ГЛАВА x. Геометрични преобразования

Бойко Б. Банчев

Геометричните трансформации в равнината и пространството са важен инструмент на компютърната графика. Това е онази нейна област, в която тя най-много и най-непосредствено използва резултатите и средствата на класическата и на аналитичната геометрии.

Различните видове трансформации се използват не само за визуално представяне на графична информация, но и като част от геометричния модел на един или друг обект в приложни графични програми. Поради важността им програмните средства за осъществяване на такива преобразования са неразделна част от почти всяко приложение. Такива биват включени и в повечето базови графични пакети. Съществуват специализирани графични процесори с вградени програми за извършване на геометрични трансформации.

В тази глава се разглеждат основните равнинни и пространствени геометрични преобразования, използвани в компютърната графика – транслацията, ротацията и мащабирането, а също и най-често използваните видове проектиране на пространствени обекти в равнината. Разглеждат се също афинни и някои по-общи преобразования, които могат да представляват интерес при написването на приложни графични програми. Показва се как подходящи представяния на тези преобразования, като матрици, хомогенни и барицентрични координати, линейни комплексни уравнения и кватерниони позволяват удобно и еднообразно боравене с геометрични понятия в програмирането.

Заедно с геометричните трансформации се описват някои техни свойства. Познаването им помага трансформациите да бъдат по-добре разбрани и по-пълноценно прилагани.

x.1. Равнинни преобразования

При описването на равнинни преобразования ще смятаме, че е избрана и фиксирана декартова координатна система с начало O и оси x и y. Всяко такова преобразование ще задаваме чрез формули, които на координатите на произволна точка съпоставят координати на друга точка.

Най-напред ще припомним някои известни от геометрията понятия и факти.

Преобразования, които запазват формата и размерите на обектите, се наричат *еднаквости*. При това има два вида еднаквости – еднопосочни, които се наричат още *движения*, и разнопосочни. Между два обекта в равнината съществува еднопосочна еднаквост, ако единият може да бъде пренесен до съвпадане с другия чрез произволно сложно хлъзгане в равнината, но без да се „вдига“ – оттам и името „движение“. Всяка от останалите – разнопосочните – еднаквости се получава като към някое движение добавим и *обръщане*, т.е. осева симетрия.

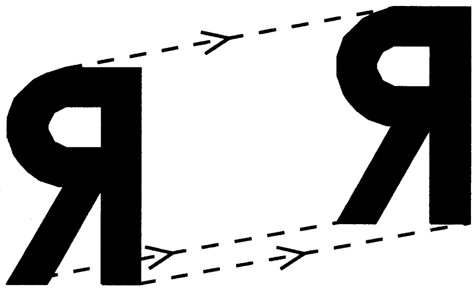
В сила са следните твърдения за равнинните еднаквости.

- Всяка еднопосочна еднаквост е (може да се представи като) произведение на две осеви симетрии. Когато двете оси са успоредни, движението е транслация (преместване), а когато се пресичат – ротация (въртене).
- Всяка разнопосочна еднаквост е или осева симетрия, или произведение на осева симетрия и транслация, успоредна на същата ос. Тази еднаквост се нарича *транслационна симетрия* или *хлъзгащо отражение*.

От горните две следва, че всяка еднаквост може да се получи като произведение на най-много три осеви симетрии – две за еднопосочни и една или три за разнопосочни.

Транслация

Транслацията е движение, при което даден обект се премества в определена посока на дадено разстояние (фиг.x.1).



Фиг. x.1

Следователно, транслацията може да се зададе като сумиране с константен вектор:

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y,$$

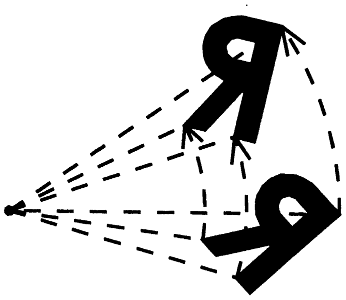
където $(x\ y)$ е координатният вектор на премestваната точка, а $(x'\ y')$ е резултатът от преместването чрез константния вектор $(t_x\ t_y)$. Във векторна форма същото се записва така:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T},$$

където $\mathbf{P} = (x\ y)$, $\mathbf{P}' = (x'\ y')$ и $\mathbf{T} = (t_x\ t_y)$.

Ротация

При ротацията даден обект се завърта около точка на определен ъгъл (фиг.x.2).



Фиг. x.2

Координатната трансформация се задава чрез равенствата:

$$x' = x_c + \cos\alpha \cdot (x - x_c) - \sin\alpha \cdot (y - y_c)$$
$$y' = y_c + \sin\alpha \cdot (x - x_c) + \cos\alpha \cdot (y - y_c),$$

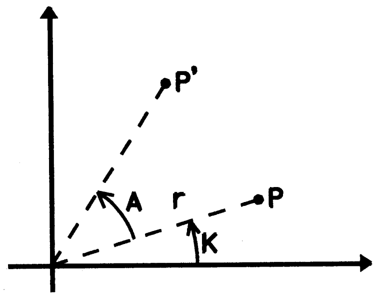
където $(x\ y)$ и $(x'\ y')$ са както по-горе, $(x_c\ y_c)$ са координатите на точката, около която става въртенето, а α е ъгълът на въртене, измерен в положителна посока (обратно на движението на часовника). Можем да запишем същото и в матрична форма:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{C} + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{C}),$$

където $\mathbf{P} = (x\ y)$, $\mathbf{P}' = (x'\ y')$, $\mathbf{C} = (x_c\ y_c)$, а $\mathbf{R}$ е матрицата

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Във верността на горните равенства се убеждаваме, като разгледаме най-напред въртене относно началото на координатната система. На фиг.x.3 точката P е представена чрез радиус-вектора си с дължина ρ и ъгъл φ, сключван от него с абсцисата.



Фиг. х.3

В сила е

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi.$$

Понеже точката P' има радиус-вектор със същата дължина и ъгъл $\varphi + \alpha$:

$$x' = \rho \cos(\varphi + \alpha), \qquad y' = \rho \sin(\varphi + \alpha).$$

От равенствата

$$\cos(\varphi + \alpha) = \cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \varphi \cdot \sin \alpha$$
$$\sin(\varphi + \alpha) = \cos \varphi \cdot \sin \alpha + \sin \varphi \cdot \cos \alpha$$

следва валидността на горната формула, свързваща $(x\ y)$ и $(x'\ y')$ за случая, когато $(x_c, y_c) \equiv O$. Накрая, въртене около произволна точка се получава, като първо приложим транслация с вектор $(-x_c\ \ -y_c)$, така че точката на въртене да стане $O(0, 0)$, извършим въртенето около началото и накрая приложим обратната транслация с вектор $(x_c\ y_c)$. Произведението на тези три движения е еквивалентно на въртенето около (x_c, y_c). Така окончателно се убеждаваме във верността на горните равенства.

Мащабиране

Мащабирането изменя размерите на даден обект. Частен случай на мащабирането е хомотетията (по-точно – централната хомотетия) (фиг.х.4а), която се задава с точка-център (x_c, y_c) и коефициент на изменение $\kappa > 0$:

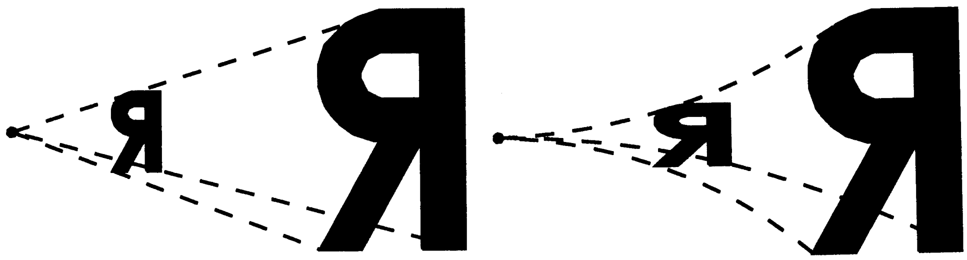
$$x' = x_c + \kappa(x - x_c)$$
$$y' = y_c + \kappa(y - y_c).$$

В матрична форма:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{C} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{C}),$$

където, както и при ротацията, $\mathbf{P} = (x\ y)$, $\mathbf{P'} = (x'\ y')$, $\mathbf{C} = (x_c\ y_c)$, а $\mathbf{S}$ е матрицата

$$\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}.$$



Фиг. х.4а, 4б

При $\kappa < 0$ горните равенства определят произведение на хомотетия с коефициент $\mid \kappa \mid$ и ротация на $180°$ със същия център като хомотетията. Наистина, матрицата $\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix}$ в този случай е произведение на $\begin{pmatrix} \mid \kappa \mid & 0 \\ 0 & \mid \kappa \mid \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}$.

Специално при $\kappa = -1$ се получава централна симетрия, т.е. симетрия относно точка, което съвпада с въртене на $180°$ около точката.

Хомотетията е частен случай на вида преобразования, наречени равнинни *подобия.* Това са онези преобразования, които запазват съотношенията между дължини в изходния и трансформирания обект: подобните обекти са „еднакви с точност до големината им“.

Всяко подобие може да се получи като произведение на някоя еднаквост и (единствена) хомотетия.

Подобията, както и еднаквостите, се делят на еднопосочни, т.е. несъдържащи осева симетрия, и разнопосочни в другия случай. По-точно, известно е, че:

- всяко еднопосочно подобие е или транслация, или *централноподобна ротация* (произведение на хомотетия и ротация с общ център);
- всяко разнопосочно подобие е или транслационна симетрия, или *централноподобна симетрия* (произведение на хомотетия и осева симетрия с ос, минаваща през центъра на хомотетията).

Следователно, всяко подобие, което не е еднаквост, е или централноподобна ротация (когато е еднопосочно), или централноподобна симетрия (когато е разнопосочно).

В общия случай мащабирането се задава с уравненията

$$x' = x_c + \kappa_x(x - x_c)$$
$$y' = y_c + \kappa_y(y - y_c)$$

или в матрична форма:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{C} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{C}),$$

където $\mathbf{S}$ този път е матрицата

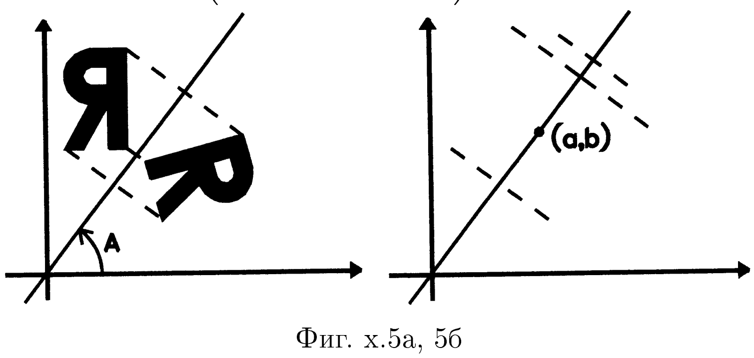
$$\begin{pmatrix} \kappa_x & 0 \\ 0 & \kappa_y \end{pmatrix}.$$

Както се вижда от фиг.х.4б, общото мащабиране, за разлика от подобията, не запазва съотношенията между дължини в изходния и трансформирания обект. То „разтяга“ различно по двете координатни оси. Например, окръжност се преобразува, изобщо казано, в елипса.

