матричните алгебри с инволюция, в духа на "обикновените" полиномни тъждества, е важен дял от теорията на PI-алгебрите. Резултатите на Кемер предизвикват интерес не само към изучаването на полиномните тъждества в T-първичните алгебри, но и на супер-тъждествата в суперaлгебрите и по-общо на градуираните тъждества на градуираните алгебри. Всички тези тъждества отчитат допълнителната структура на алгебрата, а често служат и като междинна стъпка за описанието на обикновените тъждества.

Накрая ще споменем няколко монографии, които дават представа за различни аспекти на теорията на PI-алгебрите. В хронологичен ред това са книгите на Прочези [Pr2], Джекобсън [J2] (която съдържа контрапримера на Амицур на крайномерни алгебри с деление, които не са кръстосани произведения и ревизията на структурната теория на PI-алгебрите от гледна точка на централните полиноми), на Роуен [Ro1] (подробно изложение на структурната теория), на Размислов

[Ra4] и Кемер [Ke5] (посветени на методите, разработени от авторите) и на Форманек [F2] (посветена на полиномните тъждества и инвариантите на матричните алгебри). В по-ново време се появиха книгите на Дренски [D1], Дренски и Форманек [DF] (базирани на курсове, прочетени от авторите и ориентирани към по-широка аудитория), както и книгите на Канел-Белов и Роуен [KBR], Джамбруно и Зайцев [GZ5], които са по-специализирани.

6. Българският принос – ранни резултати

Първите български резултати в областта на PI-алгебрите са на Михаил Гаврилов. Те са за PI-алгебри над поле с характеристика 0 и се групират около две теми: (а) тъждества в матричните алгебри и проблем на Шпехт; (б) Строеж на групоида от многообразията от алгебри. Ще отбележим някои типични резултати от това време. През 1966 г. в [Ga1] Гаврилов доказва, че *полиномните тъждества в матриците от ред* $n = 3, 4, 5$ *над поле с характеристика* 0 *не следват от стандартното тъждество* $s_{2n} = 0$. По това време това е известно само за матриците от втори ред (резултат на Латишев през 1963 г.), а в общия случай решенението е получено няколко години след това. В статиите [Ga3, Ga4, Ga5] се показва, че всеки T-идеал, който съдържа някое от тъждествата $[[x_1, x_2], x_3[x_4, x_5]] = 0$, $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$ или $[[x_1, x_2, x_3], x_4[x_5, x_6]] = 0$ е крайно-базируем. В [Ga2] Гаврилов изучава групоида на многообразията от асоциативни алгебри относно операцията произведение от многообразия. Ако $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ са многообразия от алгебри, то тяхното произведение $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ се състои от всички алгебри R, които имат идеал $S \in \mathfrak{U}$ с фактор-алгебра $R/S \in \mathfrak{V}$. Един от основните резултати в работата показва, че *групоидът не е полугрупа, защото не удовлетворява асоциативния закон за умножението* (противно на случая на многообразия от групи и от алгебри на Ли, когато умножението на многообразия е асоциативно). В съвместната статия на Гаврилов, Любомир Давидов и Иван Тонов [GDT] се доказва шпехтовостта на стандартното тъждество $s_3 = 0$ (за алгебри без 1) и на тъждеството $[x_1, x_2, x_3, x_4] - \alpha[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}] = 0$, $\alpha \in K$ (за алгебри с 1). Освен това се дава описание на групоида от подмногообразията на многообразието, определено от тъждеството $[x_1x_2, x_3] = 0$ (доказва се, че е изоморфен на явно зададена полугрупа). (Групоидът на подмногообразията на многообразието $\mathfrak{W}$ е относно $\mathfrak{W}$-умножението $\mathfrak{U} \circ_{\mathfrak{W}} \mathfrak{V} = \mathfrak{U}\mathfrak{V} \cap \mathfrak{W}$.) Изучаването на групоида от многообразия, в класа на всички асоциативни алгебри или в дадено многообразие, (условия за асоциативност за някои подгрупоиди, съкращаване в групоида, поведение относно други операции) продължава в работите на Георги Генов и Тонов [GT], Тонов [T1, T2], Ангел Попов [Po4, Po2] и Иван Стоянов и Тонов [ST].

През 70-те години на XX век Генов разширява тематиката и започва изучаването на операции между многообразия не само от асоциативни, но и от лиеви алгебри [Ge1, Ge2].

През 1975 г. Бахтурин и Олшански [BO] доказват, че тъждествата в крайните пръстени на Ли и крайномерните алгебри на Ли над крайно поле следват от краен брой. Това е аналог на теоремата на Крузе [Kr] и Лвов [Lv] за асоциативния случай, но изисква разработването на принципно нови техники. Върху същия проблем работи и Генов [Ge6], който получава независимо част от резултатите в [BO].

Тъждествата в алгебри на Ли се изучават и от Веселин Дренски. В [D3] той обобщава за поле с произволна положителна характеристика резултатите на Воун-Ли за безкрайна базируемост на многообразия от алгебри на Ли над поле с характеристика 2.

Теорема 34. (а) *Над всяко поле K с характеристика $p > 0$ системата от лиеви тъждества*

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4], \ldots, [x_{2p-1}, x_{2p}]], x_{2p+1}] = 0,$$
$$[[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n], \underbrace{[x_1, x_2], \ldots, [x_1, x_2]}_{p-1 \text{ пъти}}] = 0, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

не следват от краен брой измежду тях.

(б) *Над всяко безкрайно поле K с характеристика $p > 0$ съществува крайномерна алгебра на Ли, тъждествата на която не следват от краен брой.*

Първият от тези резултати е получен независимо от руския математик Юрий Клейман.

Допълвайки резултата на Малцев и Кузмин [MaK] за тъждествата на асоциативната алгебра на матриците от втори ред над крайно поле, Дренски [D4] намира базис (състоящ се от пет тъждества) на тъждествата на лиевата алгебра $M_2(\mathbb{F}_{2^r})^{(-)}$ над крайно поле с характеристика 2. Ще отбележим, че аналогичният проблем за базиса на тъждествата на алгебрата $sl_2(\mathbb{F}_q)$ над крайно поле с нечетна характеристика все още не е решен.

Темата за тъждествата в крайномерни алгебри над крайно поле продължава в работите на Генов [Ge5] и Генов и Пламен Сидеров [GS], в които се дават базиси на тъждествата в матриците от трети и четвърти ред. Ще отбележим, че базисът на тъждествата в $M_3(\mathbb{F}_q)$ се състои от 7 полиномни тъждества, а за $M_4(\mathbb{F}_q)$ – от 15 тъждества. Друг резултат над произволно поле е на Сидеров [Si1], който намира тъждествата в горно-триъгълните матрици от произволен ред над произволно (крайно или безкрайно) поле, с което се обобщава резулатът на Малцев [Ма].

Теорема 35. (а) *Над произволно безкрайно поле K тъждествата в алгебрата $U_n(K)$ на горно-триъгълните матрици от n-ти ред следват от тъждеството*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0.$$

(б) *Тъждествата в $U_n(\mathbb{F}_q)$ над крайното поле $\mathbb{F}_q$ с q елемента следват от*

$$(x_1^q - x_1)(x_2^q - x_2) \cdots (x_n^q - x_n) = 0.$$

(в) *Лиевите тъждества в алгебрата на Ли $U_n(K)^{(-)}$ над безкрайно поле K следват от*

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2n-1}, x_{2n}]] = 0.$$

Независимо (по същото време или малко по-късно от Сидеров) тази теорема е доказана от още няколко души – от Калюлайд и Полин в асоциативния случай и от Бахтурин и Липянски в лиевия случай.

