АВТОРСКА СПРАВКА

за приносите в научните трудове
на чл.-кор. д.м.н. Веселин Стоянов Дренски,
представени за участие в конкурса за академик
в областта на математическите науки

За участие в конкурса са представени 58 научни труда, номерирани от [1] до [58], от които 54 са излезли от печат през 1974-2012 г., а четири са приети за печат. Това са 53 научно-изследователски статии, три обзорни статии и две книги. От представените трудове 25 статии, един обзор и една книга са написани след избора ми за член-кореспондент през 2004 г., от които 15 статии и един обзор са написани през последните пет и половина години. От представените статии 12 са самостоятелни, от съвместните статии 33 са с един съавтор, 6 са с двама съавтори, една е с трима съавтори и една е четирима съавтори. От обзорите два са самостоятелни, а един е с трима съавтори, от двете книги едната е самостоятелна, а другата е с един съавтор, като явно са разграничени частите, написани от всеки от авторите. Съавторите ми от България са 9 (6 бивши студенти или докторанти – Азнив Каспарян, Цецка Рашкова, Димитър Стефанов, Димитър Циганчев, Тихомир Аспарухов, Пламен Коев, ръководителят на дипломната ми работа Георги Генов, един бивш сътрудник на секция “Алгебра” на ИМИ – Лилия Садикова и един сътрудник от секция „Математически основи на информатиката” на ИМИ – Силвия Бумова, четирима от тях в момента работят в САЩ, а един в Германия). Останалите съавтори са от Италия – 5 (Антонио Джамбруно, Джулия Мария Пиачентини Катанео, Франческа Бенанти, Анджела Валенти, Роберто Ла Скала), САЩ – 4 (Ед Форманек, Джеймс Демел, Лахтар Хамуди и Леонид Макар-Лиманов), Унгария – 3 (Матяш Домокош, Пирошка Лакатош и Йеньо Сигети), Канада - 3 (Канта Гупта, Джейсън Бел и Ягуб Шарифи), по един от Русия (Юрий Бахтурин, сега в Канада), Англия (Роджър Брайънт), Германия (Ралф Холткамп), Сингапур (Хелмер Аслаксен), Холандия (Арно ван ден Есен), Турция (Шехмус Фъндък), Хонг Конг (Джие-Таи Ю) и Южна Африка (Леон ван Вик). Много от тези съавтори са утвърдени имена в съответната област, като Форманек, Бахтурин, Джамбруно, Макар-Лиманов и Домокош в теория на пръстените, Брайънт и Гупта в теория на групите, ван ден Есен и Ю в комутативната алгебра, Демел в числените методи на линейната алгебра. В съвместните статии авторите са наредени по азбучен ред на фамилиите, а резултатите са получени при равноправно участие на всички съавтори.

Представените трудове са разделени в седем групи:

I. Алгебри с полиномни тъждества - 22 статии и 2 обзора, разделени в пет цикъла:
(а) Метод на представянията на групите.
(б) Полиномни тъждества и централни полиноми в матричните алгебри.
(в) Полиномни тъждества в други алгебри.
(г) Полиномни тъждества над поле с положителна характеристика.
(д) Полиномни тъждества в алгебри с допълнителна структура.

II. Автоморфизми на полиномни и свободни алгебри – 10 статии, разделени в два цикъла:
(а) Автоморфизми на полиномни алгебри.
(б) Автоморфизми на свободни и относително свободни алгебри.

III. Теория на инвариантите - 14 статии и 1 обзор, разделени в три цикъла:
(а) Класическа теория на инвариантите.
(б) Некомутативна теория на инвариантите.
(в) Теория на инвариантите на матричните алгебри.

IV. Полугрупови и модулярни групови алгебри и теория на кодирането - 3 статии.

V. Свободни алгебри и алгебри с определящи съотношения - 3 статии.

VI. Теория на симетричните функции - 1 статия**.**

VI I. Книгите "Free Algebras and PI-Algebras" и "Polynomial Identity Rings".

Общият импакт-фактор на всичките ми трудове е 42.954, а на тези представени за участие в конкурса - 19.353. Представил съм списък от 782 цитирания на мои работи в монографии и статии, излезли или приети за печат и списъци с 56 цитата в препринти, 96 цитата в дисертации и 71 цитата в дипломни работи. Статиите [34, 36, 38, 46] са сред 25-те най-изтегляни статии от съответното списание през едно тримесечие от съответната година.

Основните резултати, освен тези за PI-алгебри над поле с положителна характеристика и за модулярни групови алгебри, се отнасят за алгебри над поле с характеристика 0. Статиите за свободни алгебри и определящи съотношения са над произволно поле.

I. Алгебри с полиномни тъждества (PI-алгебри)

Теорията на алгебрите с полиномни тъждества започва да се развива в първата половина на XX век. Класът на PI-алгебрите съдържа комутативните и крайномерните алгебри. Много скоро се оказва, че PI-алгебрите имат богата структурна и комбинаторна теория, с взаимни приложения с теорията на централните прости алгебри, с класическата теория на инвариантите и др.

Този цикъл обхваща статиите [1-8, 13-14, 16-18, 20-22, 26, 38, 46, 48, 52-53] и обзорите [54-55] съгласно списъка на трудовете, представени за участие в конкурса. Една от основните заслуги на автора е, че сам и съвместно със свои докторанти, дипломанти и съавтори развива нов метод, вече доказал своята ефективност и в изследванията на редица други математици. Методът почива на прости идеи и е приложим за асоциативни, лиеви и йорданови алгебри и алгебри с допълнителна структура (с инволюция, градуировка или суперагебри). Поради тази причина той продължава да се изполва и в момента, а основополагащите работи, първите от които са отпреди 30 години, продължават да се цитират, включително в дисертации и дипломни работи, защитени в математически центрове извън България.