Осева симетрия

Осевата симетрия като вид еднаквост, освен сама по себе си, е интересна и с това, че тя, както отбелязахме, поражда всички останали еднаквости – и еднопосочните, и разнопосочните. Симетрията относно ос през O, сключваща ъгъл α с абсцисата (фиг.х.5а) се представя като следното умножение на координатния вектор $\mathbf{P}$ с матрица (установяването на този факт може да се извърши от читателя като упражнение):

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}.$$



Фиг. х.5а, 5б

Оста на симетрия може да се определи и чрез нейна точка (a, b), различна от O (фиг.х.5б); тогава същото преобразование може да се зададе с матрицата

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix}.$$

Ако числата a и b са така избрани върху правата, че (a, b) е вектор с единична дължина, отпада операцията деление в горната формула ($a^2 + b^2 = 1$).

Симетрия относно произволна ос може да се приведе към специалния случай, както и при ротацията и мащабирането, като извършим подходяща транслация преди и след нея.

Афинни преобразования

Афинните преобразования, или афинитетите, са такива, които преобразуват всяка права също в права. Интерес представляват само еднозначнообратимите афинни преобразования, т.е. такива, за които съществува обратна трансформация. Всяко такова афинно преобразование се представя с равенства от вида

$$x' = ax + by + e$$
$$y' = cx + dy + f$$

или в матрична форма:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{T},$$

където $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$, а $\mathbf{T}$ е (транслационният) вектор $(e\ f)$.

Обратно, всяка трансформация, която се описва с такива равенства, е афинна.

Условието $\det \mathbf{A} \neq 0$ е необходимо, за да бъде преобразованието обратимо. Тогава можем да изразим $(x\ y)$ чрез $(x'\ y')$ и очевидно обратното на едно афинно преобразование също е афинно.

Важно свойство на афинитетите е, че при тях се запазва отношението на успоредност между правите: ако две прави са успоредни, то и съответните им при трансформацията са такива и обратно. Освен това, афинитетите запазват тройното отношение на точки върху права: ако три точки A, B и C върху дадена права имат съответни A', B' и C', то $\overline{A'B'} : \overline{A'C'} = \overline{AB} : \overline{AC}$ (всички отсечки са ориентирани). Последното означава, че всяка права при афинна трансформация се „разтяга“ или „свива“ равномерно, т.е. запазват се отношенията между дължини върху всяка отделна права; по-специално, ако дадена права се трансформира в себе си при даден афинитет, върху нея той действа или като транслация, или като хомотетия.

Всички равнинни фигури, трансформирани афинно, променят с един и същи коефициент големините на лицата си и или запазват, или обръщат ориентацията на контурите си.

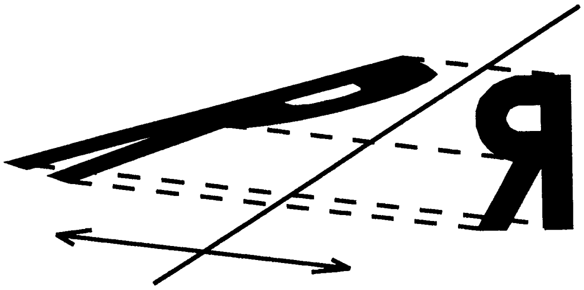
Афинно преобразование, за което $\det \mathbf{A} = 1$, се нарича *еквиафинно.* То запазва ориентираните лица на трансформираните фигури. Когато $\det \mathbf{A} = -1$, големината на лицата се запазва, но ориентацията на контурите се променя (*антиеквиафинитет*). Въобще, $|\det \mathbf{A}|$ е коефициентът, с който се изменят големините на лицата на фигурите при трансформиране, а знакът на $\det \mathbf{A}$ определя дали съответното преобразование обръща ориентацията на контурите на тези фигури в равнината.

Ясно е, че описаните по-горе преобразования – подобия и мащабиране – са афинитети, при това еднопосочните, съответно разнопосочни еднаквости, подобия и мащабиране са еднопосочни, съответно разнопосочни афинитети ($\det \mathbf{A} > 0$, съответно $\det \mathbf{A} < 0$). Еднопосочните еднаквости пък са, разбира се, частен случай на еквиафинитет, а разнопосочните – на антиеквиафинитет.

Съществува и е единствено афинно преобразование, което трансформира три зададени точки в други три такива. По-точно, за всеки два триъгълника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ съществува единствен афинитет, който изобразява единия в другия, така че A отива в A', B в B' и C в C'.

Когато двата триъгълника съвпадат и някой от трите върха се трансформира в себе си, а другите два разменят местата си, например $A' = A$, $B' = C$ и $C' = B$, получаваме един важен специален афинитет: *афинна симетрия.* При него точките от правата, свързваща A със средата на BC, и само те, остават неподвижни. Тази права се нарича ос на симетрията, а точките B и C са двойка взаимно съответни (симетрични) при преобразованието. Всяка друга двойка различни съответни точки задава права със същото направление като на BC.

Афинната симетрия е обобщение на ортогоналната осева симетрия и се отличава от нея по това, че двойките съответни точки лежат на прави, сключващи произволно фиксиран ъгъл с оста (фиг.x.6). Всяка афинна симетрия се представя чрез оста си и направлението на симетрия.

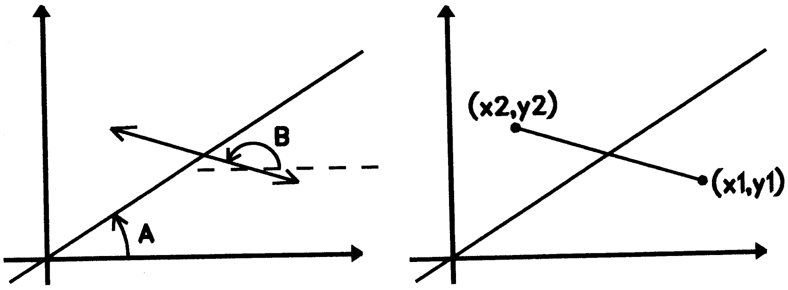


Фиг. x.6

Очевидно всяка афинна симетрия е антиеквиафинитет.

Афинна симетрия относно ос през O, сключваща ъгъл α с абсцисата и с направление на симетрията, определено с ъгъл $\beta \neq \alpha$ спрямо абсцисата (фиг.x.7а), се представя като умножение със следната матрица:

$$\frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}\begin{pmatrix} \sin(\alpha+\beta) & -2\cos\alpha\cos\beta \\ 2\sin\alpha\sin\beta & -sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$



Фиг. x.7а, 7б

Лесно е да се провери, че това представяне при $\beta = \alpha \pm 90^\circ$ се свежда до по-горе дадената матрица, отговаряща на (ортогонална) осева симетрия.

Афинна симетрия можем да определим и чрез двойка съответни точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), като отново смятаме, че оста на симетрия минава през O (фиг.x.7б):

$$\frac{1}{x_1y_2 - x_2y_1}\begin{pmatrix} x_2y_2 - x_1y_1 & -(x_2^2 - x_1^2) \\ y_2^2 - y_1^2 & -(x_2y_2 - x_1y_1) \end{pmatrix}.$$

Афинна симетрия относно произволна ос може да се приведе към специалния случай, като извършим подходяща транслация преди и след нея.

Както произведенията на осеви симетрии пораждат всички еднаквости, така еквиафинитетите се пораждат от афинните симетрии. Изпълнено е следното: всеки еквиафинитет е произведение на две афинни симетрии, а всеки антиеквиафинитет сам е афинна симетрия или е произведение на три афинни симетрии.

Всяко афинно преобразование е произведение на еквиафинно или антиеквиафинно преобразование и хомотетия.

Еквиафинитетите се пораждат не само от афинните симетрии. Всеки еквиафинитет можем да получим и например като произведение на подходящи ротации, мащабиране и транслация.

Да отбележим, че понякога е по-удобно вместо афинна симетрия да се използва произведението на осева и афинна симетрии с една и съща ос. Тази трансформация е еквиафинитет и представлява *огледално отражение от ос по зададено направление* (това на афинната симетрия). В частния случай, когато оста на огледалното отражение е O_x, матрицата на преобразованието е следната:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\operatorname{cotg}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Това огледално отражение оставя хоризонталните прави неподвижни, а вертикалните „накланя“ под ъгъл $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta\right)$ към абсцисата, където ъгълът β задава направлението на огледалното отражение, т.е. накланяне под ъгъл φ се получава чрез отражение с направление под ъгъл $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)$, на което отговаря матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{cotg}\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

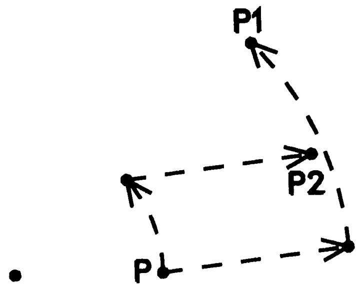
То може да се използва за получаване на наклонен текстов шрифт, както на фиг.х.8.

Фиг. х.8

Използват се и други частни случаи на афинитет, например *хомотетия по зададено направление спрямо ос* (мащабирането, при което единият от двата коефициента е 1, е *ортогонална осева хомотетия*).

Изброените по-горе свойства на афинитетите и това, че всички разгледани дотук преобразования са афинни, има голямо значение за съставянето на приложни програми, извършващи геометрични трансформации. Полезно е да се познават свойствата на различните преобразования, за да се използват правилно и пълноценно. Например, ако даден обект се представя в програмата с начупена линия или, по-общо, с множество от отсечки, за подлагането му на транслация, ротация и т.н. е достатъчно да се трансформират само краищата на отсечките; всички останали точки на трансформирания обект могат да се получат от тях. За някои приложения може да бъде съществено преобразованията да запазват площите, съответно масите на обектите; тогава трябва да се ограничим с еквиафинитети и/или антиеквиафинитети и т.н.

Важна страна на използването на координатни преобразования в приложни компютърни програми е разбирането за правилната последователност, в която трансформациите могат да бъдат прилагани върху даден обект. Повечето двойки преобразования дават различен резултат, ако разменят местата си, или, както се казва, не *комутират*. На фиг.х.9 точката P_1 е получена от P чрез транслация, последвана от ротация. Същите транслация и ротация, но в обратен ред, довеждат P в P_2, различна от P_1.



Фиг. x.9

Следните двойки трансформации комутират и могат да бъдат прилагани в произволен ред:

- транслация - транслация;
- мащабиране - мащабиране (когато са с общ център);
- ротация - ротация (когато са с общ център);
- ротация - хомотетия (когато са с общ център, т.е. при централноподобна ротация);
- афинна симетрия - транслация (когато са с обща ос);
- афинна симетрия - хомотетия (когато центърът на хомотетията е върху оста на симетрията, т.е. при централноподобна афинна симетрия).

Обратната на една трансформация е от същия вид, както самата трансформация. Това важи и за общите класове трансформации, и за отделните видове: обратната на афинност е афинност, в частност обратното на мащабиране е мащабиране, на подобие – подобие и на еднаквост – еднаквост. Сред еднаквостите обратната на всяка транслация е транслация, на ротация – ротация и на осева симетрия – осева симетрия. Същото важи и за афинните симетрии. При това, разбира се, обратните на ротация и мащабиране имат същия център като тях самите, обратната на транслация – същото направление (но обратна посока), а обратната на афинна симетрия съвпада със самата нея.

Освен това, свойството еднопосочност/разнопосочност се проявява еднакво при всяка дадена трансформация и обратната ѝ: ако първата е еднопосочна – и втората е такава и обратно. По-общо, при композиция на две трансформации, резултатът е еднопосочна трансформация, ако и двете са едновременно или еднопосочни, или разнопосочни; в противен случай резултатът е разнопосочна трансформация. Това е така поради сумарната четност или нечетност на броя на симетриите, които участват в произведението на трансформации.