Тук ще отбележим и един резултат на "чуждестранен" представител на българската алгебра. Буй Тьонг Чи, виетнамски докторант в България [Bui] упростява базиса на тъждествата в матриците от втори ред над поле с характеристика 0, намерен от Размислов и от девет тъждества го свежда на четири.

Едни от най-силните резултати в областта, получени в България в края на 70-те години, се отнасят до проблема на Шпехт над поле с характеристика 0. През 60-те и 70-те години редица автори използват резултат на Хигман от 1952 г. за доказване на крайна базируемост в случая на групи и алгебри на Ли. Теоремата на Хигман [Hi2] дава, че алгебрата на полиномите на безбройно много променливи е ньотерова относно идеалите, затворени спрямо някои изображения от специален вид. Генов [Ge3, Ge4] и Попов [Po1] показват последователно:

Теорема 36. *Всяка асоциативна алгебра над поле с характеристика* 0*, която удовлетворява полиномното тъждество*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0,$$

има краен базис от тъждества.

Теорема 37. *Всяка асоциативна алгебра над поле с характеристика* 0*, която удовлетворява полиномното тъждество*

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6] \cdots [x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}] = 0,$$

има краен базис от тъждества.

Всяка крайно-породена алгебра, която удовлетворява нематрично тъждество, попада под теоремата на Генов. Като непосредствено следствие от теоремата на Попов се получава, че произведението на комутатори с дължина три може да се замени с произведение на комутатори с произволна дължина. Независимо и по същото време двете теореми са доказани от Латишев [La3, La4]. Методът на Хигман се използва за доказване на шпехтовост и на многообразия над полета с положителна характеристика от Пламен Чирипов и Сидеров [CSi], Попов [Po3], Сидеров [Si2] и др.

Един от начините да се мери сложността на полиномните тъждества на една алгебра над поле с характеристика 0 е да се използват тъждествата в матричните алгебри. Алгебрата R е със *сложност* (или от *PI-степен*) n, ако n е най-голямото цяло число, за което $T(R) \subseteq T(M_n(K))$. Цикъл от статии на Татяна Гатева [G1, G2, G3, G4, G5] е посветен на поведението на сложността на полиномните тъждества относно тензорното произведение и други алгебрични операции. Гатева дава точни стойности или оценки. В последните две статии от цикъла [G4, G5] тя използва теорията на Кемер, за да даде точна формула за сложността на $R \otimes S$, изразена чрез сложността на R и S.

Изпозвайки представянията на симетричната група, Ананин и Кемер [AK] описват многообразията от асоциативни алгебри без единица над поле с характеристика 0, решетката от подмногообразия на които е дистрибутивна. Един от първите резултати в България, повлиян от [AK], е на Тонов [T3], който описва многообразията от алгебри с единица, решетката от подмногообразия на които образува верига. Впоследствие, след привличане на методи от представянията на пълната линейна група, за които ще стане въпрос в следващия параграф, тематиката за дистрибутивност на многообразията става особено популярна не само в България.

В началото на 80-те години на XX век у нас се засилва и интересът към тъждествата на алгебрите с инволюция. Доразвивайки идеите на Размислов за тъждествата в матриците от втори ред над поле с характеристика 0 [Ra2], Диана Левченко [L1] намира базиси на тъждествата с инволюция в $M_2(K)$, $\mathrm{char}(K) = 0$. Известно е, че е достатъчно да се изучават два типа инволюции в матричните алгебри – *транспонирането* и *симплектичната инволюция*, като вторият тип се появява само за матриците от четен ред. В случая на матрици от втори ред тези инволюции се задават съответно от равенствата

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Левченко показва, че в случая на транспониране тъждествата в $(M_2(K), t)$ следват от тези от степен ≤ 4, а в случая на симплектична инволюция – от тъждеството $[x + x^*, y] = 0$. Освен това Левченко [L2] решава окончателно въпроса за базиса на тъждествата в матричните алгебри от втори ред над крайно поле и с произволна инволюция в тях.

7. Българските методи в PI-алгебрите

Представянията на симетричната група S_n започват да се използват в теорията на PI-алгебрите през 1950 г. в работите на Шпехт [Sp] и Малцев [Ml]. Впоследствие те се превръщат в могъщ апарат за изследване, благодарение преди всичко на Регев. В много други области на математиката паралелно се използват и представянията на пълната линейна група $GL_d(K)$. Те се използват епизодично и в PI-алгебрите. Но едва през 1981-82 г. започва системното прилагане в теорията на PI-алгебрите над поле с характеристика 0 на представянията на $GL_d(K)$ едновременно с тези на S_n. Това става в три статии на Дренски [D5, D6, D7] и в статията на Берел [Ber]. Основната идея е, че цялата информация за полиномните тъждества, която може да се получи на езика на представянията на S_n, може да се извлече чрез представянията на $GL_d(K)$. Представянията на S_n изискват работа в $n!$-мерното пространство P_n на полилинейните елементи от степен n, а тези на $GL_d(K)$ – в (много по-малкото) d^n-мерно пространство на хомогенните полиноми от степен n в $K\langle x_1, \ldots, x_d\rangle$. Всичко това, заедно с по-компактното записване на тъждествата на d променливи, се оказва голямо предимство, поради което идеята става изключително популярна не само в България. При изучаване на тъждествата в крайномерни алгебри е достатъчно да се разглежда само случаят $d = \dim(R)$. За да обхванат и случая на алгебри, които не са крайно-породени, през 1983 г. Берел и Регев [BerR] доразвиват метода, като въвеждат използването и на представянията на общата суперлагебра на Ли. До края на параграфа ще предполагаме, че основното поле е с характеристика 0, освен ако не е указано противното.

Освен че се дават основите на метода, в статията [D5] се описват т.н. собствени полиноми на свободната алгебра по модул тъждествата в матричната алгебра $M_2(K)$ и лиевите полиноми по модул лиевите тъждества в $sl_2(K)$. Използвайки този резултат, в [D6] се дава минимален базис на тъждествата в $M_2(K)$. При това, за разлика от упростяването на базиса на Размислов, направен от други автори, в подхода на Дренски не се използва конкретният вид на тъждествата на Размислов, а само фактът, че този базис се състои от тъждества от степен 4,5 и 6.

Теорема 38. *Тъждествата*

$$s_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=0 \text{ и } [[x,y]^2,x]=0$$

пораждат T-идеала $T(M_2(K))$.

Друг основен резултат в [D5] е описанието на решетката от подмногообразия на многообразието от алгебри на Ли $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, определено от тъждествата

$$[[x_1,x_2],[x_3,x_4],[x_5,x_6]]=0 \text{ и } [[x_1,x_2,x_3],[x_4,x_5,x_6]]=0.$$

Тази решетка е *дистрибутивна.* Решетката на едно многообразие от алгебри $\mathfrak{W}$ е дистрибутивна, ако за произволни подмногообразия $\mathfrak{U}_1,\mathfrak{U}_2,\mathfrak{U}_3$ на $\mathfrak{W}$ се изпълняват дистрибутивните закони

$$(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2)\cup\mathfrak{U}_3=(\mathfrak{U}_1\cup\mathfrak{U}_3)\cap(\mathfrak{U}_2\cup\mathfrak{U}_3),$$

$$(\mathfrak{U}_1\cup\mathfrak{U}_2)\cap\mathfrak{U}_3=(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_3)\cup(\mathfrak{U}_2\cap\mathfrak{U}_3).$$

Идеята за използване на представянията на $GL_d(K)$ е възприета веднага от още няколко български математици. Попов [Po9] описва собствените полиноми на свободната алгебра по модул тъждествата на тензорното произведение $E\otimes_K E$ и намира базис на тъждествата в $E\otimes_K E$.