В цикъла от работи се решават основни задачи, свързани с полиномните тъждества. Намират се базиси на тъждествата, нови централни полиноми, основните числови инварианти (коразмерностите, кохарактерите, редовете на Хилберт на относително свободните алгебри) и др. за алгебри, които са обект на изучаване или се прилагат и в други области на математиката. Дава се контрапример към проблема на Шпехт за алгебри на Ли в положителна характеристика. Разработват се компютърни методи за изучаване на полиномните тъждества.

(а) Метод на представянията на групите.

Всички полиномни тъждества на една алгебра над поле с характеристика 0 следват от т.н. полилинейни тъждества, които са по-прости за изследване отколкото всички тъждества. При тяхното изучаване съществено се използва теория на представянията на симетричната група. Една от главните наши заслуги към теорията на PI-алгебрите е систематичното прилагане на теорията на полиномните представяния на пълната линейна група (едновременно или вместо представянията на симетричната група). Доразвити са методи от комутативната алгебра и комбинаториката. Намерени са различни връзки между кохарактерите, коразмерностите и редовете на Хилберт на всички полиномни тъждества и собствените полиномни тъждества.

Работи [2] и [5] са основополагащи за създаването на метода на автора. В [2] се доказва еквивалентността на представянията на симетричната и пълната линейна група при използването им в изучаването на PI-алгебрите. Едновременно до тази идея стига американският математик Берел. В [5] се доразвива техника, водеща началото си от работа на Шпехт от 1950 г. и се дава връзка между всички полиномни тъждества на една алгебра и нейните т.н. собствени полиномни тъждества. Това позволява значително упростяване на пресмятанията с полиномните тъждества на конкретни алгебри. В [5] се отбелязва, че като следствие от теоремата на Ширшов за височината се получава полиномният ръст на размерностите на хомогенните компоненти на крайнопородените относително свободни асоциативни алгебри. Оттук лесно следва (но не се отбелязва в работата) директно доказателство на теоремата на Берел, че крайнопородените PI-алгебри имат крайна размерност на Гелфанд-Кирилов. Впоследствие това доказателство става известно като доказателство на Амицур-Дренски и е включено в книга на Роуен по теория на пръстените. (Обзор върху резултатите за размерност на Гелфанд-Кирилов на крайнопородените PI-алгебри е даден в [54].)

С работа [2] започва решаването и на един нов кръг от задачи – описанието на решетките от подмногообразията на дадено многообразие от алгебри. Създаденият метод включва конкретни разлагания на S_n- и GL_m-модули, което се оказва съществено за определянето на базисите на тъждествата в редица алгебри. Темата за описанието на решетки от многообразия продължава както в работите на автора, така и на други математици. Натрупаните резултати служат като "експериментален материал” за изясняване на картината на строежа на многообразията в общия случай.

Методът, началото на който е положено в [2] и [5], се доразвива и използва съществено и в други от статиите, посветени на алгебрите с полиномни тъждества - [3-4, 7-8, 13-14, 16-17, 21-22, 26, 48, 52, 55], както и в [11, 15] и [25, 28, 31, 34-37, 44, 49], където се прилагат съответно за изучаване на автоморфизмите на свободни алгебри и в теория на инвариантите на матричните алгебри. От друга страна, методите, разработени за работа в теория на инвариантите и в теория на симетричните функции, успешно се прилагат за PI-алгебри и допълват метода от [2] и [5].

(б) Полиномни тъждества и централни полиноми в матричните алгебри.

В работи [2, 5] (вече включени в предишния цикъл) се описва модулната структура на собствените тъждества и се намират в явен вид кохарактерите на матричните алгебри от втори ред. Описанието на кохарактерите е получено независимо и по три различни начина от автора и от Прочези и Форманек, които са сред всепризнатите лидери в областта, а трите статии са публикувани в три последователни тома на J. Algebra през 1984 г.

Един от основните проблеми в теорията на алгебрите с полиномни тъждества е намиране на базис на тъждествата на конкретни “интересни” алгебри. Засега този проблем е решен за много малко алгебри. През 1973 г. Размислов намира базис на тъждествата за матриците от втори ред и това е единствената (некомутативна) матрична алгебра над поле с характеристика 0, за която проблемът за явния базис на полиномните тъждества е решен. Базисът на Размислов се състои от девет тъждества от четвърта, пета и шеста степен. В [3] даваме минимален базис от две тъждества за асоциативната алгебра на матриците от втори ред. Всички тъждества в $M_2(\mathbf{Q})$ следват от стандартното тъждество

$$\sum_{\sigma \varepsilon S4} \mathrm{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} = 0$$

и тъждеството на Хол на две букви

$$[[x_1,x_2]^2,x_1]=0.$$

За разлика от опитите за упростяване на базиса на Размислов, предприети от други автори, които съществено се опират на явния вид на този базис, ние използваме само факта, че T-идеалът на $M_2(\mathbf{Q})$ се поражда от своите собствени елементи от степен 4,5 и 6.

Картината за полиномните тъждества в матричните алгебри от по-висок ($n \geq 3$) ред е твърде неясна. Например, в явен вид са описани само полиномните тъждества от степен $2n$ (класическата теорема на Амицур-Левицки от 1950 г.) и от степен $2n + 1$ (резултат на Лерон от 1973 г.). В работа [4], написана съвместно с Азнив Каспрян през 1983 г., се разработва метод, който позволява (с пресмятания на ръка) да се намерят всички тъждества от степен 8 за матриците от трети ред ($8 = 2n + 2$, $n = 3$) и да се покаже, че всички те следват от стандартното тъждество от степен 6. През 1997 г. Бондари и през 2002 г. Вишне използваха компютърни методи, с които успяха само да проверят тези резултати, но не и да направят пресмятания за тъждества от по-висока степен или за матрици от по-висок ред. В съвместната с Франческа Бенанти (Италия) статия [21] се намират кратностите на неприводимите S_{k+2}-модули на всички следствия от степен $k + 2$ от стандартното тъждество от степен k. В обзора [55], написан съвместно с Франческа Бенанти, Джеймс Демел и Пламен Коев, се разглеждат компютърни методи и резултати, получени с компютър при изследване на полиномните тъждества в матричните алгебри. В частност, обсъждат се пресмятанията, направени от авторите за проверка на хипотезата, че всички полиномни тъждества от степен $2n + 2$ за матричните алгебри от n-ти ред следват от стандартното тъждество от степен $2n$. Тази хипотеза е проверена за $n = 4$ и $n = 5$. Пресмятанията за $n = 5$ са извършени за около 8 часа в Университета в Бъркли на компютър "Крей" с 64 процесора, включени паралелно.