Хомогенни координати

Еднообразното представяне на всички описани по-горе преобразования чрез уравненията на общата афинна трансформация е привлекателно от гледна точка на информатиката, защото позволява различните действия да бъдат представяни по прост и еднакъв начин и следователно съответните програми да бъдат малки и нагледни.

Наред с това, често се използва матрично представяне. При него всяка трансформация се представя с подходяща матрица, така че трансформирането на точка става с умножаване на координатния ѝ вектор с тази матрица, при което се получава също координатен вектор – този на точката-резултат. Следващо трансформиране може да се получи чрез ново умножаване с матрица и т.н. Композицията на трансформации се свежда до умножаване на матрици.

За съжаление не всички разгледани преобразования позволяват това. То е възможно за ротацията и мащабирането относно точката $O(0,0)$, но не и например за транслацията. Един от начините да се направи матричното представяне на трансформациите универсално е да се въведат *хомогенни координати*, като за всяка равнинна точка вместо две се използват три числа.

По-точно, под хомогенни координати на равнинна точка се разбира тройка от числа (X, Y, H), не всички равни на 0, като при това всички тройки от вида $(\lambda X, \lambda Y, \lambda H)$ при $\lambda \neq 0$ представят една и съща точка.

Всяка тройка (X, Y, H), за която $H \neq 0$, представя точката с декартови координати $\left(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}\right)$. Следователно една и съща точка може да се представя по безброй много начини, според избора на H. В този смисъл H се нарича *мащабен множител на представянето* на точката в хомогенни координати. Представянето $(x, y, 1)$ наричаме *канонично* за точката (x, y).

Специалният случай $(X, Y, 0)$ съответства на *безкрайна точка*, т.е. на сноп от успоредни прави с направление, определено от вектора $(X\ \ Y)$. Очевидно всички $(\lambda X, \lambda Y, 0)$, за които $\lambda \neq 0$, представят същата безкрайна точка.

При работа с хомогенни координати матриците, задаващи различни трансформации, имат вече не четири, а девет елемента (3×3). Тази на ротацията около т. $O(0,0)$ е

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а на мащабирането –

$$\begin{pmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транслацията може да се представи с матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава например ротацията около произволна точка се задава с произведението

$$\mathbf{T_2RT_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_c \\ 0 & 1 & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_c \\ 0 & 1 & -y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

където $\mathbf{T_1}$ е транслация, определена с вектор $(-x_c\ -y_c)$, $\mathbf{R}$ е ротация на ъгъл α около точката O, а T_2 е обратната на T_1; или, като извършим умножението:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & (1-\cos\alpha)x_c + \sin\alpha\, y_c \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha\, x_c + (1-\cos\alpha)y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично за мащабирането относно произволна точка получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} \kappa_x & 0 & (1-\kappa_x)x_c \\ 0 & \kappa_y & (1-\kappa_y)y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изобщо афинното преобразование, определено с коефициенти от дадените по-горе уравнения, се представя с матрицата

$$\begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно е, че умножаването на вектор в хомогенни координати с тази матрица, както в общия ѝ вид, така и за всяко конкретно от описаните тук преобразования, не променя мащаба на представяне на точката, тъй като навсякъде последният ред съдържа (0 0 1). В частност, ако една (не безкрайна) точка е представена в каноничен вид, след трансформацията тя остава в такъв вид. Така, веднъж избран, мащабът на координатно представяне, възможно различен за различни точки, няма нужда да бъде коригиран след извършване на трансформация. Разбира се, ако е нужно освен преобразование дадена матрица да извършва и мащабиране на координатното представяне, нейният последен ред трябва да съдържа $(0\ 0\ h)$, където $h \neq 0$, $h \neq 1$.

Използването на хомогенни координати има и други преимущества. Ако x или y, или и двете са твърде големи числа, за да могат да бъдат представени в компютъра, можем да изберем подходящо малка стойност на H и вместо с $(x, y, 1)$, да работим с координатите (xH, yH, H), където xH и yH са приемливо големи.

Уравнението на права в хомогенни координати е
$$aX + bY + cH = 0,$$
където $(a\ \ b\ \ c)$ е векторът от коефициенти на правата, а $(X\ \ Y\ \ H)$ е векторът от хомогенни координати на точките, удовлетворяващи уравнението, т.е. лежащи на правата. Всички такива точки, за които $H \neq 0$ са (крайните) точки с декартови координати $\left(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}\right)$, лежащи върху правата. Освен това, решения на уравнението са и $(-\lambda b, \lambda a, 0)$, $\lambda \neq 0$; всяка такава тройка представя безкрайната точка $(-b, a, 0)$, съответна на направлението на правата. Така всяка права, за която a и b не са едновременно равни на 0, съдържа единствена безкрайна точка и всички прави, успоредни на дадената, съдържат същата безкрайна точка.

Горното означава, че *всеки* две прави в равнината имат обща точка: ако правите не са успоредни, тази точка е крайна, в противен случай те имат обща безкрайна точка. Ако две прави имат поне две общи точки – и двете крайни или крайна и безкрайна – те съвпадат.

Специален случай на уравнение на права в хомогенни координати е
$$0 \cdot X + 0 \cdot Y + cH = 0, \quad c \neq 0,$$
т.е.
$$H = 0.$$
Това уравнение се удовлетворява от всички безкрайни точки и само от тях. Смятаме, че множеството от всички безкрайни точки, т.е. направления в равнината, образува *безкрайна права* в нея, така че горното е уравнение на безкрайната права, единствена в равнината.

Двата числови вектора $(a\ b\ c)$ и $(X\ Y\ H)$ участват равнопоставено в уравнението на права: то изразява зависимостта скаларното им произведение да бъде 0. Можем да пишем
$$(a\ b\ c) \cdot (X\ Y\ H) = 0.$$
Фиксирайки $(a\ b\ c)$, можем да решаваме уравнението спрямо $(X\ Y\ H)$. От друга страна, можем да фиксираме конкретна точка и да го разглеждаме като *уравнение на правите* $(a\ b\ c)$ *през точката* $(X\ Y\ H)$, т.е. да го решаваме спрямо $(a\ b\ c)$.

Уравненията на права през две точки и на точка, лежаща на две прави, в хомогенни координати са еднакви. Те се задават в общия вид
$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$
където (p_1, q_1, r_1) и (p_2, q_2, r_2) са съответно или

- координати на фиксирани точки и тогава (p, q, r) са променливи координати на точка, лежаща на правата през дадените точки (уравнение на правата), или
- коефициенти на фиксирани прави и тогава (p, q, r) са променливи коефициенти на права, минаваща през пресечната точка на правите (уравнение на точката).

Да обърнем внимание, че в първия случай някоя от точките може да бъде безкрайна: тогава получаваме уравнение на права през зададена (крайна) точка, успоредна на дадено направление, определено чрез безкрайната точка. Например при $r_2 = 0$ горното уравнение описва права през (p_1, q_1, r_1), т.е. в декартови координати – през

$\left(\frac{p_1}{r_1}, \frac{q_1}{r_1}\right)$, успоредна на направлението (p_2, q_2). Аналогично във втория случай, ако двете прави са успоредни, уравнението е на общата за тях безкрайна точка.

Така една и съща програма за решаване на горното уравнение може да послужи за няколко различни цели: за намиране на права по дадени две точки или точка и направление, както и за намиране на пресечната точка на две прави или за установяване на това, че правите са успоредни.

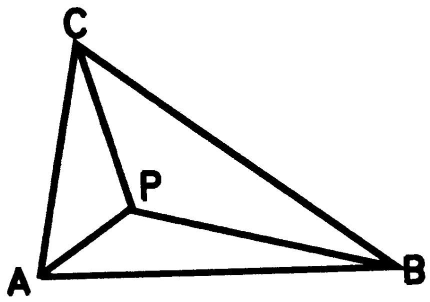
По-общо, това, че една и съща тройка числа може да се разглежда двояко – като координати на точка или на права – позволява всяка процедура, която решава конкретна задача за инцидентност между точки и прави, да решава и двойствената ѝ задача, в която точките са заменени с прави и обратно. Разбира се, тази двойственост не е валидна за задачи, в които има зависимости, свързани с разстояния между обекти.

Барицентрични координати

Както посочихме по-горе, съществува и е единствен афинитет, който трансформира три зададени точки в други три зададени. По този начин, ако знаем координатите на три двойки съответни точки, можем да намерим и всички останали двойки съответни точки в равнината за същия афинитет.

Този факт се наблюдава съвсем непосредствено при употребата на *барицентрични* вместо декартови координати. При тях, както и при хомогенните, за задаване на положението на точка в равнината се използват три числа.

Ако в равнината е фиксиран $\triangle ABC$, барицентричните координати μ_A, μ_B и μ_C на произволна точка P спрямо него могат да се определят като отношенията на ориентираните лица на триъгълниците PBC, PCA и PAB към това на $\triangle ABC$, също ориентирано (фиг.х.10).



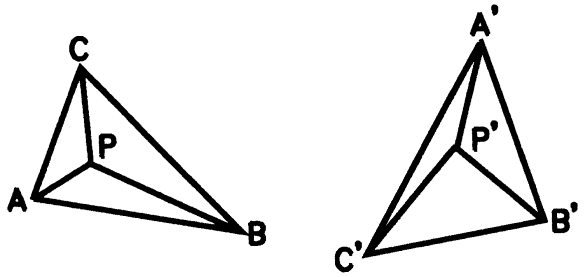
Фиг. х.10

Допустима е и следната интерпретация: μ_A, μ_B и μ_C са такива, че ако във върховете A, B и C на триъгълника са разположени маси, съответно равни на тези три числа (възможно и отрицателни), точката P би се оказала техен център на тежестта. Възможни са и други начини да се определят μ_A, μ_B и μ_C.

По този начин произволно фиксиран в равнината $\triangle ABC$ определя барицентрична координатна система.

Очевидно е, че числата μ_A, μ_B и μ_C не са независими: от определението е ясно, че винаги е изпълнено $\mu_A + \mu_B + \mu_C = 1$. По-нататък, лесно се съобразява, че за всяка точка от вътрешността на координатния триъгълник и трите координати са положителни, като в медицентъра му те са равни ($\mu_A = \mu_B = \mu_C = \frac{1}{3}$). Върху контура на триъгълника едната координата е винаги 0; например, върху AB или продължението ѝ $\mu_C = 0$. Ако точката P съвпада с някой от върховете, две от координатите ѝ са 0, а третата – 1; например, ако $P \equiv A$, нейните координати спрямо $\triangle ABC$ са $\mu_A = 1$ и $\mu_B = \mu_C = 0$. Накрая, ако P е в различни полуравнини с A, B или C спрямо срещулежащата страна на триъгълника, съответната координата е отрицателна.

Това, което удобно свързва афинните преобразования и барицентричните координати е, че за всеки афинитет и всеки два фиксирани съответни при него триъгълника ABC и $A'B'C'$ (при което A съответства на A', B на B' и C на C') образът P' на произволна точка P има относно $\triangle A'B'C'$ същите барицентрични координати, каквито има P относно $\triangle ABC$ (фиг.х.11). Следователно, образите на всички точки са непосредствено, без допълнителни пресмятания известни в барицентрични координати спрямо кой да е триъгълник, ако знаем тези координати спрямо прообраза му.



Фиг. х.11

Различни пресмятания могат да бъдат извършвани непосредствено в барицентрични координати, без да се преминава към съответните декартови.