Теорема 39. *Тъждествата в алгебрата $E\otimes_K E$ следват от*

$$[[[x_1,x_2],[x_3,x_4]],x_5]=0 \text{ и } [[x,y]^2,x]=0.$$

Важността на алгебрата $E\otimes_K E$ се разбира още от работите на Кемер, предшестващи създаването на неговата теория. Тази алгебра заема особено място в тази теория, като най-малката T-първична алгебра, удовлетворяваща нематрично тъждество, и с достатъчно сложно устроен T-идеал. Впоследствие Попов [Po6] описва структурата на T-идеала, породен от централно-метабелевото тъждество $[[[x_1,x_2],[x_3,x_4]],x_5]=0$ и доказва неговата шпехтовост, т.е. крайната базируемост на всеки T-идеал, който го съдържа. (Това става малко преди Кемер да даде общото решение на проблема на Шпехт.)

В няколко свои работи Атанаска Стоянова-Венкова [SV1, SV2, SV3] дава пълно описание на решетките от подмногообразията от алгебри с единица на многообразията, определени съответно от тъждествата

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = 0 \text{ и } [x_1, x_2, x_3][x_4, x_5] = 0.$$

Любов Владимирова и Дренски [VD] дават описание на многообразията от асоциативни алгебри без единица, които удовлетворяват тъждество от трета степен. Впоследствие Владимирова [V] получава доста подробна информация на езика на коразмерностите и за многообразията от алгебри без единица, които удовлетворяват нематрично тъждество от четвърта степен. Съвсем неотдавна Ла Матина [LM] получи асимптотичното описание на подмногообразията на едно от най-важните от тези многообразия, това определено от тъждеството $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$ на триъгълните матрици от втори ред. Ще отбележим, че един Т-идеал $T(R)$ е с полиномен ръст на редицата от коразмерности тогава и само тогава, когато не се съдържа в Т-идеалите $T(U_2(K))$ и $T(E)$, което е една от причините за интереса към тъждествата на $U_2(K)$ и E.

Завършвайки българския цикъл от изследвания на решетките от многообразия, Попов, сам и съвместно с Поля Чекова и Русалин Николаев [PoC1, Po5, PoN, PoC2] описва напълно многообразията от асоциативни алгебри с единица с дистрибутивна решетка на подмногообразията. За алгебри без единица Ананин и Кемер [AK] доказват, че решетката от подмногообразия е дистрибутивна тогава и само тогава, когато многообразието удовлетворява тъждество от вида $\alpha[x, y]x+\beta x[x, y] = 0$, $\alpha, \beta \in K$. В случая на алгебри с единица резултатите изглеждат много по-сложно. Многообразието трябва да удовлетворява четири тъждества $\alpha_i f_i + \beta_i g_i = 0$ за подходящи полиноми $f_i, g_i \in K\langle X\rangle$ и константи $\alpha_i, \beta_i \in K$, $i = 1, 2, 3, 4$. Списъкът на тези многобразия включва такива важни и трудни за изследване многообразия като това на матриците от втори ред и на тензорния квадрат на грасмановата алгебра.

Следващият голям цикъл от резултати е свързан с полиномните тъждества, централните полиноми и инвариантите в матричните алгебри от произволен ред. Най-напред, доразвивайки идеята на Шпехт [Sp], че е достатъчно да се изучават само собствените полиномни тъждества, Дренски [D8] показва, че всички числови инварианти (коразмерности, т.н. кратности на кохарактерите и редове на Хилберт на относително свободните алгебри) могат да се изразят чрез съответните инварианти на собствените тъждества. Това позволява [D8] да се намери редът на Хилберт на алгебрата $K\langle x_1, \dots, x_d\rangle/(K\langle x_1, \dots, x_d\rangle \cap T(M_2(K)))$. (Редът на Хилберт на една градуирана алгебра е формален степенен ред, чиито коефициенти дават размерностите на хомогенните компоненти от съответна степен.) Същият резултат е получен независимо и по същото време от Прочези [Pr3] и Форманек [F3], които са едни от най-изтъкнатите специалисти в областта. Интересно е да се отбележи, че трите статии [Pr3, F3, D8] се появяват през 1984 г. в едно и също списание (J. Algebra), а трите доказателства използват съвършенно различни идеи.

Съгласно описанието на базиса на тъждествата в матриците от втори ред, дадено от Размислов и Дренски, тъждествата в асоциативната алгебра $M_2(K)$ и лиевата алгебра $sl_2(K)$ следват от тъждества на четири променливи. В серия от статии Николаев [N1, N2, N3, N5] описва тъждествата на две и три променливи в тези алгебри.

Теорема 40. (а) *Тъждествата на две и три променливи в алгебрата* $M_2(K)$ *следват съответно от тъждеството на Вагнер – Хол на две букви*

$$[[x,y]^2,x]=0$$

и от тъждеството на Вагнер – Хол и на Размислов

$$[[x,y]^2,z]=0 \text{ и } [[x,y],[x,z],x]=0.$$

(б) *Тъждествата на две и три променливи в лиевата алгебра* $sl_2(K)$ *следват съответно от тъждеството от шеста степен*

$$[[x,y,x,x],[x,y]]=0$$

и от тъждеството на Размислов

$$[[x,y],[x,z],x]=0.$$

Освен това, в [N1] Николаев намира система от пораждащи на $T(M_2(K))\cap K\langle x,y\rangle$ като обикновен идеал. До същия резултат стига и Ли [Li]. Накрая, в [N4] Николаев описва структурата на Т-идеала, породен от тъждеството на Вагнер – Хол и доказва крайната базируемост на Т-идеалите, които съдържат това тъждество (също малко преди Кемер да реши окончателно проблема на Шпехт).

Дренски и Азнив Каспарян [DK1] намират количествена оценка на тъждествата в $M_n(K)$, описани в известния препринт на Бъргман [Bg] от 1981 г. Това са т.н. *тъждества от Бъргманов тип*, които се характеризират с това, че са на $n+1$ променливи и са от първа степен относно n от променливите. След това Дренски и Каспарян [DK2] разработват специална методика за работа с полиномните тъждества от дадена степен в матриците от фиксиран ред. Като приложение, те показват, че *всички тъждества от осма степен в матричната алгебра от трети ред* $M_3(K)$ *следват от стандартното тъждество от шеста степен* $s_6=0$. Тези пресмятания са извършени на ръка през 1983 г. За мощността на разработените методи говори фактът, че компютърните програми, създадени от други автори (от Бондари [Bo] през 1997 г. и от Вишне [Vi] през 2002 г.) позволяват да се проверят резултатите от [DK2], но не и да се отиде по-далеч (например да се опишат тъждествата от девета степен). Съвсем изненадващо, в [DK3] Дренски и Каспарян намират нов централен полином от осма степен за матричната алгебра от трети ред и показват, че $M_3(K)$ няма централни полиноми от седма степен, с което опровергават красивата хипотеза, че минималната степен на централните полиноми за матриците от n-ти ред е n^2. След това Форманек [F2] изказва нова хипотеза, която, въпреки че не е толкова елегантна, се съгласува с други хипотези в теорията на PI-алгебрите.

Хипотеза 41. *Минималната степен на централните полиноми за матриците от n-ти ред е $(n^2+3n-2)/2$.*

През 1993 г. Дренски и Цецка Рашкова [DR] започват създаването на компютърни програми за работа с полиномни тъждества в матричните алгебри. Те намират т.н. *слаби тъждества* от шеста степен в $M_3(K)$. Слабите тъждества за $M_n(K)$ са полиноми в $K\langle X\rangle$, които не са тъждества в $M_n(K)$, но се анулират върху алгебрата на Ли $sl_n(K)$ от матриците с нулева следа. Те са въведени от Размислов [Ra1, Ra2] и са в основата на неговия метод за намиране на централни полиноми за $M_n(K)$ и в описанието на базиса на тъждествата на $M_2(K)$. Едно от слабите тъждества в [DR] обяснява наличието на централен полином от осма степен в $M_3(K)$. Дренски и Пиачентини Катанео [DPC] доразработват програмите от [DR] и намират *централен полином от* 13*-та степен за матриците от четвърти ред.* Този резултат се съгласува с хипотезата на Форманек, но и до днес не е ясно дали $M_4(K)$ няма централни полиноми от по-ниска степен. Резултатите от [DR, DPC] дават достатъчно "експериментален материал" и позволяват на Дренски [D9] да намери *централни полиноми от степен $(n-1)^2+4$ за матриците от n-ти ред.* За $n=3,4$ степента съвпада с предсказаната от Форманек, но за по-големи n е по-висока от нея (но това все още са единствените централни полиноми от степен $< n^2$).