През 1956 г. Каплански поставя своите знаменити 12 проблема в теория на пръстените, които оказват значително влияние върху развитието на алгебрата. Един от тези проблеми е за съществуването на полилинейни централни полиноми (от положителна степен) за матриците от n-ти ред, $n > 2$. Пример за централен полином в матричната алгебра от втори ред е полиномът $[x_1,x_2]^2$. Първите централни полиноми за $M_n(\mathbf{Q})$ за всяко n са построени по два различни метода от Форманек и Размислов през 1972-73 г. Това веднага доведе до значителна ревизия на теорията на PI-алгебрите и усилване на много от съществуващите резултати. Дълго време се считаше, че минималната степен на централните полиноми за матриците от n-ти ред е равна на n^2 и това е така за $n = 1$ и $n = 2$. Но авторът и Азнив Каспарян [6] намериха централен полином от осма степен за матриците от трети ред. (Заедно с резултатите от [4] това дава, че за $n = 3$ минималната степен на централните полиноми е 8.) Това даде основание на Форманек да предположи, че минималната степен на централните полиноми в $M_n(\mathbf{Q})$ е равна на $(n^2 + 3n - 2)/2$. Един от основните резултати в съвместната статия с Цецка Рашкова [14] е описанието, с помощта на компютър, на т.н. слаби тъждества от степен 6 в матриците от трети ред. Едно от тези тъждества беше неизвестно преди това. С негова помощ по метода на Размислов се конструират централни полиноми от осма степен. (Конструкцията от [6] не обяснява вътрешните причини за съществуването на такъв централен полином.) Тези изследвания продължават в съвместната статия [17] с Джулия Мария Пиачентини Катанео (Италия). Там се излага компютърен метод, който позволява да се конструира централен полином от 13-та степен за матриците от четвърти ред. Веднага след обработката на компютърните резултати, когато беше ясно как изглежда централният полином от 13-та степен, се оказа, че може (вече без никакви компютри) да се докаже съществуването му. По-нататък, авторът [18] конструира централни полиноми от степен $(n - 1)^2 + 4$ за всяко $n \geq 3$. При $n = 3$ и $n = 4$ тази стойност съвпада с предписаната в хипотезата на Форманек.

(в) Полиномни тъждества в други алгебри.

Благодарение преди всичко на пионерските идеи на Регев количественото изучаване на полиномните тъждества на PI-алгебрите става на езика на коразмерностите им. В [7-8] се въвежда мярка за сложността на едно многообразие, която се базира на асимптотичното поведение на редицата от коразмерности. Считаме, че многообразието е "много по-сложно" от своите собствени подмногообразия, ако неговата редица от коразмерности расте "много по-бързо" от съответните редици на подмногообразията. Дефинират се т.н. екстремални относно коразмерностите многообразия от алгебри. Доказва се екстремалността на две семейства от многообразия, породени от горнотриъгълните матрици от фиксиран ред с елементи от основното поле и от Грасмановата алгебра. На базата на съществуващия по това време (1987-88 г.) оскъден фактически материал се формулира хипотеза за описанието на екстремалните многообразия. Едва неотдавна, през 2003 г., тази хипотеза бе потвърдена от математиците Джамбруно (Италия) и Зайцев (Русия) в две статии в Adv. Math. и Trans. Amer. Math. Soc.

В [13] се намират рекурентни зависимости между кратностите на неприводимите характери на симетричната група в редицата от кохарактери на асоциативни, лиеви и йорданови алгебри.

Статиите [48, 52] са съвместни със Силвия Бумова. На езика на производящите функции се изучават кохарактерите на алгебрата на горно-триъгълните матрици и алгебричните свойства на редовете от коразмерности на произведения на T-идеали. Освен това, в [52] се показва, че експоненциалните редове от коразмерностите на алгебри, близки до матриците от втори ред и до тензорния квадрат на грасмановата алгебра, се изразяват чрез функции на Бесел.

В съвместната статия [46] с Йеньо Сигети от Унгария и Леон ван Вик от Южна Африка се описва централизаторът на нилпотентен ендоморфизъм на крайнопороден полупрост R-модул над произволен пръстен R. Като следствие се описват PI-свойствата на централизатора на произволна матрица от n-ти ред.

В съвместната статия [53] с канадските математици Джейсън Бел и Ягуб Шарифи се изучават алгебри с деление, които са алгебрични отляво и от ограничена степен над свое подполе. Доказва се, че това са алгебри с деление, които са крайномерни над своя център, което обобщава теорема на Каплански. За целта се дава нова версия на класическата теорема на Ширшов за височината.

При много от приложенията на алгебрата се налага ефективна работа в конкретни комутативни и некомутативни алгебри. Когато тези алгебри са зададени като фактор-алгебри на полиномните или свободните асоциативни алгебри, е удобно да се прилага мощният апарат на базисите на Грьобнер. В съвместната работа [38] с Роберто Ла Скала (Италия) се изучават базисите на Грьобнер на редица идеали на свободната алгебра, които са инвариантни относно действието на полугрупи от ендоморфизми. Намерени са базисите на Грьобнер на идеалите, отговарящи на универсалната обвиваща на свободната нилпотентна от клас 2 алгебра на Ли и на полиномните тъждества на Грасмановата (или външна) алгебра. В случая на Грасмановата алгебра базисът на Грьобнер е безкраен, но се оказва, че той се получава от краен брой полиноми под действието на подходяща полугрупа от ендоморфизми.