Например, уравнение на права се задава както и в хомогенни координати:

$$a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = 0,$$

където a, b и c са коефициентите на правата и не могат да бъдат и трите равни помежду си, а (μ_1, μ_2, μ_3) са координатите на точка, лежаща на правата.

Уравнението на права през две точки се задава с

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_1' & \mu_2' & \mu_3' \\ \mu_1'' & \mu_2'' & \mu_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

където дадените точки имат координати (μ_1', μ_2', μ_3') и $(\mu_1'', \mu_2'', \mu_3'')$, а (μ_1, μ_2, μ_3) е обща точка-променлива върху правата.

Две прави с коефициенти (a, b, c) и (d, e, f) са успоредни или съвпадат точно тогава, когато $a - d = b - e = c - f$.

Три прави с коефициенти (a, b, c), (d, e, f) и (g, h, i) са успоредни или съвпадат или имат обща за трите точка точно тогава, когато

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0.$$

За коефициентите (a, b, c) на дадена права е изпълнено $a + b + c = 0$ тогава и само тогава, когато тя преминава през медицентъра на координатния триъгълник.

Преминаването от едни към други барицентрични координати става по формулата

$$\begin{pmatrix} \mu_D \\ \mu_E \\ \mu_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{AD} & \mu_{BD} & \mu_{CD} \\ \mu_{AE} & \mu_{BE} & \mu_{CE} \\ \mu_{AF} & \mu_{BF} & \mu_{CF} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \\ \mu_C \end{pmatrix},$$

където $(\mu_A\ \mu_B\ \mu_C)$ е векторът от координати на произволна точка спрямо $\triangle ABC$, $(\mu_D\ \mu_E\ \mu_F)$ са координатите на същата точка спрямо $\triangle DEF$, а матрицата, с която се умножава $(\mu_A\ \mu_B\ \mu_C)$, съдържа координатите на A, B и C спрямо $\triangle DEF$.

Съществуват и различни други удобни формули за работа в барицентрични координати: за пресмятане на лица, за построяване на окръжности и др. По този начин в някои програми, според конкретните нужди, може да бъде предпочетено пресмятанията да се извършват в такива координати, а декартови да се използват само за визуализиране на обектите.

При работа с барицентрични координати може да се използва двойствеността между координати на точка и коефициенти на права за решаване на взаимно двойствени задачи, както беше показано за хомогенни координати.

Представяне на преобразования чрез линейни комплексни уравнения

В този раздел се дават кратки сведения за това как може да бъде използвано смятането с комплексни числа за представяне на равнинни преобразования.

Да припомним някои понятия, означения и факти.

Както е известно, всяко комплексно число z може да се представи във вида

$$z = a + bi,$$

където a и b са реални числа, а i е „имагинерната единица“, за която е изпълнено $i^2 = -1$. a се нарича реална, а b – имагинерна част на числото z.

Друга форма на представяне се получава след преобразуването (ако поне едното от a и b е различно от 0):

$$z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right).$$

Можем да положим $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = a/\rho$ и $\sin\theta = b/\rho$. Тогава

$$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta\, i)$$

или

$$z = \rho\, e^{\theta\, i}.$$

В това представяне ρ се нарича модул, а θ – аргумент на z. Пишем $\rho = \mid z \mid$ (както за реални числа) и $\theta = \arg z$. Модулът на комплексно число z с реална стойност (с нулева имагинерна част) съвпада с модула, т.е. абсолютната стойност на това реално число.

Събирането на комплексни числа става покомпонентно за реалните и имагинерните им части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Умножаването се изразява по-удобно в представянето с модул и аргумент:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\theta_1 i} \rho_2 e^{\theta_2 i} = (\rho_1 \rho_2) e^{(\theta_1+\theta_2)i}.$$

Числото $\overline{z} = a - b\,i = \rho\, e^{-\theta\, i}$ се нарича спрегнато на $z = a + b\,i = \rho\, e^{\theta\, i}$.

Горните свойства позволяват комплексните числа да се съпоставят взаимноеднозначно с точките в равнината, като на $a + b\,i$ съответства точката (a, b). Тогава събирането на вектори се представя от събиране на комплексни числа (числото $0 = 0 + 0\,i$ е нулевият вектор), взаимноспрегнатите числа отговарят на симетрични относно абсцисата точки, двете представяния на комплексни числа съответстват на декартови и полярни координати на точка и т.н. Умножаването на комплексно число z с друго, на което модулът е 1, е, както се вижда от формулата за умножение, равнозначно на въртене на съответната на z точка на ъгъл, определен от аргумента на второто число.

Както самите комплексни числа удобно представят точките в равнината, смятането с тях може да се използва за представяне на разгледаните по-горе равнинни трансформации.

По-точно, линейните комплексни уравнения, които имат вида

$$w = p\,z + q$$

или

$$w = p\,\overline{z} + q,$$

където p и q са комплексни коефициенти, съответстват на подобията (и в частност, разбира се, на еднаквостите) в равнината. Точката, представяна от комплексната променлива z, се преобразува в точка, съответна на w. Всяко равнинно подобие се представя с линейно комплексно уравнение и всяко такова уравнение отговаря на равнинно подобие.

Ето как се описват различните видове подобия, които разгледахме (z_0, z_1 и z_2 са комплексни, а κ и α – реални константи):

- транслация с вектор z_0:

$$w = z + z_0$$

- ротация с център z_0 и ъгъл на въртене α:
$$w = (z - z_0)e^{\alpha i} + z_0$$
- хомотетия с център z_0 и коефициент на подобие κ:
$$w = (z - z_0)\kappa + z_0$$
- централноподобна ротация с център z_0, коефициент на подобие κ и ъгъл на въртене α:
$$w = (z - z_0)\kappa\, e^{\alpha i} + z_0$$
- осева симетрия с ос през z_0, сключваща ъгъл α с абсцисата:
$$w = (\overline{z} - \overline{z}_0)e^{2\alpha i} + z_0$$
- централноподобна симетрия с център z_0, коефициент на подобие κ и ос през z_0, сключваща ъгъл α с абсцисата:
$$w = (\overline{z} - \overline{z}_0)\kappa\, e^{2\alpha i} + z_0$$
- транслационна симетрия с ос през z_1 и z_2 и вектор на транслацията $z_2 - z_1$:
$$w = (\overline{z} - \overline{z}_1)e^{2\arg(z_2 - z_1)i} + z_2$$

Вижда се, че за всеки отделен случай е лесно да се състави съответното уравнение по зададени параметри на преобразованието. Записът на трансформации-подобия чрез линейни комплексни уравнения е еднообразен, нагледен и компактен.

Обратно, всеки от описаните по-горе случаи може да бъде характеризиран чрез стойностите на p и q в общите уравнения и така се получава (изчерпваща) класификация на линейните комплексни уравнения от гледна точка на съответните им равнинни геометрични преобразования:

- $w = pz + q$ – еднопосочно подобие
  - $|\,p\,| = 1$ – еднаквост
    - $p = 1$ – транслация с вектор q
    - $p \neq 1$ – ротация с център $\dfrac{q}{1-p}$ и ъгъл на въртене $\arg p$
  - $|\,p\,| \neq 1$ – подобие, различно от еднаквост
    - $\arg p = 0$ – хомотетия с център $\dfrac{q}{1-p}$ и коефициент $|\,p\,|$
    - $\arg p \neq 0$ – централноподобна ротация с център $\dfrac{q}{1-p}$, коефициент на подобие $|\,p\,|$ и ъгъл на въртене $\arg p$
- $w = p\overline{z} + q$ – разнопосочно подобие
  - $|\,p\,| = 1$ – еднаквост
    - $2\arg q - \arg p = (2k+1)\pi$ за цяло k – осева симетрия с ос под ъгъл $\dfrac{\arg p}{2}$ през точката $\dfrac{q}{2}$
    - $2\arg q - \arg p \neq (2k+1)\pi$ за цяло k – транслационна симетрия с вектор $|\,q\,|\cos\left(\arg q - \dfrac{\arg p}{2}\right)e^{\frac{\arg p}{2}i}$ и ос по направление на вектора през точката $\dfrac{|\,q\,|}{2}\sin\left(\arg q - \dfrac{\arg p}{2}\right)e^{\frac{\arg p + \pi}{2}i}$
  - $|\,p\,| \neq 1$ – подобие, различно от еднаквост: централноподобна симетрия с център $\dfrac{q + p\overline{q}}{1 - |\,p\,|^2}$, коефициент на подобие $|\,p\,|$ и ос под ъгъл $\dfrac{\arg p}{2}$.

Отново се вижда, че в повечето случаи по коефициентите p и q на кое да е линейно комплексно уравнение лесно може да се определи на какво преобразование съответства то, а и да се намерят параметрите му: ако уравнението е относно z, трансформацията е еднопосочна, иначе – относно $\overline{z}$ – тя е разнопосочна; при $|\,p\,| = 1$ и само тогава трансформацията е еднаквост; еднопосочната еднаквост при $p \neq 1$ е ротация, а в противен случай – транслация и т.н.

Допълнително удобство на представянето чрез линейни комплексни уравнения е, че лесно се намира обратното на дадено преобразование, като се обърне равенството, така че да се изрази z чрез w.

Афинните преобразования в равнината се представят чрез смесени линейни комплексни уравнения. Смесеното линейно комплексно уравнение има вида

$$w = p\,z + q\,\overline{z} + r$$

и обобщава двата вида линейно комплексно уравнение, които се получават съответно при $q = 0$ и $p = 0$.

Ако a, b, c, d, e и f са коефициентите от представянето на даден афинитет чрез двойка линейни реалночислови уравнения, коефициентите p, q и r на смесеното линейно комплексно уравнение, задаващо същото преобразование, се определят от равенствата

$$p = \frac{(a+d)-(b-c)i}{2}$$
$$q = \frac{(a-d)+(b+c)i}{2}$$
$$r = e + fi.$$

Афинното преобразование, което изпраща точките z_1, z_2 и z_3 съответно в w_1, w_2 и w_3, се задава със смесено линейно комплексно уравнение, в което коефициентите p, q и r се определят чрез следните равенства:

$$p = \frac{w_1(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) + w_2(\overline{z}_3 - \overline{z}_1) + w_3(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{D}$$
$$q = \frac{w_1(z_3 - z_2) + w_2(z_1 - z_3) + w_3(z_2 - z_1)}{D}$$
$$r = \frac{w_1(z_2\overline{z}_3 - z_3\overline{z}_2) + w_2(z_3\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_3) + w_3(z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1)}{D},$$

където

$$D = z_1(\overline{z}_2 - \overline{z}_3) + z_2(\overline{z}_3 - \overline{z}_1) + z_3(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$$

или

$$D = -4S\,i,$$

в което S е ориентираното лице на триъгълника с върхове z_1, z_2 и z_3, взети в този ред.

Афинната симетрия с ос през т. O и съответни една на друга точки z_1 и z_2 се задава с

$$w = \frac{(\mid z_2 \mid^2 - \mid z_1 \mid^2)z + (z_1^2 - z_2^2)\overline{z}}{z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1}.$$

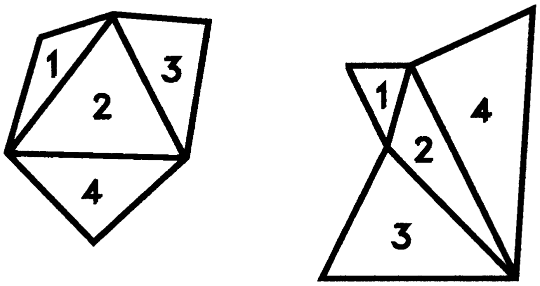
Някои езици, например Fortran и Apl, позволяват непосредствено да се работи с данни от тип комплексни числа, в други те лесно могат да се въведат от програмиста. В обектноориентирани езици, например C++, обикновено аритметиката на комплексните числа се предоставя във вид на стандартен приложен клас. Поради еднообразното, сбито и нагледно представяне апаратът на комплексната аритметика може да бъде удобно средство за работа с равнинни трансформации за редица геометрични приложни програми.