Разработването на компютърни методи за изследване на тъждествата в матричните алгебри продължават в работата на Бенанти, Демел, Дренски и Пламен Коев [BDDK]. Те намират *всички тъждества от степен $2n+2$ за $M_n(K)$ при $n=4,5$* и показват, че те *следват от стандартното тъждество от степен $2n$.* За получаване на резултата компютърните пресмятания се комбинират с чисто теоретични изследвания. Съществено се използва полученото преди това описание от Бенанти и Дренски [BD] на следствията от степен $k+2$ на стандартното тъждество от степен k. Ако се работи с полилинейните тъждества и с представянията на симетричната група, задачата за намирането на тъждествата от 12-та степен за матриците от пети ред би изисквала точното решаване на една хомогенна линейна система с $12! = 479\ 001\ 600$ неизвестни и $5^2 \times (5^2)^{12} \approx 1.49 \cdot 10^{18}$ уравнения. При това, броят на независимите решения на системата е само 8 491. Въпреки, че повечето от уравненията са тривиални, броят на неизвестните и уравненията, от които наистина имаме нужда (поне $c_{12}(M_5(K)) = 12! - 8\ 491$) е твърде голям и непосилен за съвременните компютри. Вместо това, следвайки принципа на древните римляни *Divide et impera!* (*Разделяй и владей!*), в [BDDK] се използват представянията на $GL_d(K)$. Това позволява задачата да се разбие на 77 линейни системи с не-повече от 7 700 неизвестни всяка. Използването на 64 процесора на един от най-мощните компютри по това време, Cray T3E на лабораторията Лорънс в Бъркли, позволява за около 8 часа да се намерят всички тъждества от 12-та степен за $M_5(K)$. Използването на цялата известна от теорията информация за матричните тъждества би свела пресмятанията до решаването на 33 системи с не-повече от 5 775 неизвестни всяка, а необходимото време до два часа. (Пресмятанията за останалите 6 часа позволяват сравняване на компютърните с вече известните резултати, което служи за тест за коректността на програмите.)

Продължавайки темата с матричните тъждества, ще споменем проблема на Прочези [Pr2]: *Ако K е безкрайно поле с положителна характеристика p, вярно ли е, че всички полиномни тъждества в алгебрата $M_n(K)$ следват от тъждествата в матричния пръстен $M_n(\mathbb{Z})$ и от тъждеството $px = 0$.* За матриците от втори ред над поле с характеристика 2 отрицателен отговор е даден от Шелтер [Sch], който намира контрапример, който е тъждество от шеста степен. Дренски и Димитър Циганчев [DT] намират подобно тъждество от пета степен. Накрая Тихомир Аспарухов, Дренски, Коев и Циганчев [ADKT] решават окончателно въпроса на Прочези за матриците от втори ред. Единственият случай, когато имаме ново тъждество е за $p = 2$, като новите тъждества са на пет и повече променливи.

Единствените резултати върху проблема на Прочези за матриците от по-висок ред са получени неотдавна от Кемер [Ke6] и от Кемер и Аверянов [KA]. В [Ke6] се доказва, че за всяко $p \geq 2$ съществува $n \leq p$ такова, че тъждествата в $M_n(K)$ над безкрайно поле K с характеристика p не следват от тези в $M_n(\mathbb{Z})$. От друга страна [KA], за $p > 3$ всички тъждества в $M_3(K)$ следват от тези в $M_3(\mathbb{Z})$.

Резултатите за базиса на тъждествата на матриците от втори ред над поле с нулева характеристика имат естествено продължение над безкрайно поле с нечетна характеристика p. През 2001 г. Пламен Кошлуков [K1] намира базис от 4 тъждества. Когато $p > 5$, този базис се редуцира до две тъждества. Окончателният отговор е намерен през 2004 г. от Коломбо и Кошлуков [CK1].

Теорема 42. *Тъждествата в матричната алгебра $M_2(K)$ над безкрайно поле K с положителна характеристика $p > 3$ следват от стандартното тъждество от четвърта степен*

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

и полилинейния вариант на тъждеството на Вагнер – Хол

$$[[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5] = 0.$$

При $p = 3$ за получаване на базиса към тези тъждества се добавя едно допълнително тъждество.

За доказателството на тази теорема се налага привличане на разнообразни методи, включително независещия от характеристиката на полето подход към класическата теория на инвариантите, разработен от Де Кончини и Прочези [DCP]. Същата техника се използва от Коломбо и Кошлуков [CK2] и за намиране на базиса на тъждествата с инволюция в $M_2(K)$ над безкрайно поле K с нечетна характеристика. Кошлуков, сам и със съавтори [AFK, BK, MK] получава редица други резултати над безкрайни полета с положителна характеристика – за съвпадението (и несъвпадението) на тъждествата в T-първични алгебри, очертавайки различията със случая на нулева характеристика, за тъждества с инволюция и градуирани тъждества.

Както вече споменахме, теорията на тъждествата на матричните алгебри е тясно свързана с теорията на матричните инварианти и на алгебрите на общите матрици и техните следи. Един от основните проблеми в алгебричната теория на инвариантите е да се намерят пораждащите и определящите съотношения на алгебрата на инвариантите $K[x_1, \ldots, x_d]^G$ под действието на линейната група G. Теоретичните и компютърни методи, разработени за изучаването на тъждествата в $M_n(K)$ са доразвити в серия от статии, започваща с резултата на Дренски и Кошлуков [DKo1], Домокош и Дренски [DD] и Дренски [D10] за определящите съотношения на комутативната и некомутативната алгебри на инвариантите на матриците от втори ред. Те продължават с неотдавнашните резултати на Аслаксен, Дренски и Лилия Садикова [ADS] и Дренски и Садикова [DS] за определящите съотношения на инвариантите на две матрици от трети ред и пораждащите на алгебрата на инвариантите на две матрици от четвърти ред, и с резултатите на Дренски и Генов [DG1, DG2] и Дренски, Генов и Валенти [DGV] за кратностите на неприводимите представяния на $GL_2(K)$ в комутативната и некомутативната алгебри на инвариантите на две матрици от трети и четвърти ред. Подробности могат да се намерят в книгата на Дренски и Форманек [DF], а за компютърния подход – в обзора на Дренски [D11].

Само ще споменем още няколко теми, разработвани в България. Това са изучаването на автоморфизмите на относително свободните алгебри (вж. обзора на Дренски [D12] и статията на Дренски и Димитър Стефанов [DSt]), некомутативна теория на инвариантите (на линейни групи, действащи върху относително свободни алгебри), вж. обзора на Дренски [D13], поведението на размерността на Гелфанд-Кирилов и на другите числови инварианти на PI-алгебрите в зависимост от полиномните тъждества, които удовлетворяват (вж. дипломната работа на Мартин Касабов [Ka]), връзката на тези числови инварианти с теоремата на Ширшов за височината (вж. дипломната работа на Аспарухов [A]).