(г) Полиномни тъждества над поле с положителна характеристика.

Характерно за алгебрите в характеристика $p > 0$ е, че много от резултатите от характеристика 0 не са верни, а използваните методи водят началото си предимно от теория на групите и се различават съществено от тези за алгебри над поле с характеристика 0. Интересът на автора към полиномните тъждества на алгебри над поле с положителна характеристика води началото си от статията [1] през 1974 г. Там се строи първият контрапример към проблема на Шпехт за алгебри на Ли над поле с нечетна характеристика. Построява се в явен вид многообразие от алгебри с безкраен базис на тъждествата. (Подобен пример е построен едновременно и от Юрий Клейман.) Освен това се дава пример на крайномерна алгебра на Ли над безкрайно поле с нечетна характеристика, която няма краен базис от тъждества. Работата доразвива идеи на английския математик Воон-Ли от 1970 г., който решава аналогични задачи над поле с характеристика 2.

Работите [20, 22] са съвместни с Димитър Циганчев, Тихомир Аспарухов и Пламен Коев и са посветени на окончателното решаване за матриците от втори ред на проблем, поставен от Прочези през 1973 г. Нека $R_{mn}(\mathbf{Z})$ и $R_{mn}(\mathbf{Z}_p)$ са съответно пръстенът и алгебрата над $\mathbf{Z}_p$ (за p просто), породени от m общи матрици от n-ти ред. Вярно ли е, че ядрото на каноничния хомоморфизъм от $R_{mn}(\mathbf{Z})$ върху $R_{mn}(\mathbf{Z}_p)$ съвпада с $pR_{mn}(\mathbf{Z})$? Единствените известни резултати преди това бяха на Форманек, Халпин и Ли, че отговорът е положителен за $n = m = 2$ и контрапримерът на Шелтер за $n = p = 2$ и $m \geq 5$. В [20] се доказва, че при $n = p = 2$ и $m \geq 5$ съществува полилинеен контрапример от степен 5 (контрапримерът на Шелтер е от степен 6 и не е полилинеен), а в [22] се дава окончателният отговор на въпроса на Прочези за n= 2: Ядрото на изследвания хомоморфизъм е различно от $pR_{mn}(\mathbf{Z})$ единствено за $p = 2$ и $m \geq 5$. В изследванията се комбинират методи и резултати за матричните алгебри от втори ред над поле с характеристика 0 с компютърни методи. Дава се и явният вид на някои нови полиномни тъждества за матриците от втори ред над поле с характеристика 2 и количествена информация за новите тъждества от ниска степен.

(д) Полиномни тъждества в алгебри с допълнителна структура.

Много често обектите, които се появяват в алгебрата и нейните приложения имат допълнителна структура. Например, това може да бъде инволюция или градуировка. Естествено е при изучаването на полиномните тъждества на такива алгебри да се отчита и тази допълнителна структура.

Алгебрите с инволюция се появяват естествено при изучаването на матрични алгебри, действащи в линейни пространства с билинейна форма, при простите лиеви и йорданови алгебри и др. При изучаването на тъждествата им се работи в свободната алгебра с инволюция и с т.н. *-полиномни тъждества. В съвместната статия [16] с Антонио Джамбруно (Италия) се пренася в случая на *-тъждества техниката на представянията на пълната линейна група и на собствените полиномни тъждества, в духа на [2, 5]. Описват се основните числови инварианти за двата вида инволюция на матриците от втори ред.

Интересът към полиномните тъждества на градуираните алгебри се засилва след работите на Кемер от 80-те години на XX век, където той използва супералгебри (т.е. $\mathbf{Z}_2$-градуирани алгебри) за получаването на дълбоки резултати за полиномните тъждества на "обикновените" асоциативни алгебри. В съвместната статия [26] с научния ръководител на кандидатската ми дисертация Юрий Бахтурин се изучават градуираните тъждества на матричната алгебра $M_p(K)$ с произволна градураща група G. Намират се връзки между G-градуираните тъждества на $M_p(K)$ и на G x H-градуираните тъждества на тензорното произведение на $M_p(K)$ и на H-градуираната алгебра $M_q(K)$ с т.н. финна H-градуировка. Намира се базисът на G-градуираните тъждества на $M_p(K)$ с елементарна градуировка, когато единичната компонента относно градуировката съвпада с диагнала на $M_p(K)$.

II. Автоморфизми на полиномни и свободни алгебри

Този цикъл обхваща статии [11-12, 15, 19, 23-24, 30, 32, 39,43, 51].

(а) Автоморфизми на полиномни алгебри.

Интересите на автора се отнасят до въпроси, свързани с класическата теорема на Юнг-ван дер Кулк (1942, 1953 г.), че автоморфизмите на полиномната алгебра на две променливи са питомни и с контрапримера на Нагата (1970 г.) на див автоморфизъм на $\mathbf{Q}[z][x,y]$, за който Нагата изказва хипотезата, че е див и като автоморфизъм на $\mathbf{Q}[x,y,z]$. Използвайки методи от теорията на PI-алгебрите, съвместно с канадската математичка Чандър Канта Гупта, която е един от водещите специалисти в теорията на относително свободните групи, техните автоморфизми и в алгоритмичните проблеми в теорията на групите и алгебрите на Ли, в [19] бяха построени нови автоморфизми на полиномната алгебра на 5 променливи $\mathbf{Q}[x_1,\ldots,x_5]$. В [23], съвместно с холандския математик Арно ван ден Есен (автор на фундаментална монография върху полиномните автоморфизми и хипотезата за Якобиана) и Димитър Стефанов, беше намерен клас от автоморфизми на полиномните алгебри на произволен брой променливи, които са стабилно питомни, т.е. стават питомни, когато се увеличи броят на променливите. Този клас съдържа и автоморфизмите от [19].