Други равнинни преобразования

В някои програми, особено в областта на анимацията и илюстративната компютърна графика, може да се наложи да се използват преобразования, различни от описаните дотук. Може например да са известни някакви условия, на които дадено преобразование трябва да отговаря, но не е известно негово аналитично описание. В такива случаи често се оказва, че преобразованието не е афинно и дори, че не може да се намери аналитична формула, която да го описва.

Ще изложим накратко един общ метод за намиране на равнинно преобразование, който може да бъде използван в различни случаи. Нека в равнината са определени два многоъгълника с еднакъв брой върхове и искаме да трансформираме единия в другия така, че контурите им да съвпаднат. Предварително е известно кой връх от първия контур на кой връх от втория съответства, като при това на съседни върхове от единия отговарят съседни от другия.

Можем да разбием вътрешността на двата многоъгълника на триъгълници и то така, че разбиването да стане еднообразно за двете области (фиг.х.12). Под „еднообразно“ имаме предвид следното. Всяка отсечка от вътрешността на първата област, на която единият край е връх от контура, има за съответна отсечка от вътрешността на втората област, на която единият край е съответният връх от другия контур. Чрез това съответни стават и другите (вътрешните за съответните области) краища на тези две отсечки. След това същото трябва да бъде изпълнено и за отсечките, инцидентни с тези две точки и т.н. По този начин се получават две триъгълни мрежи, съответни една на друга по върхове, отсечки и триъгълници. На съседни по връх или страна триъгълници от едната мрежа отговарят съседни от същия вид в другата мрежа.



Фиг. х.12

След разбиването всеки триъгълник от първата мрежа се трансформира афинно в съответния му от втората мрежа, като се спазва съответствието на върховете. Така образът на всяка точка от първия многоъгълник се намира чрез локално афинно съответствие, в зависимост от това, в кой триъгълник от мрежата попада тази точка.

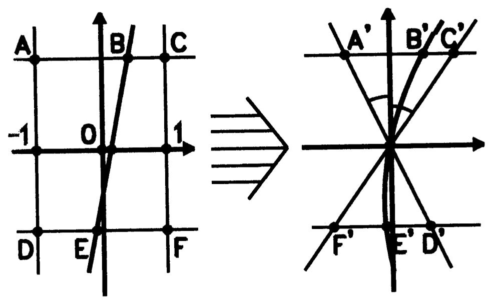
Ясно е, че този метод дава безкрайно множество от различни трансформации на точките от единия многоъгълник в точките от другия и обратно, според избора на двете съответни мрежи. При това колкото повече възли на мрежите задаваме, толкова по-конкретно описваме желаното преобразование. Ясно е също, че методът може да се прилага и за области, заградени от произволен контур, и то не само от една затворена крива – в такъв случай контурът първо се заменя с подходяща начупена линия.

Съществуват различни алгоритми за разбиване на триъгълници (триангулиране), но тук няма да се спираме на тях. При уточняването на мрежата могат да се поставят определени критерии, например окръжностите, описани около всеки триъгълник, да не съдържат други възли от мрежата и техните радиуси да не са по-големи от някаква предварително определена стойност.

В по-прости случаи зададените условия позволяват да се намери явна формула за преобразуване на координатите при търсената трансформация, така както направихме това за транслация, ротация и т.н.

Да разгледаме още един пример на неафинно равнинно преобразование. Трансформираме равнината така, че вертикалните прави $x = -1$ и $x = 1$ да се преобразуват в прави, пресичащи се в точката O, като първата от тях сключва с ординатата ъгъл α, а втората – $\beta \neq \alpha$. При това искаме правите от вида $y = k$, т.е. хоризонталните прави, да се изобразяват в себе си и да бъде изпълнено следното: всяка точка (x, y) да има за образ онази точка, за която ориентираните разстояния по хоризонтала до образите на правите $x = -1$ и $x = 1$ се съотнасят така, както ориентираните разстояния по хоризонтала на (x, y) до правите $x = 1$ и $x = -1$ (фиг.х.13).

Образно казано, искаме да „разтегнем“ и съответно „свием“ равнината, „хващайки“ я за две прави и изменяйки тяхното положение, като разтягането и свиването стават равномерно по хоризонталите.



Фиг. x.13

От зададените условия и уравненията на правите следва, че това преобразование се задава с равенствата

$$x' = \tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)x - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\right] y$$
$$y' = y.$$

На дадената фигура се приема, че $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$. Ако е изпълнено обратното неравенство, двете наклонени прави разменят местата си.

Трансформацията има следните свойства.

Както поискахме, всички хоризонтални прави (без абсцисата) се преобразуват в себе си и върху всяка от тях отделно трансформацията е хомотетия. Всички вертикални прави също се преобразуват в прави, в общия случай невертикални. Всички нехоризонтални, невертикални прави се трансформират в параболи, преминаващи през точката O.

Коефициентът на хомотетия за хоризонталните прави намалява до 0 в точката O, като е положителен над абсцисата и отрицателен под нея (при направеното допускане $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$). Цялата абсциса се преобразува в единствената точка O (следователно изображението не е обратимо). Изразявайки се отново образно, равнината е разкъсана по цялата абсциса, освен в т. O, където образите на вертикалните прави се пресичат, и чрез усукване долната полуравнина е обърната спрямо горната.

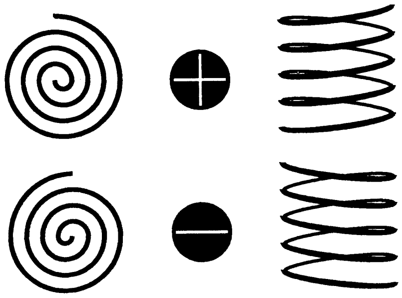
Да отбележим, че тази трансформация, „поглъщайки“ абсцисата, преобразува някои четириъгълници в триъгълници.

x.2. Пространствени преобразования

Преобразованията в пространството ще опишем подобно на равнинните, задавайки съответните им преобразуващи матрици. Смятаме за фиксирана дясноориентирана декартова координатна система с начало O и оси x, y и z. „Дясноориентирана“ означава, че взаимното разположение на положителните лъчи на осите O_x, O_y и O_z (перпендикулярни помежду си) е както съответно на разтворените палец, показалец и среден пръст на дясната ръка.

Сред пространствените преобразования също ще разглеждаме еднаквости, подобия и афинитети от общ вид.

Афинните преобразования се разделят на два вида – еднопосочни и разнопосочни (обръщащи). В равнината това е свързано с двата възможни начина да се ориентира (равнинен) контур – по посока на часовника и обратно. В пространството двата вида ориентация са тази на десния винт, който се завива, въртейки по посока на часовника, и обратната на нея. С други думи, равнинната ориентация свързваме със спирала, която се развива в едната от двете възможни посоки, а пространствената ориентация – с едната от двете пространствени кръгови спирали, или винтови линии (фиг.x.14). В равнината приемаме за положителна посоката на спиралата, която се развива срещу часовника, а в пространството – тази на дясновинтовата спирала. На фиг.x.14 положителните и отрицателните спирали са означени съответно с плюс и минус. Ако се погледне пространствената спирала по оста ѝ откъм който и да е от двата края, поради перспективата се вижда съответната по ориентация равнинна спирала.



Фиг. x.14

В пространството ролята на равнинните (околоточкови) ротации се изпълнява от *околоосните* ротации. Всяко пространствено движение, при което за всяка точка A образът ѝ A' е на същото разстояние до произволно фиксирана точка W, на каквото е и самата A, е ротация около ос през W. В този смисъл *не съществува* пространствена ротация около точка.

Произведението на ротации около оси с обща точка съвпада с ротация около ос през същата точка.

Това твърдение се онагледява чрез следното наблюдение. Всяка ротация с ос през фиксирана точка W довежда произволна друга точка A в точка B, такава, че $WB = WA$, т.е. всяка ротация с ос през W премества точката A в точка върху същата сфера с център W, която съдържа и A. Обратно, всяка пространствена еднаквост, непроменяща дадена сфера с център W, е ротация с ос през W. Ако една ротация с ос през W довежда точката A в B, а друга такава ротация – B в C, то и трите точки A, B и C лежат върху една и съща сфера с център W и значи съществува ротация с ос също през W, довеждаща A в C.

Описаното свойство на ротации около оси с обща точка е аналогично на свойството на равнинните ротации с общ център. Налице е обаче и съществена отлика между двата вида ротации: пространствените ротации с оси през обща точка, за разлика от равнинните ротации с общ център, *не комутират*: произведението на ротации дава друг резултат, ако разменим реда на прилагането им.

Също както в равнината, и в пространството всяка еднопосочна еднаквост може да се представи като произведение на две осеви симетрии и е съответно:

- транслация, когато осите са успоредни;
- ротация, когато осите се пресичат;
- *винтово движение* – произведение на ротация и транслация, успоредна на оста на ротацията – когато осите на симетриите са кръстосани.

Можем да смятаме и че *всяка* еднопосочна еднаквост в пространството е винтово движение, а транслациите и ротациите са негови частни случаи, съответно когато или ротацията, или транслацията, участваща във винтовото движение, е идентичното преобразование.

И при осевите симетрии, наред с аналогията с равнинния случай, е налице и важна отлика: осевата симетрия в пространството *не е разнопосочна* еднаквост, каквато е в равнината, а *ротация* на 180° около оста, и следователно пространствените осеви симетрии не могат да пораждат разнопосочните еднаквости. В пространството разнопосочни са равнинната и централната (спрямо точка) симетрии. (Втората от тях пък е еднопосочна в равнинния случай – там *тя* е въртене на 180°.)

Всяка разнопосочна еднаквост е или

- *транслационна симетрия* (*хлъзгащо отражение*) – произведение на симетрия относно равнина и транслация, успоредна на равнината, или

- *ротационна симетрия* – произведение на симетрия относно равнина и ротация около ос, перпендикулярна на равнината.

В пространството *равнинните симетрии* са онези, които пораждат *всички* еднаквости – еднопосочни и разнопосочни. По-точно, всяка еднопосочна еднаквост е представима като произведение на две или четири равнинни симетрии, а всяка разнопосочна еднаквост – като една или произведение на три равнинни симетрии.

Транслация

Транслацията в пространството се задава чрез сумиране с вектор, аналогично на равнинната:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T},$$

където $\mathbf{P} = (x\ y\ z)$, $\mathbf{P}' = (x'\ y'\ z')$ и $\mathbf{T} = (t_x\ t_y\ t_z)$.

Матриците на пространствените преобразования, несъдържащи транслация, имат размер 3×3 и се съставят аналогично на матриците 2×2 за двумерни преобразования.