При наличие на допълнителна структура на една алгебра е естествено да се изучават тъждествата, които отчитат тази структура, както е в случая на алгебри с инволюция. В последните години основните резултати в България в това направление са получени от Цецка Рашкова, която изучава тъждествата и централните полиноми с инволюция в матричните алгебри с инволюция, както и тъждествата със суперинволюция, като комбинира чисто теоретични методи с компютърни пресмятания. Без да влизаме в подробности, ще насочим читателя към нейните обзор [Rsh1] и статия [Rsh2], които дават достатъчно пълна представа за изследванията в това направление.

Попов [Po7] изучава $\mathbb{Z}_2$-градуираните тъждества от Капели и анти-Капели тип на T-първичната алгебра $M_n(E)$, което му позволява да получи количествена информация за кохарактерите на обикновените тъждества на тази алгебра. В [Po8] той прилага $\mathbb{Z}_2$-градуираните тъждества за получаване на подобна информация за произведението на T-идеали. Градуирани тъждества относно градуиране с произволна група в матричните алгебри са изучавани от Бахтурин и Дренски [BaD], а в алгебрата на горно-триъгълните матрици – от Ди Винченцо, Кошлуков и Валенти вж. обзора им [DVKV].

Тъй като голяма част от комбинаторните методи за изучаване на PI-алгебрите не използват структурната теория, те с успех могат да се прилагат за изучаване на други алгебри, като лиеви, йорданови, алгебри на Лайбниц и др. Ще се спрем накратко на някои резултати, получени в България за йорданови алгебри.

Една комутативна (но необезателно асоциативна) алгебра J е *йорданова*, ако удовлетворява тъждеството

$$(yx)(xx) = (y(xx))x.$$

(С други думи, операциите на умножение с x и с x^2 комутират.) Типичен пример за йорданова алгебра е алгебрата $R^{(+)}$, която се получава от асоциативната алгебра R относно новата операция $a \circ b = ab + ba$, $a, b \in R$. За разлика от алгебрите на Ли, не всяка йорданова алгебра се получава като подлагебра на подходяща алгебра $R^{(+)}$. Йордановите алгебри са въведени от Йордан през 1933 г. в неговата статия, посветена на аксиоматичната обосновка на квантовата механика. Те имат богата структурна теория и се считат за *алгебри, близки до асоциативните*, вж. книгата [ZhSSS]. Крайномерните прости йорданови алгебри са описани и са групирани в няколко серии. Една от сериите се състои от линейни пространства с неизродена симетрична билинейна форма, към които е добавена единица. В няколко статии Дренски и Кошлуков [D15, D16, D14, K2, K3, DKo2] дават описание на числовите инварианти на многообразията от йорданови алгебри, породени от тези прости алгебри и на техните подмногообразия, както и пълен списък на подмногообразията. Приблизително по същото време Дренски и Рашкова [DR2] описват многообразията от йорданови алгебри, удовлетворяващи *метабелевото* тъждество $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$.

Заключение

Проблемите, които се решават от българската PI-група винаги са били сред най-актуалните за теорията в съответния момент и още в средата на 70-те години на XX век се говори за Българска школа в теорията на PI-алгебрите. Методите, разработени в България, са широко прилагани от други математици. Българската PI-група е в тясно сътрудничество с водещите алгебрични школи в областта. Много от българските резултати в последните 15-20 години са получени съвместно с известни чужди математици. В чужбина са защитени няколко дисертации и дипломни работи с непосредствено българско ръководство, други дипломни работи са посветени на български резултати, включително в центрове, с които българската група не поддържа научни контакти (последният пример е дипломната работа на Хоге [Ho] от 2006 г.). Двете монографии [D1] и [DF] са сред настолните книги на специалистите по PI-алгебри.

Литература

[AK] А.З. Ананьин, А.Р. Кемер, Многообразия ассоциативных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны, Сиб. мат. ж. **17** (1976) No. 4, 723-730.

[A] Т.З. Аспарухов, Теоремата на Ширшов и размерност на Гелфанд-Кирилов на крайнопородени PI-алгебри, Дипломна работа, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски", София, 1995.

[BO] Ю.А. Бахтурин, А.Ю. Ольшанский, Тождественные соотношения в конечных кольцах Ли, Мат. сб. **96** (1975), 543-559.

[Be] А.Я. Белов, О нешпехтовых многообразиях, Фундамент. и прикл. матем. **5** (1999), No. 1, 47-66.

[V] Л.А. Владимирова, Коразмерности Т-идеалов, содержащих тождество четвертой степени, Сердика **14** (1988), 82-94.

[VD] Л.А. Владимирова, В.С. Дренски, Многообразия ассоциативны алгебр с тождеством третьей степени, Плиска Бълг. мат. студии **8** (1986), 144-157.

[Ga1] М. Гаврилов, Върху тъждествените сьотношения в пълната матрична алгебра, Годишник на СУ, Матем. факултет **59** (1966), 45-48.

[Ga2] М.Б. Гаврилов, О многообразиях ассоциативных алгебр, Докл. БАН **21** (1968), No. 10, 989-992.

[Ga3] М.Б. Гаврилов, О Т-идеалах с элементом $[[x_1,x_2],x_3[x_4,x_5]]$, Докл. БАН **21** (1968), No. 11, 1153-1156.

[Ga4] М.Б. Гаврилов, О некоторых Т-идеалах в свободной ассоциативной алгебре, Алгебра и логика **8** (1969), No. 2, 172-175.

[Ga5] М. Гаврилов, Върху Т-идеалите, съдържащи елемента $[[x_1,x_2,x_3],x_4[x_5,x_6]]$, Известия на Матем. институт на БАН **11** (1970), 269-271.

[GDT] М.Б. Гаврилов, Л.И. Давидов, И.К. Тонов, Няколко бележки върху PI-алгебрите, Годишник на СУ, Матем. факултет **64** (1971), 277-292.

[G1] Т.В. Гатева, О сложности многообразия, порожденного тензорным произведением алгебр, Вестник Моск. Унив. сер. I, мат. мех. (1980), No. 2, 47-50.

[G2] Т.В. Гатева, Сложность произведения многообразий ассоциативных алгебр, УМН **36** (1981), No. 1, 203-204.

[G3] Т.В. Гатева, Оценка сложности многообразия, порожденного тензорным произведением алгебр, Докл. БАН 35 (1982), 1623-1626.

[Ge1] Г.К. Генов, О вербальных идеалах свободных алгебр Ли, Годишник на СУ, Матем. факултет **66** (1974), 177-189.

[Ge2] Г.К. Генов, Многообразия от алгебри на Ли, Матем. и матем. образование, Доклади на Трета пролетна конференция на Бълг. мат. дружество, Бургас, 2-4 април 1974, София, Изд. БАН, 1976, 135-138.

[Ge3] Г.К. Генов, О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль, Докл. БАН **29** (1976), 937-941.

[Ge6] Г.К. Генов, Локально конечные многообразия алгебр, Матем. и матем. образование, Доклади на Четвърта пролетна конференция на Бълг. мат. дружество, Перник, 2-4 април 1975, София, Изд. БАН, 1978, 73-90.

[Ge4] Г.К. Генов, Некоторые шпехтовые многообразия ассоциативных алгебр, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 30-40.

[Ge5] Г.К. Генов, Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем, Алгебра и логика **20** (1981), No. 4, 365-388.

[GS] Г.К. Генов, П.Н. Сидеров, Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем, 1, 2, Сердика **8** (1982), 313-323, 351-366.

[GT] Г.К. Генов, И.К. Тонов, Многообразия от асоциативни алгебри на, Матем. и матем. образование, Доклади на Втора пролетна конференция на Бълг. мат. дружество, Видин, 6-8 април 1973, София, Изд. БАН, 1974, 87-90.

[Gr] А.В. Гришин, Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в харакеристике 2, Фундамент. и прикл. матем. **5** (1999), No. 1, 101-118.