Статии [24, 43] са част от цикъла съвместни статии с Джие-Таи Ю от Хонг Конг. В [24] започваме системното изучаване на автоморфизмите и координатите (автоморфните образи на x) в $\mathbf{Q}[z][x,y]$. Въвеждаме мярка на това колко див е един автоморфизъм и определяме вида на най-простите от тази гледна точка диви автоморфизми. След това даваме алгоритъм, който решава дали един полином от $\mathbf{Q}[z][x,y]$ е координата (или питомна координата). Впоследствие тези резултати послужиха за стимул за получаване от други автори на аналогични резултати за

$R[x,y]$, където R е произволен комутативен пръстен. Алгоритмът за определяне дали един полином е дива координата придоби особена важност във връзка с неотдавнашните работи на Шестаков и Умирбаев (2003-2004 г.). Те доказаха, че автоморфизмът на Нагата е див в $\mathbf{Q}[x,y,z]$. Освен това, Шестаков и Умирбаев показаха, че всеки див автоморфизъм на $\mathbf{Q}[z][x,y]$ е див и като автоморфизъм на $\mathbf{Q}[x,y,z]$. Следователно, нашият алгоритъм дава нови примери на диви автоморфизми за $\mathbf{Q}[x,y,z]$. В [43] се изучават автоморфизмите на полиномната алгебра на две променливи над крайно поле с q елемента. Пресмята се броят на автоморфизмите, които изпращат двете променливи в полиноми от степен n. Оказва се, че производящият ред на Дирихле на съответната редица се изразява чрез q-аналог на дзета-функцията на Риман.

(б) Автоморфизми на свободни и относително свободни алгебри.

Интересите на автора се отнасят до въпроси, аналогични на тези за автоморфизми на полиномни алгебри. Теоремата на Макар-Лиманов и Анастасия Чернякевич от 70-те години на XX век дава, че автоморфизмите на свободната алгебра на две променливи са питомни. От друга страна Аник конструира автоморфизъм на свободната алгебра $\mathbf{Q}\langle x,y,z\rangle$, който има редица свойства на автоморфизма на Нагата на полиномната алгебра на три променливи. Изказва се хипотезата, че автоморфизмът на Аник е див. В непубликуван в журнална статия препринт от 1981 г. Бергман построява диви автоморфизми на относително свободната алгебра на две пораждащи в матричното многообразие от произволен ред.

В работа [12] се доказва, че всички относително свободни асоциативни алгебри от ранг 2, с изключение на няколко тривиални случая, притежават диви автоморфизми. Описват се и автоморфизмите на относително свободните алгебри от ранг 2 в нематрични многообразия. Някои от тези резултати се пренасят и за алгебри на Ли.

В работа [11] (съвместна с Канта Гупта) и [15] (съвместна с английския математик Роджър Брайънт) се доразвива методът на представяния на групите. В [11] се намират пораждащи на групата от автоморфизмите на свободната метабелева нилпотентна алгебра на Ли и се доказва съществуването на диви автоморфизми. В [15] се доказва, че питомните автоморфизми в свободната метабелева алгебра на Ли от ранг ≥ 4 образуват плътна подгрупа в групата на всички автоморфизми. Този резултат допълва теоремата на Бахтурин и Набиев, че всички вътрешни автоморфизми на свободната метабелева алгебра са диви.

В работа [19] се дават нови примери на диви автоморфизми на алгебрата, породена от две общи матрици от втори ред (виж коментара по-горе за приложения към автоморфизмите на $\mathbf{Q}[x_1,\ldots,x_5]$).

Следващите две представени в конкурса работи от този цикъл са съвместни с Джие-Таи Ю. Работа [32] е мотивирана от линейността по x и y на автоморфизма на Аник, който изпраща тройката координати (x,y,z) на $\mathbf{Q}\langle x,y,z\rangle$ в

$$(x + z(xz - zy),\ y + (xz - zy)z,\ z).$$

Изучават се линейни по x и y автоморфизми, които фиксират променливата z. Дава се просто условие кога такъв автоморфизъм е z-див, т.е. див в класа на всички автоморфизми, фиксиращи z. Показва се, че случаят на три променливи е изключителен и при увеличаване на броя на променливите или при абелизация такива автоморфизми стават питомни. Това се обяснява с теоремата на Суслин, че всяка обратима матрица от ред ≥ 3 с полиномни коефициенти е произведение на елементарни матрици, което не е вярно за матриците от втори ред с полиномни коефициенти на две променливи. След публикуването на работа [32] Умирбаев доказа, че автоморфизмът на Аник е див като автоморфизъм на $\mathbf{Q}\langle x,y,z\rangle$ в обичайния смисъл. Работа [39] е мотивирана от резултат на Умирбаев и Ю, че всяка една от нетривиалните координати на автоморфизма на Нагата не може да бъде координата на питомен автоморфизъм. В [39] се разглежда аналогичен въпрос за автоморфизми на $\mathbf{Q}\langle x,y,z\rangle$: Ако един полином е нетривиална координата на автоморфизъм от типа на Аник, вярно ли е, че той не може да бъде образ на x под действието на питомен автоморфизъм? Дава се отговор на този въпрос в случая на полиноми, които са близки до тези, разглеждани в [32]. В доказателствата се използват резултатите на Умирбаев, но дивите автоморфизми и координати, разглеждани в статията, представляват клас, който е по-широк от неговия.

Работа [51] е съвместна с Шехмус Фъндък от Турция, който беше на едногодишна специализация в ИМИ и на практика написа дисертацията си под мое ръководство. Изучават се вътрешните автоморфизми на свободни нилпотентни метабелеви алгебри на Ли. Резултатите се дават на езика на формулата на Бейкър-Кемпбел-Хаусдорф в опростения от немския математик Лотар Геритцен метабелев вариант. След това се описва групата от външните автоморфизми.