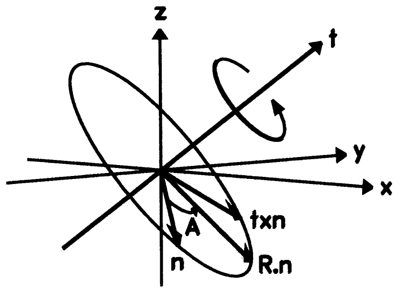
Ротация около ос и винтово движение

Ротациите около осите O_x, O_y и O_z се свеждат до въртене съответно в равнините O_{yz}, O_{zx} и O_{xy}: едната координата на трансформираната по този начин точка остава непроменена. Като имаме предвид как изглежда матрицата на ротация около т. O в равнината, лесно съобразяваме, че ротация на ъгъл α в положителна посока около някоя от координатните оси в пространството се задава съответно с

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Да намерим матрицата $\mathbf{R}$ на ротация на ъгъл α в положителна посока около произволна ос $\mathbf{t}$ през т. O, където $\mathbf{t} = (t_x\ t_y\ t_z)$ е вектор с единична дължина ($|\ \mathbf{t}\ | = 1$). Под „въртене в положителна посока около насочена ос“ се разбира онова въртене около правата на оста, което е в положителна посока във всяка равнина, перпендикулярна на оста, ако гледаме по оста в обратна на нейната посока (фиг.x.15).



Фиг. x.15

За произволен вектор $\mathbf{n}$ с начало в т. $O(0,0,0)$ и перпендикулярен на $\mathbf{t}$ образът $\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}$ на $\mathbf{n}$ при ротацията $\mathbf{R}$ се получава с равнинно въртене на ъгъл α в равнина през т. O, перпендикулярна на $\mathbf{t}$ (фиг.x.15). По-точно, изпълнено е

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{n} = \cos\alpha\cdot\mathbf{n} + \sin\alpha\cdot(\mathbf{t}\times\mathbf{n}).$$

Ако с $\mathbf{I}$ бележим единичната матрица от ред 3 и вземем предвид, че $\mathbf{t}\times\mathbf{n} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{n}$, където матрицата

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\times\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix}$$

се получава от $\mathbf{I}$ чрез поредово векторно умножаване с $\mathbf{t}$, горното равенство можем да преобразуваме във вида

$$(\mathbf{R} - \cos\alpha \cdot \mathbf{I} - \sin\alpha \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Последното е изпълнено за произволен и значи за всеки вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярен на $\mathbf{t}$. Следователно изразът в скоби задава матрица $\mathbf{U}$, чиито вектор-редове са колинеарни с $\mathbf{t}$, т.е.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda\, t_x & \lambda\, t_y & \lambda\, t_z \\ \mu\, t_x & \mu\, t_y & \mu\, t_z \\ \nu\, t_x & \nu\, t_y & \nu\, t_z \end{pmatrix}$$

за някакви λ, μ и ν.

Като умножим двете страни на равенството

$$\mathbf{R} - \cos\alpha \cdot \mathbf{I} - \sin\alpha \cdot \mathbf{M} = \mathbf{U}$$

с $\mathbf{t}$, тъй като $\mathbf{R} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t}$, $\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{I} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{t} \times \mathbf{t} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} = (\lambda\ \mu\ \nu)$, получаваме

$$(1 - \cos\alpha) \cdot \mathbf{t} = (\lambda\ \mu\ \nu).$$

Следователно

$$\mathbf{U} = (1 - \cos\alpha)\mathbf{L},$$

където

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} t_x t_x & t_x t_y & t_x t_z \\ t_y t_x & t_y t_y & t_y t_z \\ t_z t_x & t_z t_y & t_z t_z \end{pmatrix}.$$

Изразявайки $\mathbf{R}$ чрез $\mathbf{U}$ получаваме

$$\mathbf{R} = \cos\alpha \cdot \mathbf{I} + (1 - \cos\alpha) \cdot \mathbf{L} + \sin\alpha \cdot \mathbf{M}.$$

Разбира се, като частни случаи за $\mathbf{R}$ при $\mathbf{t} = (1\ 0\ 0)$, $\mathbf{t} = (0\ 1\ 0)$ и $\mathbf{t} = (0\ 0\ 1)$ получаваме дадените по-горе матрици на въртене около осите O_x, O_y и O_z.

Въртенето около ос, която не минава през т. O, се свежда до композиция на произволна транслация, довеждаща оста в права през O, ротация по горната формула и транслация, обратна на първата. Формула, представяща тази по-обща ротация лесно се извежда, като ползваме намереното за частния случай. Оттам намираме и представяне за кое да е винтово движение, т.е. за всяка еднопосочна еднаквост.

Именно, да смятаме, че оста на винтово движение е зададена с вектор на посоката $\mathbf{t}$, $|\ \mathbf{t}\ | = 1$ и вектор на момента $\mathbf{n}$ и че то се състои от въртене на ъгъл α в положителна посока около оста и транслация на разстояние s по посока на оста. От вида на получената по-горе матрица на ротация $\mathbf{R}$ следва, че за произволна точка с радиус-вектор $\mathbf{r}$ резултатът от така определеното винтово движение е точката с радиус-вектор

$$\mathbf{r}' = \cos\alpha\, \mathbf{r} + [(1 - \cos\alpha)\, \mathbf{t}\mathbf{r} + s]\mathbf{t} + \sin\alpha\, \mathbf{t} \times \mathbf{r} + \sin\alpha\, \mathbf{n} + (1 - \cos\alpha)\mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

> *Забележка.* Под „вектор на момента“ $\mathbf{n}$ на ос, посоката на която е зададена чрез единичен вектор $\mathbf{t}$, се разбира векторът $\mathbf{p} \times \mathbf{t}$, където $\mathbf{p}$ е радиус-векторът на коя да е точка от оста ($\mathbf{n}$ е перпендикулярен на равнината, съдържаща т. O и оста, а дължината му е равна на разстоянието на т. O до оста; $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ за ос през т. O). Положението на ос в пространството може да се фиксира и непосредствено чрез точка от оста, но векторът на момента не зависи от избора на конкретна точка и с това е по-удобен за представяне на оси.

Разбира се, в горното представяне на общо винтово движение е възможно $s = 0$ – движението е ротация, или $\alpha = 0$ – движението е транслация ($\mathbf{r}' = \mathbf{r} + s\mathbf{t}$).

<u>Равнинна симетрия</u>

Матрицата, отговаряща на симетрия относно равнина през т. O с нормален вектор $\mathbf{t} = (t_x\ t_y\ t_z)$, $|\ \mathbf{t}\ |= 1$ е

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - 2\mathbf{L},$$

където **I** и **L** са матрици, определени както във формулата за ротация около ос. Тази формула се извежда подобно на формулата за матрицата на ротация.

Мащабиране

Мащабирането относно началото O се задава с матрицата
$$\begin{pmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{pmatrix}.$$
Отново частен случай на мащабирането е хомотетията, за която $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_z$.

Както и в равнината, подобията в пространството се получават, като към еднаквостите добавим хомотетия, т.е. образуваме всевъзможни произведения на еднаквости и хомотетии.

Всяко подобие е или винтово движение, или транслационна симетрия, или *централноподобна ротация* – произведение на хомотетия и ротация с ос през центъра на хомотетията. Следователно, всяко подобие, което не е еднаквост, е централноподобна ротация.

Афинни преобразования

И в пространството разглеждаме афинни преобразования – по определение онези преобразования, които трансформират всяка права също в права. Пространствените афинитети се представят с равенства от вида
$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz + j \\ y' &= dx + ey + fz + k \\ z' &= gx + hy + iz + l, \end{aligned}$$
където $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$, за да бъде преобразованието обратимо.

Всяка трансформация, която се описва с такива равенства, е афинна и обратното на дадено афинно преобразование също е афинно.

За пространствените афинитети остават в сила свойствата на равнинните – запазване на отношението на успоредност между правите и отношенията между дължини върху всяка отделна права. Още повече, всяка равнина се трансформира в равнина и успоредните равнини – в успоредни. При това, върху всяка отделна равнина пространственият афинитет действа като равнинен.

Пространствените афинитети променят еднакво големините на *обемите* на трансформираните тела, както и ориентацията им в пространството. Абсолютната стойност на детерминантата на преобразованието е равна на коефициента на изменение на големините на обемите, а знакът ѝ показва запазването или обръщането на ориентацията.

Аналогично на двумерния случай се определят и еквиафинитет и антиеквиафинитет, съответно когато детерминантата на преобразованието е 1 и -1, при което се запазват големините на обемите на трансформираните обекти, а ориентацията се запазва, съответно обръща.

Съществува и е единствено пространствено афинно преобразование, което трансформира четири зададени точки в други четири зададени, т.е. всеки два тетраедъра с установено съответствие между върховете на единия и другия задават точно един афинитет.

Когато двата тетраедъра съвпадат, като два от четирите върха се трансформират всеки в себе си, а другите два са съответни един на друг, преобразованието е пространствена афинна симетрия. Пространствената афинна симетрия е симетрия спрямо равнина по направление, в общия случай неортогонално на равнината. За посочения тетраедър равнината на симетрия минава през реброто между двата неподвижни върха и през средата на срещулежащото ребро, което пък задава направлението на симетрия.

Пространствена афинна симетрия относно равнина през O с нормален вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, с направление на симетрията $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ се задава с матрицата:

$$\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \begin{pmatrix} u_1 n_1 & u_1 n_2 & u_1 n_3 \\ u_2 n_1 & u_2 n_2 & u_2 n_3 \\ u_3 n_1 & u_3 n_2 & u_3 n_3 \end{pmatrix}.$$

Пространствените еквиафинитети и антиеквиафинитети се пораждат от произведенията на пространствени афинни симетрии.

И тук, както и в равнинния случай, е уместно да обърнем внимание върху удобството, което дават свойствата на афинните преобразования при програмирането на приложения, извършващи геометрични трансформации. При афинитет е достатъчно да се намерят образите на възловите точки; ако знаем образите на две точки върху дадена права или на три точки в равнина, всички останали точки от правата, съответно от равнината, са определени чрез тях.

Хомогенни и барицентрични координати

Аналогично на равнинния случай се въвеждат и хомогенни координати (X, Y, Z, H) на точка в пространството, при което става възможно транслацията, а и всяко афинно преобразование да се опишат чрез матрица. Матриците в пространствени хомогенни координати имат размер 4×4; вече дадените по-горе матрици за ротация и мащабиране с размер 3×3 се разширяват по очевиден начин.

Матрицата на транслацията има вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и въобще всеки афинитет, зададен с горните равенства, се представя с матрицата

$$\begin{pmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнението

$$aX + bY + cZ + dH = 0$$

е уравнение на равнина в пространството, където $(a\ b\ c\ d)$ е векторът от коефициенти на равнината, а $(X\ Y\ Z\ H)$ е вектор от хомогенните координати на точките, удовлетворяващи уравнението, т.е. лежащи в равнината.

Точките, за които $H \neq 0$, имат декартови координати $(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H})$ и са крайните точки в равнината. Решенията на уравнението, за които $H = 0$, представят безкрайните точки на равнината – различните снопове от успоредни прави, перпендикулярни на вектора $(X\ Y\ Z)$. Безкрайните точки на една равнина образуват нейната *безкрайна права*. Успоредните равнини имат обща безкрайна права.

Множеството от всички безкрайни точки и безкрайни прави в пространството се нарича *безкрайна равнина* на пространството. Нейно уравнение е

$$H = 0.$$

И в пространството при използване на хомогенни координати двойствеността, в случая – между *точки и равнини*, породена от симетричното представяне на координати на точка и коефициенти на равнина в уравненията позволява дадено уравнение и съответно програма, която го решава, да се прилагат за различни задачи.