[D3] В.С. Дренски, О тождествах в алгебрах Ли, Алгебра и логика **13** (1974), 265-290.

[D4] В.С. Дренски, Тождества в матричных алгебрах Ли, Тр. Семинара им. И.Г. Петровского **6** (1981), 47-55.

[D5] В.С. Дренски, Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр, Мат. сб. **115** (1981), 98-115.

[D6] В.С. Дренски, Минимальный базис тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики 0, Алгебра и логика **20** (1981), 282-290.

[D7] В.С. Дренски, О решетках многообразий ассоциативных алгебр, Сердика **8** (1982), 20-31.

[D2] В. Дренски, Экстремалные многообразия алгебр, I, II, Сердика **13** (1987), 320-332; **14** (1988), 20-27.

[ZhSSS] К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов, Кольца, близкие к ассоциативным, Москва, “Наука”, 1978.

[Ka] М.Д. Касабов, Нематрични многообразия от алгебри, Дипломна работа, ФМИ, СУ “Св. Климент Охридски”, София, 1998.

[Ke1] А.Р. Кемер, Тождества Капелли и нильпотентность радикала конечно-порожденной PI-алгебры, Докл. АН СССР **255** (1980), No. 4, 793-797.

[Ke2] А.Р. Кемер, Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры, Изв. АН СССР, Сер. мат. **48** (1984), No. 5, 1042-1059.

[Ke3] А.Р. Кемер, Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр, Алгебра и логика **26** (1987), No. 5, 597-641.

[Ke4] А.Р. Кемер, Представимость приведенно-свободных алгебр, Алгебра и логика **27** (1988), No. 3, 274-294.

[Kra] А.Н. Красильников, Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр Ли, Вестник Моск. Унив. сер. I, мат. мех. (1982), No. 2, 34-38.

[Ku] А.Г. Курош, Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах, Изв. АН СССР, Сер. мат. **5** (1941), 233-240.

[La2] В.Н. Латышев, О выборе базы в одном T-идеале, Сиб. мат. ж. **4** (1963), 1122-1127.

[La1] В.Н. Латышев, К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр, УМН **27** (1972), No. 4, 213-214.

[La3] В.Н. Латышев, Частично упорядаченные множества и нематричные тождества ассоциативных алгебр, Алгебра и логика **15** (1976), 53-70.

[La4] В.Н. Латышев, Конечная базируемость некоторых колец, УМН **32** (1977), No. 4, 259-260.

[L1] Д.В. Левченко, Конечная базируемость тождеств с инволюцией матричной алгебры второго порядка, Сердика **8** (1982), 42-56.

[L2] Д.В. Левченко, Базисы тождеств с инволюцией матричных алгебр второго порядка над конечными полями, Сердика **10** (1984), 55-67.

[Lv] И.В. Львов, О многообразиях ассоциативных колец I, II, Алгебра и логика **12** (1973), No. 3, 269-297, No. 6, 667-688.

[Ml] А.И. Мальцев, Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, Мат. сб. **26** (1950), No. 1, 19-33.

[Ma] Ю.Н. Мальцев, Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц, Алгебра и логика **10** (1971), 393-401.

[MaK] Ю.Н. Мальцев, Е.Н. Кузьмин, Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем, Алгебра и логика **17** (1978), 28-32.

[N1] Р.С. Николаев, Тождества от двух переменных в матричной алгебре второго порядка над полем характеристики нуль, Сердика **10** (1984), 11-18.

[N2] Р.С. Николаев, Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики нуль, Плиска Бълг. мат. студии **8** (1986), 65-76.

[N3] Р.С. Николаев, Тождества от трех переменных в матричной алгебре второго порядка над полем характеристики нуль, Плиска Бълг. мат. студии **8** (1986), 122-135.

[N4] Р.С. Николаев, Структура T-идеала, порожденного тождеством Холла от трех переменных, I, II, Сердика **13** (1987), 258-266, 361-365.

[N5] Р.С. Николаев, Тождества от трех переменных в алгебре Ли $sl(2, K)$ над полем характеристики нуль, Сердика **14** (1988), 28-33.

[Po4] А.П. Попов, О группоиде многообразий ассоциативных алгебр, Докл. БАН **30** (1977), 951-953.

[Po1] А.П. Попов, О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 41-53.

[Po2] А.П. Попов, Некоторые свойства умножения многообразий ассоциативных алгебр, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 95-98.

[Po9] А.П. Попов, Тождества тензорного квадрата алгебры Грассмана, Алгебра и логика **21** (1982), 442-471.

[Po5] А.П. Попов, Многообразия ассоциативных алгебр с единицей, у которых решетка подмногообразий дистрибутивна, I, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **79** (1989), 223-244.

[PoN] А.П. Попов, Р.С. Николаев, Многообразия ассоциативных алгебр с единицей, у которых решетка подмногообразий дистрибутивна, II, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **80** (1991), 15-23.

[PoC1] А.П. Попов, П. Чекова, Многообразия ассоциативных алгебр с единицей, решетка подмногообразий которых дистрибутивна, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **77** (1988), 205-222.

[PoC2] А.П. Попов, П. Чекова, Некоторые дистрибутивные решетки унитарных многообразий ассоциативных алгебр, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **81** (1994), 243-260.

[Ra1] Ю.П. Размыслов, Об одной проблеме Капланского, Изв. АН СССР, Сер. мат. **37** (1973), 483-501.

[Ra2] Ю.П. Размыслов, О конечной базируемости тождеств полной матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль, Алгебра и логика **12** (1973), No. 1, 83-113.

[Ra3] Ю.П. Размыслов, О радикале Джекобсона в PI-алгебрах, Алгебра и логика **13** (1974), No. 3, 337-360.

[Ra4] Ю.П. Размыслов, Тождества алгебр и их представлений, Москва, "Наука", 1989.

[Si1] П.Н. Сидеров, Базис тождеств алгебры треугольных матриц над произвольным полем, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 143-152.

[Si2] П.Н. Сидеров, Specht property of the variety of associative algebras defined by the product of three commutators of arbitrary length, Сердика **8** (1982), 35-41.

[ST] И.С. Стоянов, И.К. Тонов, Объединение и произведение многообразий ассоциативных алгебр, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 130-133.

[SV1] А.Н. Стоянова-Венкова, Решетка многообразия ассоциативных алгебр, определенного коммутатором длины пять, Докл. БАН **34** (1981), 465-467.

[SV2] А.Н. Стоянова-Венкова, Некоторые решетки многообразий ассоциативных алгебр, определенные тождествами пятой степени, Докл. БАН **35** (1982), 865-868.

[SV3] А.Н. Стоянова-Венкова, Решетка на многообразията от асоциативни алгебри, определени от комутатора с дължина пет, Научни тр. Пловдивски унив., Мат. **22** (1984), No. 1, 13-44.

[T1] И.К. Тонов, Върху умножението на многообразия от асоциативни алгебри, Известия на Матем. институт на БАН **15** (1974), 301-305.

[T2] И.К. Тонов, Некоторые свойства произведений многообразий ассоциативных алгебр, Сердика **7** (1981), 34-41.

[T3] И.К. Тонов, Цепные многообразия ассоциативных алгебр с единицей, Сердика **7** (1981), 250-257.

[T4] И.К. Тонов, Почти слабо нетеровы многообразия ассоциативных алгебр с единицей, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 162-166.

[CSi] П.Ж. Чирипов, П.Н. Сидеров, О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр, Плиска Бълг. мат. студии **2** (1981), 103-115.

[Sh] А.И. Ширшов, О кольцах с тождественными соотношениями, Мат. сб. **43** (1957), 277-283.