III. Теория на инвариантите

Този цикъл обхваща статии [25, 27-29, 31, 33-37, 41, 44-45, 49] и обзора [56].

(а) Класическа теория на инвариантите.

Теорията на локално нилпотентните линейни диференцирания на полиномните алгебри (или диференциранията на Вайценбьок) е тясно свързана с класическата теория на инвариантите въпреки, че исторически много резултати са получени паралелно и независимо. В частност, полският математик Анджей Новицки изказва една хипотеза за пораждащите на алгебрата от константите (ядрото) на диференциранията на Вайценбьок с жорданови клетки от втори ред. Първото доказателство на тази хипотеза е дадено от канадския математик Джозеф Хури. Впоследствие холандският математик Харм Деркселн (сега в САЩ) показа, че хипотезата следва от класически резултати на теория на инвариантите. В съвместната статия [45] с руския математик Леонид Макар-Лиманов (работещ от дълги години в САЩ) даваме ново елементарно доказателство на хипотезата на Новицки. Впоследствие бяха намерени още няколко доказателства, използващи класическа теория на инвариантите. Други резултати, свързани с пресмятането на редовете на Хилберт на алгебрите на инвариантите на специалната линейна и на унитриъгълната групи и на алгебрите от константи на диференцирания на

Вайценбьок са получени в статията [50], представена в раздела за симетрични функции.

(б) Некомутативна теория на инвариантите.

Некомутативната теория на инвариантите изучава инвариантите на линейни групи, действуващи върху свободни, относително свободни и други некомутативни алгебри. Класическата теорема на Еми Ньотер дава, че за произволна крайна линейна група G алгебрата от инвариантите $K[x_1,...,x_m]^G$ е крайнопородена. Крайна породеност имаме и за редуктивни групи G. От друга страна известният контрапример на Нагата към 14-ти проблем на Хилберт показва, че има групи от горно-триъгълни матрици, чиито алгебри от инварианти не са крайнопородени. Все пак, когато групата G се поражда от една унитриъгълна матрица, по теоремата на Вайценбьок от 1932 г. алгебрата $K[x_1,...,x_m]^G$ е крайнопородена. Резултатът може да се формулира и на езика на диференцирания: Ако Δ е линейно локално нилпотентно диференциране на $K[x_1,...,x_m]$, то алгебрата от константи на Δ е крайнопородена. В съвместната статия [33] с Канта Гупта се изучава алгебрата от константи под действието на диференциране на Вайценбьок в случая на свободни и относително свободни алгебри. Доказва се, че за свободни алгебри ядрото не може да бъде крайнопородено. Същото е вярно и за относително свободни алгебри в многообразия, съдържащи алгебрата на горно-триъгълните матрици от втори ред. Описва се напълно ядрото в случая на $K\langle x,y\rangle$ и се правят приложения за алгебрата на общите матрици от втори ред и полиномните алгебри на пет променливи. За последната алгебра се строят нови автоморфизми, които имат някои черти на автоморфизма на Нагата и са потенциални кандидати за диви автоморфизми на $K[x_1,\dots,x_5]$. Работа [29] допълва [33]. Основният резултат дава, че ядрото на произволно диференциране на Вайценбьок, действащо върху относително свободна алгебра е крайнопородено, ако съответното многообразие не съдържа алгебрата на горно-триъгълните матрици от втори ред.

(в) Теория на инвариантите на матричните алгебри.

В статиите се изучава комутативната алгебра от инвариантите на пълната линейна група, действаща чрез едновременно спрягане на няколко матрици. Тази алгебра се поражда от следите на произведения на общи матрици и е известна като комутативната (или чистата) алгебра на следите на общите матрици от n-ти ред. Заедно с нея се изучава и некомутативната (или смесената) алгебра на следите. И двете алгебри играят ключова роля не само в теория на инвариантите, но и в теория на алгебрите с полиномни тъждества, теория на централните прости алгебри и др. Изследванията се извършват в две направления:

(1) (статии [25, 27, 34, 36-37, 41, 44, 49]) Намиране на пораждащи и определящи съотношения между тях. Това е основна задача за инвариантите на една група още от зората на теория на инвариантите.

(2) (статии [28, 31, 35]) Пресмятане на кратностите на неприводимите GL-модули. Тази задача има неросредствено значение и за теорията на PI-алгебрите, защото

получените кратности дават оценка на съответните кратности в редицата от кохарактерите на полиномните тъждества на матричните алгебри.

И при двата типа изследвания чисто теоретичните методи се съчетават с компютърни пресмятания, като се използват стандартни функции в *Maple*.