Например уравнението

$$\begin{vmatrix} p & q & r & s \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix} = 0,$$

е уравнение на

- равнина, ако $(p_i, q_i, r_i, s_i),\ i = 1, 2, 3$ са координати на точки: тогава (p, q, r, s) са променливи координати на точките от равнина
  — през три (крайни) точки, или
  — през две точки, успоредна на направление, зададено с безкрайна точка, или
  — през дадена точка и успоредна на двойка различни направления, зададени чрез две безкрайни точки;
- точка, ако $(p_i, q_i, r_i, s_i),\ i = 1, 2, 3$ са коефициенти на равнини: тогава (p, q, r, s) са променливи коефициенти на равнина през точка, обща за три равнини, две по две неуспоредни и несъвпадащи.

Същото уравнение е фактически *уравнение на права* в следните случаи:

- тълкувано като уравнение на равнина, когато са дадени
  — три крайни точки, две от които съвпадат, или
  — една безкрайна и две съвпадащи крайни точки, или
  — една крайна и две съвпадащи безкрайни точки, т.е. съвпадащи направления (уравнението е на сноп от равнини, минаващи през две точки или минаващи през точка и успоредни на направление – значи уравнение на общата за всички равнини от снопа права);
- тълкувано като уравнение на точка, когато са дадени три равнини, поне две от които не съвпадат, но имащи обща за трите равнини права.

Накрая, все същото уравнение, при частен случай за стойностите на участващите в него коефициенти, може да се тълкува и като уравнение на сноп от равнини през обща точка или сноп от успоредни равнини (безкрайна права).

Фактът за съществуване и единственост на пространствено афинно преобразование, което трансформира четири зададени точки в други четири зададени, позволява въвеждането на барицентрични координати спрямо произволен *тетраедър*, както в равнината това става за произволен триъгълник. В пространството барицентричните координати се определят чрез отношенията на ориентирани *обеми на тетраедри*, съвсем аналогично на равнинния случай, където се използват отношения на ориентирани лица. В сила са и аналогични на равнинния случай твърдения, които правят барицентричните координати удобно средство за представяне и пресмятания в програми, работещи с геометрична информация. Читателят с лекота би могъл сам да формулира някои от тях.

Представяне на пространствени ротации чрез кватерниони

По-горе видяхме, че линейните комплексни уравнения удобно представят еднаквостите, подобията и дори общите афинни преобразования в равнината.

За съжаление, не съществува подобно и също толкова удобно представяне на съответните пространствени трансформации. Все пак за един важен случай, именно ротациите около ос, алгебрата ни дава подходящ апарат: *кватернионното смятане*. Тъй като на свой ред транслациите и хомотетиите се реализират достатъчно просто – съответно чрез събиране на вектори и умножаване на вектор с число, желаното алгебрично удобство се постига в известна степен, поне що се отнася до представяне на подобията.

Тъй като кватернионното смятане е малко популярно у нас (в някои страни то се изучава, наред със смятането с комплексни числа, в гимназиалния курс по математика), ще дадем кратки сведения за него.

В средата на миналия век У. Р. Хамилтън (W. R. Hamilton), опитвайки се да намери „пространствени комплексни числа“, чрез които да се представят геометрични понятия в пространството, открива (след многогодишни усилия) т. нар. *кватерниони* или „четиричленни числа“.

Кватернионите q могат да се определят като линейни комбинации от вида

$$q = a\mathbf{e} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

където a, b, c и d са реални числа, а $\mathbf{e}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ са „единични елементи“ или „единици“. Сбор и разлика на два кватерниона може да се образува като се съберат, съответно извадят съответните коефициенти пред единиците, например $(a_1\mathbf{e} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2\mathbf{e} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) = (a_1 + a_2)\mathbf{e} + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}$.

За единиците са валидни следните правила за умножение:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}^2 = 1 & \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 & \\ \mathbf{ei} = \mathbf{ie} = \mathbf{i} & \mathbf{ej} = \mathbf{je} = \mathbf{j} & \mathbf{ek} = \mathbf{ke} = \mathbf{k} \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} & \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} & \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \end{array}$$

Освен това за всяко реално число x е в сила

$$x\mathbf{e} = \mathbf{e}x, \quad x\mathbf{i} = \mathbf{i}x, \quad x\mathbf{j} = \mathbf{j}x, \quad x\mathbf{k} = \mathbf{k}x.$$

Като добавим към това и разпределителното правило за умножението относно събирането, получаваме, че всеки два кватерниона могат да бъдат умножавани, давайки в резултат също кватернион:

$$\begin{aligned} (a_1\mathbf{e} + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})(a_2\mathbf{e} + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \quad = \\ (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)\mathbf{e} \quad +(a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)\mathbf{i} \\ +(a_1c_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - b_1d_2)\mathbf{j} \quad +(a_1d_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

В кватернионната аритметика $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ играят роля на *имагинерни единици*, а $\mathbf{e} = 1$ е просто реалната единица, така че вместо $a\mathbf{e} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ обикновено се записва $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Трите имагинерни единици заедно с реалната задават база за представяне на кватернионите, както за комплексните числа се използва база от реалната и една имагинерна единица.

От гледна точка на аритметичните действия с кватерниони последните могат да се разглеждат като наредени четворки от реални числа: събиране и умножение на четворки се задават непосредствено като правила за смятане с компонентите им. Така на реалната единица съответства четворката $(1, 0, 0, 0)$ и не се налага да се въвеждат в явен вид имагинерните единици; те се представят съответно с $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$. Тук ще се придържаме към представянето с явно записване на имагинерните единици, което е по-удобно.

За всеки кватернион $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ казваме, че $\mathrm{Re}(q) = a$ е негова реална част, а $\mathrm{Im}(q) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ – негова имагинерна част. Казваме още, че даден кватернион q е *реален*, когато $b = c = d = 0$, т.е. $\mathrm{Im}(q) = 0$ и че е *чисто имагинерен*, когато $\mathrm{Re}(q) = 0$. Реалните кватерниони (както комплексните числа без имагинерна част) отъждествяваме с реални числа ($q \in \mathbf{R^1}$), а чисто имагинерните – с пространствени вектори ($q \in \mathbf{R^3}$).

Да обърнем внимание, че умножението на кватерниони в общия случай е *некомутативно*, но реалните кватерниони (реалните числа) комутират при умножение с всички кватерниони.

Модул на $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ (бележим с $\mid q \mid$) е евклидовата норма на q като четиримерен вектор: $\mid q \mid = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. За всеки чисто имагинерен кватернион (пространствен вектор) q, за който $\mid q \mid = 1$, е изпълнено $q^2 = -1$.

Аналогично на комплексните числа се определят и спрегнати кватерниони. Спрегнат на q е кватернионът $\overline{q} = \mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q)$. В сила е $q\overline{q} = \overline{q}q = \mid q \mid^2$. За всеки два кватерниона q_1 и q_2 е изпълнено $\overline{q_1q_2} = \overline{q}_2\overline{q}_1$.

Обратен (относно умножението) на произволен ненулев кватернион q е

$$q^{-1} = \frac{1}{\mid q \mid^2}\overline{q}.$$

При това q^{-1} е двустранно обратен – $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ – и $(q^{-1})^{-1} = q$. В сила е $(q_1q_2)^{-1} = q_2^{-1}q_1^{-1}$.

Умножението при кватерниони по забележително прост и елегантен начин е свързано с двата вида умножаване при пространствени вектори – скаларно и векторно. Ако $q_1, q_2 \in \mathbf{R^3}$, т.е. q_1 и q_2 са пространствени вектори, намирането на тяхното кватернионно произведение q_1q_2 едновременно дава и скаларното и векторното произведения на същите вектори: първото е $-\mathrm{Re}(q_1q_2)$, а второто – $\mathrm{Im}(q_1q_2)$.

Всеки кватернион q, за който $\mid q \mid= 1$, се представя по точно два начина (с точност до период 2π на аргумента α) във вида

$$q = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{t},$$

където $\mathbf{t} \in \mathbf{R^3}, \mid t \mid= 1$. Двете представяния се получават едно от друго с едновременно обръщане на знаковете на $\mathbf{t}$ и на α. Следователно произволен кватернион q се представя във вида

$$q =\mid q \mid (\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{t}),$$

където $\mathbf{t}$ е както по-горе. Равенството е аналогично на представянето на комплексно число чрез модул и аргумент: и в представянето за q можем да разглеждаме α като аргумент на q, а $\mathbf{t}$ ще наречем *вектор на посоката* или само *посока* на q. Аргументът и посоката обаче не са еднозначно определени, а в описания смисъл – чрез промяна на знаковете им – могат да се изберат по два начина.

Съществува непосредствена връзка между кватернионите и пространствените ротации.

За всеки два кватерниона $q \neq 0$ и $\mathbf{r} \in \mathbf{R^3}$ е изпълнено $q\mathbf{r}q^{-1} \in \mathbf{R^3}$ (спрегнатото произведение на $\mathbf{r}$ с q е пространствен вектор). Така за всеки фиксиран кватернион $q \neq 0$ преобразованието

$$\rho_q : \mathbf{r} \mapsto q\mathbf{r}q^{-1}$$

е трансформация на пространствени вектори. По-точно, ρ_q е пространствена ротация на ъгъл α в положителна посока около насочена по вектор $\mathbf{t}$ ос през т. O, където α и $\mathbf{t}$ са съответно аргументът и векторът на посоката на q.

Съответствие между кватерниони и пространствени ротации е налице и в обратната посока: за всяка ротация съществува (ненулев) кватернион q, за който съответствието ρ_q реализира точно тази ротация. Именно, ротация на ъгъл α в положителна посока около насочена по вектор $\mathbf{t}$, $\mid \mathbf{t} \mid= 1$ ос през т. O се задава с кой да е кватернион с аргумент α и посока $\mathbf{t}$. При това два кватерниона задават една и съща ротация тогава и само тогава, когато са пропорционални един на друг с реален множител.

Да отбележим, че q и $-q$ задават една и съща ротация, а $\overline{q}$ и q^{-1} – обратната на нея. Ако избираме q винаги така, че $\mid q \mid= 1$, ясно е, че всяка ротация се представя по точно два начина: или чрез даден вектор $\mathbf{t}$ и ъгъл α, или чрез обратните по знак на тях (защото въртенето около ос с посока $\mathbf{t}$ е еквивалентно на въртене на допълнителния до пълен ъгъл на дадения, извършвано около същата ос, но в противоположна на $\mathbf{t}$ посока).

Представянето на ротации чрез кватерниони е просто и нагледно, но води до малко по-нискоефективни пресмятания: намирането на образа на дадена точка при ротация чрез пресмятане на спрегнато произведение с кватернион изисква повече числови операции, отколкото умножаването с матрицата на ротация, изведена по-горе. Кватернионното представяне обаче дава възможност значително по-лесно да се пресмятат *композиции от ротации*:

> *ако q_1 и q_2 задават съответно ротациите $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$, кватернионът q_2q_1 задава ротацията $\mathbf{R} = \mathbf{R_2} \circ \mathbf{R_1}$ – композицията на $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$.*

Умножаването на кватерниони е естественият и ефективен формализъм за намиране на ротацията, която е произведение на други две ротации. Всички други начини да се направи това са значително по-трудоемки.

Умножението на кватерниони може да се използва за намиране на ротационната компонента на композицията на еднаквости или подобия (вж. раздела **Ефективно пресмятане** в края на тази глава).

Тъй като *всяка* от имагинерните единици $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ от гледна точка на аритметичните операции е аналогична на имагинерната единица при комплексните числа, като представим произволен кватернион q например във вида

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = (a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i})\mathbf{j}$$

можем да положим $z = a + b\mathbf{i}$ и $w = c + d\mathbf{i}$ и да разглеждаме z и w като комплексни числа, отъждествявайки (в случая) $\mathbf{i}$ с комплексната имагинерна единица. Така получаваме представяне

$$q = z + w\mathbf{j}$$

на q чрез комплексните числа z и w във вид на „бикомплексно“ число.