[Shch] В.В. Щиголев, Примеры бесконечно базируемых T-идеалов, Фундамент. и прикл. матем. **5** (1999), No. 1, 307-312.

[A1] S. A. Amitsur, The T-ideals of the free ring, J. London Math. Soc. **30** (1955), 470-475.

[A2] S.A. Amitsur, Polynomial identities, Israel J. Math. **19** (1974), Nos. 1-2, 183-199.

[ALe] S.A. Amitsur, J. Levitzki, Minimal identities for algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449-463.

[ADS] H. Aslaksen, V. Drensky, L. Sadikova, Defining relations of invariants of two 3×3 matrices, J. Algebra **298** (2006), 41-57

[ADKT] T. Asparouhov, V. Drensky, P. Koev, D. Tsiganchev, Generic 2×2 matrices in positive characteristic, J. Algebra **225** (2000), 451-486.

[AFK] S.S. Azevedo, M. Fidelis, P. Koshlukov, Graded identities and PI equivalence of algebras in positive characteristic, Comm. Algebra **33** (2005), 1011-1022.

[BaD] Yu. Bahturin, V. Drensky, Graded polynomial identities of matrices, Linear Algebra and its Appl. **357** (2002), 15-34.

[BD] F. Benanti, V. Drensky, On the consequences of the standard polynomial, Comm. Algebra **26** (1998), 4243-4275.

[BDDK] F. Benanti, J. Demmel, V. Drensky, P. Koev, Computational approach to polynomial identities of matrices – a survey, in "Ring Theory: Polynomial Identities and Combinatorial Methods, Proc. of the Conf. in Pantelleria"; Eds. A. Giambruno, A. Regev, and M. Zaicev, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **235**, Dekker, 2003, 141-178.

[Ber] A. Berele, Homogeneous polynomial identities, Israel J. Math. **42** (1982), 258-272.

[BerR] A. Berele, A. Regev, Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras, J. Algebra **82** (1983), 559-567.

[Bg] G.M. Bergman, Wild automorphisms of free P.I. algebras, and some new identities, preprint.

[Bo] S. Bondari, Constructing the polynomial identities and central identities of degree < 9 of 3×3 matrices, Lin. Algebra Appl. **258** (1997), 233-249.

[BK] A.P. Brandão, P. Koshlukov, Central polynomials for $\mathbb{Z}_2$-graded algebras and for algebras with involution, J. Pure Appl. Algebra **208** (2007), 877-886.

[Br] A. Braun, The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring, J. Algebra **89** (1984), 375-396.

[Bui] T.T. Bui, On the basis of the identities of the matrix algebra of second order over a field of characteristic zero, Сердика **7** (1981), 187-194.

[Bu] W. Burnside, On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, Quart. J. Math. **33** (1902), 230-238.

[CK1] J. Colombo, P. Koshlukov, Central polynomials in the matrix algebra of order two, Linear Algebra Appl. **377**, (2004) 53-67.

[CK2] J. Colombo, P. Koshlukov, Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p, Isr. J. Math. **146** (2005), 337-355.

[DCP] C. De Concini, C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. Math. **21** (1976), 330-354.

[De] M. Dehn, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Ann. **85** (1922), 184-194.

[DVKV] O.M. Di Vincenzo, P. Koshlukov, A. Valenti, Gradings and graded identities for the upper triangular matrices over an infinite field, Eds. A. Giambruno, et al., Groups, Rings and Group Rings. Proceedings of the Conference, Ubatuba, Brazil, July 26–31, 2004. In honor of the 60th birthday of Prof. César Polcino Milies, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **248**, 91-103.

[DD] M. Domokos, V. Drensky, Gröbner bases for the rings of invariants of special orthogonal ans 2×2 matrix invariants, J. Algebra **243** (2001), 706-716.

[D15] V. Drensky, Polynomial identities in simple Jordan algebras, Докл. БАН **35** (1982), 1327-1330.

[D16] V. Drensky, On the identities of the three-dimensional simple Jordan algebra, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **78** (1984), 53-67.

[D8] V. Drensky, Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras, J. Algebra **91** (1984), 1-17.

[D14] V. Drensky, Polynomial identities for the Jordan algebra of a symmetric bilinear form, J.Algebra **108** (1987), 66-87.

[D12] V. Drensky, Endomorphisms and automorphisms of relatively free algebras, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **31** (1993), 97-132.

[D9] V. Drensky, New central polynomials for the matrix algebra, Israel J. Math. **92** (1995), 235-248.

[D13] V. Drensky, Commutative and noncommutative invariant theory, Матем. и матем. образование, Доклади на 24-та пролетна конференция на СМБ, Свищов, 4-7 април 1995, София, Изд. БАН, 1995, 14-50.

[D1] V. Drensky, Free Algebras and PI-Algebras, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-Singapore, 1999.

[D10] V. Drensky, Defining relations for the algebra of invariants of 2×2 matrices, Algebras and Representation Theory **6** (2003), No. 2, 193-214.

[D11] V. Drensky, Computing with matrix invariants, Math. Balk., New Ser. **21** (2007), Nos. 1-2, 101-132.

[DF] V. Drensky, E. Formanek, Polynomial Identity Rings, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel-Boston, 2004.

[DG1] V. Drensky, G.K. Genov, Multiplicities of Schur functions in invariants of two 3×3 matrices, J. Algebra **264** (2003), No. 2, 496-519.

[DG2] V. Drensky, G.K. Genov, Multiplicities in the trace cocharacter sequence of two 4×4 matrices, Mediterr. J. Math. **2** (2005), 231-241.

[DGV] V. Drensky, G.K. Genov, A. Valenti, Multiplicities in the mixed trace cocharacter sequence of two 3×3 matrices, International J. Algebra and Computations **16** (2006), No. 2, 275-285.

[DK1] V. Drensky, A. Kasparian, Some polynomial identities of matrix algebras, Докл. БАН **36** (1983), 565-568.

[DK2] V. Drensky, A. Kasparian, Polynomial identities of eighth degree for 3×3 matrices, Годишник на СУ, Фак. мат. и мех., Книга I, матем. **77** (1983), 175-195.

[DK3] V. Drensky, A. Kasparian, A new central polynomial for 3×3 matrices, Comm. Algebra **13** (1985), 745-752.

[DKo1] V. Drensky, P.E. Koshlukov, Weak polynomial identities for a vector space with a symmetric bilinear form, Матем. и матем. образование, Доклади на 16-та пролетна конференция на СМБ, Слънчев бряг, 6-10 април 1987, София, Изд. БАН, 1987, 213-219.

[DKo2] V. Drensky, P.Koshlukov, Polynomial identities of Jordan algebras of degree two, J. Indian Math.Soc. 55 (1990), 1-30.

[DPC] V. Drensky, G.M. Piacentini Cattaneo, A central polynomial of low degree for 4×4 matrices, J. Algebra **168** (1994), 469-478.

[DR2] V. Drensky, Ts.G. Rashkova, Varieties of metabelian Jordan algebras, Сердика **15** (1989), 293-301.

[DR] V. Drensky, Ts.G. Rashkova, Weak polynomial identities for the matrix algebras, Comm. Algebra **21** (1993), 3779-3795.

[DS] V. Drensky, L. Sadikova, Generators of invariants of two 4×4 matrices, Долк. БАН **59** (2006), No. 5, 477-484.

[DSt] V. Drensky, D. Stefanov, Automorphisms of free nilpotent associative algebras, Math. Pannon. **9**/1 (1998), 71-90.

[DT] V. Drensky, D. Tsiganchev, New polynomial identities for 2×2 generic matrices in characteristic 2, J. Pure Appl. Algebra **133** (1998), 83-91.

[DI] J. Dubnov, V. Ivanov, Sur l'abaissement du degré des polynômes en affineurs, C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **41** (1943), 96-98 (see also MR **6** (1945), p. 113, Zbl. für Math. **60** (1957), p. 33).