(1) Както е известно, в случая на матрици от втори ред действието на $GL_2(\mathbf{C})$ е еквивалентно на действието на ортогоналната група $SO_3(\mathbf{C})$, което позволява използването на теорията на инвариантите на ортогоналните групи. В [25] (съвместно с Матяш Домокош) се използват резултати на италианския математик Алдо Конка и се намира базисът на Грьобнер на идеала от определящи съотношения на алгебрата на инвариантите спрямо подходяща система от пораждащи. В [27] се прави превод на резултатите за ортогоналната група на съответния език и тези определящи съотношения се намират в явна форма. В съвместната статия [34] с Хелмер Аслаксен от Сингапур и Лилия Садикова от секцията по алгебра на ИМИ (сега в Германия) се решава въпросът за определящите съотношения на алгебрата на инвариантите на две матрици от трети ред. Система от 11 пораждащи на тази алгебра е намерена от японския математик Тераниши през 1986 г., а единственото определящо съотношение от 12-та степен от друг японски математик – Накамото, през 2002 г. Съотношението на Накамото е изключително сложно и се записва на три журнални страници. Използвайки теорията на представянията на GL_2, в [34] се намира много по-просто определящо съотношение спрямо подходящо избрана система от пораждащи на алгебрата на инвариантите. (Тази система от пораждащи е предложена от италианските математички Абеасис и Питалуга през 1989 г.) В съвместната статия [36] с Франческа Бенанти се продължават изследванията от [34] и се намират определящите съотношения на некомутативната алгебра от инвариантите на две матрици от трети ред и базис на Грьобнер за съответния идеал. В съвместната статия [37] с Лилия Садикова се намира минимална система от пораждащи на алгебрата от инвариантите на две матрици от четвърти ред, също в духа на подхода на Абеасис и Питалуга. Статията [41] (съвместна с Франческа Бенанти) дава всички определящи съотношения от минималната седма степен за алгебрата на инвариантите на произволен брой матрици от трети ред и съотношенията от осма степен за три матрици от трети ред. . Статията [44] (съвместна с Роберто Ла Скала) решава аналогичен въпрос за алгебрата на инвариантите на две матрици от четвърти ред. Намерени с определящите съотношения от степен 12-14. Статиите [34, 36-37, 41, 44] демонстрират мощността на разработените алгоритми и компютърни методи за изучаване на инвариантите на матричните алгебри. Например, намерената система от пораждащи в [37] се състои от 32 полинома, които са линейни комбинации от следи на произведения на две общи матрици от четвърти ред от степен ≤ 10. (Впоследствие Драгомир Джокович от Канада намери друга система от пораждащи на тази алгебра, която се състои само от следи на произведения.) Работата [49] (съвместна с Матяш Домокош) дава в явен вид единственото определящо съотношение на полуинвариантите на три матрици от трети ред. Оказва се, че това съотношение е еквивалентно на съотношението на Аронхолд от 1850 г. за инвариантите на кубична форма на три променливи.

(2) В работата [28], съвместна с Георги Генов, се дефинира и пресмята редът на кратностите на функциите на Шур за реда на Хилберт на алгебрата на инвариантите на две матрици от трети ред. Коригират се и някои неточности в работа на Берел (дължащи се на технически грешки в пресмятанията) относно асимптотичното поведение на тези кратности. Тези резултати имат непосредствено отношение и към полиномните тъждества в матриците от трети ред. В статията [35], съвместна с Георги Генов и Анджела Валенти от Италия и в статията [31], съвместна с Георги Генов, се доразвиват и упростяват методите на [28] и се описват кратностите и тяхната асимптотика съответно за некомутативната алгебра на инвариантите на две матрици от трети ред и за двете (комутативната и некомутативна) алгебри на инвариантите на две матрици от четвърти ред.

Статията [56] е обзор върху компютърни методи за изучаването на матричните инварианти, който е на основата на доклад по покана на Дните на алгебрата в Анталия, Турция.

IV. Полугрупови и модулярни групови алгебри и теория на кодирането

Този цикъл се състои от трите статии [9-10, 30] .

Един от основните проблеми в теорията на модулярните групови алгебри е проблемът за изоморфизма: Вярно ли е, че ако G и G_1 са две (крайни) p-групи и K е поле с характеристика $p > 0$, то от изоморфизма на груповите алгебри $K[G]$ и $K[G_1]$ (като K-алгебри) следва изоморфизмът на групите G и G_1? В статията [9] се дава положителен отговор на този проблем в случая, когато центърът на групата G е от индекс p^2 (т.е. групата е максимално близка до абелева). Когато K е полето с p елемента, този резултат следва от теорема на Сандлинг, а случаят $p = 2$ и K – краен комутативен пръстен с характеристика 2 и без нилпотентни елементи (при някои ограничения върху центъра на G) е доказан от Начев и Моллов.

При търсене на "хубави" кодове, корегиращи грешки, обикновено се предпочита кодовете да възникват в резултат на естествени конструкции. Това е една от причините за популярността на цикличните и груповите кодове (т.е. идеали в груповата алгебра на циклична или на произволна крайна група). Съвместната статия [10] с унгарската математичка Пирошка Лакатош е посветена на кодовите свойства на степените на радикала на модулярната групова алгебра на произволна крайна p-група над поле с характеристика $p > 0$. Най-напред се използват класически резултати на Дженингс, разглежданата задача се "абелизира" и се свежда до изучаване на идеали в груповата алгебра на елементарната абелева p-група (наречени в статията "мономни" кодове). Определят се в явен вид основните кодови параметри. Частни случаи на разглежданите кодове са (обобщените) кодове на Рид-Малер. Освен това, в статията се дава алтернативно описание на радикалните кодове в случая на абелева p-група на езика на сплетения на групи.

Статията [30] е съвместна с Лахтар Хамуди, работещ в САЩ математик от алжирски произход. Тя е посветена на проблема на Кегел дали съществуват крайнопородени алгебри, които са сума на две локално нилпотентни алгебри, но съдържат ненилпотентни елементи. Към момента на публикуването на статията вече бяха известни няколко примера. В статията се сторят нови такива примери. Както останалите примери, и това са алгебри на полугрупи с нулев елемент, който е идентифициран с нулевия елемент на алгебрата. Една от заслугите на статията е, че тя прави по-прозрачна връзката между разглеждания проблем и комбинаториката на думите и по-специално на думите на Щурм (това са безкрайни думи със свойството, че за всяко естествено n имат точно $n + 1$ различни поддуми с дължина n).

V. Свободни алгебри и алгебри с определящи съотношения

Този цикъл съдържа трите статии [40, 42, 47].