[F1] E. Formanek, Central polynomials for matrix rings, J. Algebra **23** (1972), 129-132.

[F3] E. Formanek, Invariants and the ring of generic matrices, J. Algebra, **89** (1984), 178-223.

[F2] E. Formanek, The Polynomial Identities and Invariants of $n \times n$ Matrices, CBMS Regional Conf. Series in Math. **78**, Published for the Confer. Board of the Math. Sci. Washington DC, AMS, Providence RI, 1991.

[G4] T.V. Gateva, On the PI-degree of the tensor product of PI-algebras, Докл. БАН **36** (1983), 1367-1370.

[G5] T. Gateva, P.I. degree of tensor products of PI-algebras, J. Algebra **123** (1989), No. 1, 64-73.

[GZ1] A. Giambruno, M. Zaicev, On codimension growth of finitely generated associative algebras, Adv. Math. **140** (1998), No. 2, 145-155.

[GZ2] A. Giambruno, M. Zaicev, Exponential codimension growth of PI algebras: An exact estimate, Adv. Math. **142** (1999), No. 2, 221-243.

[GZ3] A. Giambruno, M. Zaicev, Minimal varieties of algebras of exponential growth, Adv. Math. **174** (2003), No. 2, 310-323.

[GZ4] A. Giambruno, M. Zaicev, Codimension growth and minimal superalgebras, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), No.12, 5091-5117.

[GZ5] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial Identities and Asymptotic Methods, Mathematical Surveys and Monographs **122**, MAS, Providence, RI, 2005.

[GK] C.K. Gupta, A. N. Krasilnikov, A simple example of a non-finitely based system of polynomial identities, Comm. Algebra **30** (2002), 4851-4866.

[Ha] M. Hall, Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 229-277.

[Hp] P. Halpin, Central and weak identities for matrices, Comm. Algebra **11** (1983), 2237-2248.

[Hi2] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras, Proc. London Math. Soc. **2** (1952), 326-336.

[Hi] G. Higman, On a conjecture of Nagata, Proc. Camb. Philos. Soc. **52** (1956), 1-4.

[Ho] T. Hoge, Ein darstellungstheoretischer Zugang zur simultanen Konjungation von Matrizen, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2006.

[J1] N. Jacobson, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Ann. of Math. (2) **46** (1945), 695-707.

[J2] N. Jacobson, PI-Algebras: An Introduction, Lecture Notes in Math. **441**, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1975.

[Jo] P. Jordan, Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl. I **41** (1933), 209-217.

[KBR] A. Kanel-Belov, L.H. Rowen, Computational Aspects of Polynomial Identities, Research Notes in Mathematics **9**, Wellesley, MA. A K Peters, 2005.

[Ka1] I. Kaplansky, On a problem of Kurosch and Jacobson, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 496-500.

[Ka2] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 575-580.

[Ka3] I. Kaplansky, Problems in the theory of rings revised, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 445-454.

[Ke5] A.R. Kemer, Ideals of Identities of Associative Algebras, Translations of Math. Monographs **87**, AMS, Providence, RI, 1991.

[Ke6] A. Kemer, On some problems in PI-theory in characteristic p connected with dividing by p, Eds. Y. Fong, et al., Proceedings of the 3rd International Algebra Conference, Tainan, Taiwan, June 16–July 1, 2002, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003, 53-66.

[KA] A. Kemer, I. Averyanov, Conjecture of Procesi for 2-generated algebra of generic 3×3 matrices, J. Algebra **299** (2006), 151-170.

[K2] P. Koshlukov, Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras, Comm. Algebra **16** (1988), 1325-1371.

[K3] P. Koshlukov, Rational Hilbert series of relatively free Jordan algebras, J. Algebra **121** (1989), 301-309.

[K1] P. Koshlukov, Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$, J. Algebra **241** (2001),410-434.

[KRe] D. Krakowski, A. Regev, The polynomial identities of the Grassmann algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973), 429-438.

[Kr] R. Kruse, Identities satisfied by a finite ring, J. Algebra **26** (1973), 298-318.

[LM] D. La Mattina, Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties, Manuscr. Math. **123** (2007), No. 2, 185-203.

[Lr] U. Leron, Multilinear identities of the matrix ring, Trans. Amer. Math. Soc. **183** (1973), 175-202.

[Le] J. Levitzki, On a problem of A. Kurosch, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1033-1035.

[Li] W.-C.W. Li, Generators for the ideal of polynomial identities satisfied by 2×2 matrices, J. Algebra **74** (1982), 246-263.

[MK] S. Mota Alves, P. Koshlukov, Polynomial identities of algebras in positive characteristic, J. Algebra **305** (2006), 1149-1165.

[Na] M. Nagata, On the nilpotency of nil algebras, J. Math. Soc. Japan **4** (1953), 296-301.

[OP] S. Oates, M.B. Powell, Identical relations in finite groups, J. Algebra **1** (1964), 11-39.

[Po3] A.P. Popov, Some finitely based varieties of rings, Докл. БАН **32** (1979), 855-858.

[Po6] A.P. Popov, On central metabelian variety of algebras, Comm. Algebra **15** (1987), 1319-1347.

[Po7] A.P. Popov, On the identities of the matrices over the Grassmann algebra, J. Algebra **168** (1994), No. 3, 828-852.

[Po8] A. Popov, Graded identities and cocharacters of products of T-ideals, in V.Drensky, et al. (Eds.), Methods in Ring Theory, Proceedings of the Trento Conference, Trento, Italy, New York, Marcel Dekker, Lect. Notes Pure Appl. Math. **198**, 229-245, 1998.

[Pr1] C. Procesi, Non-commutative affine rings, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **8** (1967), 239-255.

[Pr2] C. Procesi, Rings with Polynomial Identities, Marcel Dekker, New York, 1973.

[Pr3] C. Procesi, Computing with 2×2 matrices, J. Algebra **87** (1984), 342-359

[Rsh1] Ts.G. Rashkova, Involution matrix algebras – identities and growth, Сердика **30** (2004), No. 2-3, 239-282.

[Rsh2] Ts.G. Rashkova, $*$-identities in matrix superalgebras with superinvolution $*$, Eds. A. Facchini et al., Algebras, Rings and Their Representations. Proceedings of the International Conference on Algebras, Modules and Rings, University of Lisbon, Lisbon, Portugal, July 14–18, 2003. Hackensack, NJ: World Scientific, 2006 273-287.

[Re1] A. Regev, Existence of identities in $A \otimes B$, Israel J. Math. **11** (1972), 131-152.

[Re2] A. Regev, On the codimensions of matrix algebras, in "Algebra – Some Current Trends (Varna, 1986)", Lect. Notes in Math. **1352**, Springer-Verlag, Berlin – New York, 162-172, 1988.

[Ro1] L.H. Rowen, Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press, 1980.

[Ro2] L.H. Rowen, Ring Theory, vol. 1, 2, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. Student Edition, 1991.

[Sch] W. Schelter, On a question concerning generic matrices over the integers, J. Algebra **96** (1985), 48-53.

[Sp] W. Specht, Gesetze in Ringen. I, Math. Z. **52** (1950), 557-589.

[VL] M.R. Vaughan-Lee, Varieties of Lie algebras, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **21** (1970), 297-308.

[Vi] U. Vishne, Polynomial identities of $M_2(G)$, Comm. Algebra **30** (2002), 443-454.

[W] W. Wagner, Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme, Math. Ann. **113** (1936), 528-567.

[Z] E.I. Zelmanov, Nil Rings and Periodic Groups, KMS Lecture Notes in Math., Korean Math. Soc., Seoul, 1992.

Институт по математика и информатика на БАН
E-mail address: `drensky@math.bas.bg`