Класическата хипотеза за съкращение на Зарийски твърди, че ако R е алгебра над поле K и $R[x]$ е изоморфна на $K[x_1,\ldots,x_n]$, то R е изоморфна на $K[x_1,\ldots,x_{n-1}]$. Въпросът все още е открит за $n \geq 4$. Работа [40] е съвместна с Джие-Таи Ю и е посветена на аналога на хипотезата за съкращение в случая на свободни алгебри. Доказва се, че ако свободното произведение на алгебрите R и $K[z]$ е изоморфно на $K\langle x,y\rangle$, то R е изоморфна на $K[x]$. Като следствие от метода се получава ново просто доказателство на оригиналната хипотеза на Зарийски за $n = 2$ и над поле с характеристика 0.

Статията [47] е съвместна с Йеньо Сигети и Леон ван Вик. В нея се разглеждат асоциативни алгебри с две пораждащи, които удовлетворяват квадратни уравнения. Доказва се, че "най-голямата" алгебра с това свойство се влага в матрична алгебра от втори ред над разширение на основното поле и удовлетворява същите полиномни тъждества като тази матрична алгебра. Описва се в явен вид центърът на алгебрата и се доказва, че всички нейни хомоморфни образи са крайномерни.

Статията [42] е съвместна с немския математик Ралф Холткамп. Разглеждат се абсолютно свободни линейни алгебри с произволен (включително безкраен) брой полилинейни операции. Полиоператорните алгебри са въведени от Курош през 1960 г. Оказва се, че свободните алгебри в този клас имат редица свойства на абсолютно свободните алгебри с една бинарна операция – те удовлетворяват свойството на Нилсен-Шрайер и подлагебрите им са също свободни. В статията ние привличаме комбинаторни техники от теория на графите, което позволява да се пресметнат редовете на Хилберт и асимптотиката на техните коефициенти. Когато основното поле е с характеристика 0, прилагаме методи от некомутативната теория на инвариантите и изучаваме алгебрите от инварианти под действието на линейни групи. Оказва се, че във важни частни случаи редовете на Хилберт на алгебрите от инвариантите и други свързани с тях производящи фнкции се изразяват чрез елиптични интеграли.

VI. Теория на симетричните функции

В този цикъл сме включили статията [50], написана съвместно с Франческа Бенанти, Силвия Бумова, Георги Генов и Пламен Коев. Статията е приета за печат в специалното издание на "Сердика, математическо списание" (с гост-редактори), съдържащо трудовете на неотдавнашна конференция в Сент Джонс, Канада. (В материалите на конкурса са представени коректури.) В статиите [28, 31, 35] се решава задачата по дадена симетрична функция на две променливи да се намери производящата функция на кратностите на функциите на Шур в разлагането на симетричната функция по базиса на Шур. В [50] ние показваме, че тази задача може да се реши с класически средства за симетрични функции от специален вид на произволен брой променливи. Методът използва идеи на Елиът от 1903 г. и на Макмахон от 1916 г. Разглежданият клас от симетрични функции съдържа редовете на Хилберт на симетрични алгебри на крайнопородени модули на пълната линейна група, на градуирани крайнопородени модули на крайнопородени полиномни алгебри, на относително свободни алгебри в многообразия от асоциативни алгебри. Това позволява да се пресметнат ефективно редовете на Хилберт за редица от тези алгебри.

VII. Книгите "Free Algebras and PI-Algebras" и "Polynomial Identity Rings"

Книгата [57], излязла през 2000 г. в Сингапурския филиал на Springer-Verlag, се базира на курса по алгебра за докторанти и дипломанти, прочетен в Университета в Хонг Конг. Използван е и материалът и на други спецкурсове и цикли от лекции, прочетени в редица университети. Целта на книгата е да въведе колкото се може по-бързо читателя с относително скромни знания по алгебра, в една съвременна област на алгебрата, каквато е теорията на свободните алгебри и алгебрите с полиномни тъждества и да го подготви до ниво, достатъчно за четене на научни статии и самостоятелно занимаване с научни изследвания. Книгата съдържа редица дълбоки класически и съвременни резултати, пречупени през гледната точка на автора и е снабдена с обширна библиография. Характерна особеност е множеството от упражнения (50% от номерираните твърдения), много от които включват важни частни случаи на известни резултати. Въпреки, че е предназначена преди всичко за математици, които току що започват своята кариера, книгата се оказа полезна и за утвърдените специалисти. Тя запълни сериозна празнота в литературата по PI-алгебри (последната монография в областта преди това бе английският превод на книгата на Размислов през 1994 г.). След излизането на книгата се появиха още няколко книги по алгебри с полиномни тъждества. Въпреки това, тя продължава да се използва активно. Книгата отдавна е разпродадена, а към момента са ми известни 120 цитирания (и още 50 цитирания в препринти, дисертации и дипломни работи).

Книгата [58], излязла през 2004 г. в Birkhäuser, е написана на базата на курс пред международна аудитория, прочетен съвместно с Ед Форманек през 2003 г. в Центъра за математически изследвания в Барцелона, Испания. Книгата се състои от две отделни части, всяка написана от един от съавторите. Първата част, представена за участие в конкурса, е посветена на комбинаторната теория на PI-алгебрите, а втората част, написана от Форманек, е посветена на структурната теория. Двете части са с минимално пресичане, като за общите резултати са представени различни доказателства. Целта на първата част е да даде ясна картина за съвременното състояние на комбинаторните аспекти на теорията на PI-алгебрите. Книгата съдържа и редица важни резултати, които са по-малко известни или публикувани в трудно достъпни източници. Такъв резултат е например оценката на Кузмин за класа на нилпотентност в теоремата на Нагата-Хигман, публикувана в статия в тома за 60-тата годишнина на академик Любомир Илиев. На книгата е посветена рецензия от 9 страници в Бюлетина на Американското математическо дружество, написана от Луи Роуен, който е един от водещите специалисти в теорията на PI-алгебрите и където сме характеризирани като *two of the foremost PI researchers over the last 30+ years*. Известни са ми 33 (+10) цитирания на книгата, главно в статии в теорията на матричните инварианти.

София, 13.06.2012 г. Подпис:

(чл.-кор. Веселин Дренски)