В това представяне събирането и умножението на кватерниони се свеждат до действия над комплексни числа. Ако $q_1 = z_1 + w_1\mathbf{j}$ и $q_2 = z_2 + w_2\mathbf{j}$, получаваме

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2)\mathbf{j} \\ q_1q_2 &= (z_1z_2 - w_1\overline{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\overline{z}_2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Това позволява с кватернионите да се работи като с двойки комплексни числа (z, w), с действия, определени от горните равенства.

Езиците за програмиране, които разполагат с вграден комплексен числов тип, правят по-лесно реализирането на пресмятания с кватерниони, като действията с тях се изразяват чрез действия с комплексни числа, вместо като действия с четворки реални числа.

Съществува разширение на понятието кватернион (*дуален кватернион*), което позволява чрез спрегнато кватернионно умножение да се изразяват непосредствено винтови движения и дори подобия в пространството. Тук то не се разглежда, тъй като представлява само теоретичен интерес и утежнява практическото пресмятане на тези трансформации.

x.3. Плоски проекции на пространствени обекти

Най-общо, проектирането е трансформация, която намалява размерността на преобразуваните обекти. Пространствените обекти могат да се преобразуват в двумерни, като на всяка точка от пространството по определен начин се съпостави точка от дадена повърхнина. Тази повърхнина се нарича *проекционна повърхнина*.

Обикновено се приема, че проектирането се осъществява чрез система от пространствени линии, наричани *проектори*, и е изпълнено следното:

- през всяка точка от пространството минава единствен проектор;
- всеки проектор пресича проекционната повърхнина в единствена точка;
- проекцията на всяка точка от пространството е прободът на минаващия през нея проектор в проекционната повърхнина.

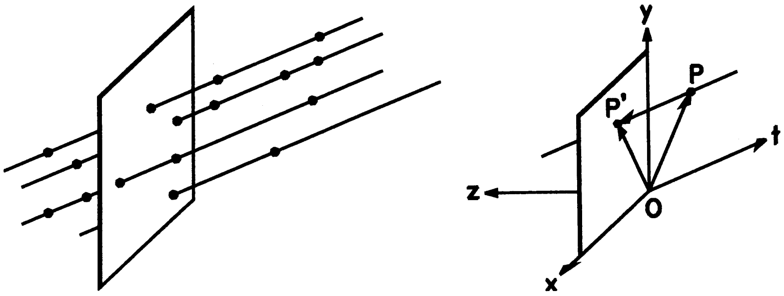
При така направените уточнения е ясно, че всички точки, лежащи върху даден проектор, имат една и съща проекция и че на различните проектори съответстват различни прободи-проекции.

Когато проекционната повърхнина е равнина се получава *равнинно (плоско) проектиране.*

По-нататък ще разглеждаме само равнинно проектиране. Плоската проекция на дадена тримерна сцена може да бъде изобразена на подходящо устройство, като екран, плотер или принтер и затова този вид проектиране е най-често използваният в практиката.

Разбира се, при проектиране част от информацията за взаимното разположение на елементите на пространствена сцена неизбежно се загубва. По равнинен чертеж на даден пространствен обект, изобщо казано, не е възможно той да бъде възстановен. Например, за определяне на припокриването между два обекта или между две стени на едно тяло не са достатъчни само координатите на проекциите, а е необходима и третата координата, задаваща отдалечеността на съответния елемент на сцената от наблюдателя. При все това проектирането, особено в съчетание и с други методи за визуализиране на пространствени обекти, дава добра нагледност, съгласувана със зрителния опит. Някои видове проектиране позволяват да се извършват върху проекцията различни измервания на дължини на изходния обект.

Ще разгледаме два вида равнинно проектиране – *успоредно* и *централно.* При успоредното проектиране проекторите са сноп от успоредни прави, чието направление не е успоредно на проекционната равнина. Точките от пространството се пренасят успоредно на това направление до достигане на равнината (фиг.x.16а).



Фиг. x.16а, 16б

Всяко успоредно проектиране е определено с направлението на проектиране и ориентацията на проекционната равнина. Точното положение на равнината не е съществено, защото във всяка от сноп успоредни равнини резултатът от проектирането е еднакъв.

По-нататък за удобство ще смятаме, че проекционната равнина съвпада с координатната равнина O_{xy}.

Нека $(u\ v\ w)$ е вектор, успореден на направлението на проектиране. Необходимо е да бъде изпълнено $w \neq 0$, в противен случай направлението става успоредно на проекционната равнина и проекторите нямат прободи с нея. Тогава векторът $\mathbf{t} = (t_x\ t_y\ 1)$, където $t_x = \frac{u}{w}$ и $t_y = \frac{v}{w}$, представя същото направление и ако произволна точка $P(x, y, z)$ има проекция $P'(x', y', 0)$ (фиг.x.16б), в сила е векторното равенство

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \lambda\mathbf{t}$$

за някое λ. По компоненти това дава

$$x' = x + \lambda t_x$$
$$y' = y + \lambda t_y$$
$$0 = z + \lambda.$$

Изключването на λ води до равенствата

$$x' = x - t_x z$$
$$y' = y - t_y z.$$

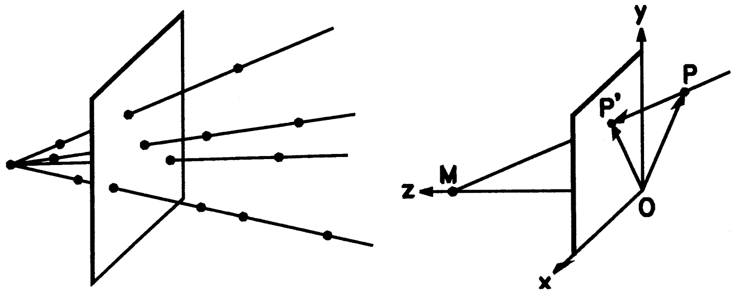
Следователно матрицата на преобразованието е

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Специалният случай $\mathbf{t} = (0\ 0\ 1)$ се нарича *ортогонално проектиране.* При него всяка точка (x, y, z) се проектира в $(x, y, 0)$.

При централното (наричано още *перспективно*) проектиране са фиксирани проекционна равнина и точка на наблюдение, нележаща в нея. Проекторът на всяка дадена точка от пространството е права през точката на наблюдение. Следователно проекторите образуват сноп от прави с обща точка (фиг.х.17а).

Еднаквоголемите пространствени обекти се трансформират различно при това преобразование според отдалечеността им от проекционната равнина: по-отдалечените се трансформират в по-малки. По този начин се имитира свойството *перспективно виждане* на зрението.



Фиг. х.17а, 17б

Разстоянието на точката на наблюдение до проекционната равнина влияе върху степента на перспективно изкривяване на пространството. Колкото това разстояние е по-малко, толкова изкривяването е по-голямо. Обратно, при увеличаване на разстоянието перспективното проектиране се доближава до успоредното. Успоредното проектиране може да се разглежда като частен случай на централното, при който точката на наблюдение е безкрайноотдалечена от проекционната равнина, т.е. тя е безкрайна точка, задаваща направлението на проектиране.

За да намерим зависимостта между координатите на произволна точка и нейния образ при централно проектиране отново можем да смятаме, че проекционната равнина съвпада с координатната равнина O_{xy}. Нещо повече, ще изберем оста O_z такава, че да съдържа точката на наблюдение M. Тогава тази точка има координати $(0, 0, d)$ и $\mid d \mid$ е разстоянието от нея до проекционната равнина (фиг.х.17б).

Произволна точка $P(x, y, z)$, нейната проекция $P'(x', y', 0)$ и точката на наблюдение са колинеарни и следователно е в сила векторното равенство

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \lambda(\mathbf{M} - \mathbf{P})$$

за някое λ. По компоненти:

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda(0 - x) \\ y' &= y + \lambda(0 - y) \\ 0 &= z + \lambda(d - z). \end{aligned}$$

Изключвайки λ, получаваме

$$\begin{aligned} x' &= \frac{d}{d - z}x \\ y' &= \frac{d}{d - z}y. \end{aligned}$$

За да представим преобразованието чрез матрица, трябва да прибегнем до хомогенни координати. Търсената матрица е

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{pmatrix}.$$

Наистина, умножаването на вектор $(X\ Y\ Z\ H)$ с тази матрица дава $\left(X\ Y\ 0\ H - \frac{Z}{d}\right)$, т.е. точката $(x, y, z) = \left(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)$ се трансформира в
$\left(\frac{X}{H - Z/d}, \frac{Y}{H - Z/d}, 0\right) = \left(\frac{d}{d-z}x, \frac{d}{d-z}y, 0\right)$.

Да отбележим, че за разлика от всички разгледани досега матрици умножаването с тази променя мащаба на представяне на точката в хомогенни координати. За да се получат декартовите координати резултатът трябва да бъде разделен на мащабния множител.

И двата разгледани вида проектиране трансформират правите в прави, при това успоредното проектиране запазва и отношението на успоредност между прави. Както при афинните преобразования, това благоприятства пресмятанията, като позволява от образите на възлови точки да се получи цялото изображение.

Успоредното и централното проектиране са *единствените*, които преобразуват прави в прави в следния смисъл: ако едно равнинно проектиране, за което са в сила трите свойства от началото на този раздел, преобразува правите в общия случай в прави, проекторите му са сноп от прави (с крайна или безкрайна обща точка) и следователно то е или успоредно, или централно проектиране.

Успоредно или централно проектиране спрямо произволно зададена проекционна равнина може да се представи като композиция от пространствено движение, довеждащо проекционната равнина в равнината O_{xy} (за централно проектиране – и точката на наблюдение върху оста O_z) и проектиране върху O_{xy}. Така от двата основни вида проектиране се получават някои специални.

Изометричното проектиране е вид успоредно проектиране, при което проекционната равнина е избрана така, че еднаквидълги отсечки, успоредни на трите координатни оси, се изобразяват в също еднаквидълги отсечки. Казано другояче, изометричното проектиране изменя дължините по направление на всяка от координатните оси еднакво. При *диметричното проектиране* се запазват отношенията между дължините само по две от координатните оси. И при диметрията, и при изометрията проекционната равнина може да се избира по различни начини.

Използват се и варианти на перспективното проектиране.

x.4. Преобразованията като смяна на координатната система

При изграждането на геометричен модел в графична програма за представянето на различните обекти – части на модела – обикновено се използват отделни, подходящо избрани за всеки обект координатни системи. Когато е нужно два такива обекта да заемат общо координатно пространство, например при визуализиране, координатната система на единия се съвместява с тази на другия чрез подходяща трансформация. Обикновено тази трансформация е еднаквост, при това, ако двете координатни системи са еднакво ориентирани – еднопосочна.

Когато в геометричния модел един обект съдържа друг като своя част и двата са описани в отделни координатни системи, към първия се съхранява и информация за това, какво преобразование трябва да се извърши над (координатната система на) втория, за да се разположи той по искания начин спрямо съдържащия го. Ако на свой ред се променя и координатната система на *главния* обект – например при преместване в резултат на редактиране на модела или поради включване в друг, още по-общ обект, всички негови подобекти се оказват подложени на произведение от две трансформации и т.н. Колкото по-сложна е йерархията, толкова повече трансформации могат да участват като „множители“ в преобразованието, даващо окончателното положение на даден подчинен обект в равнината или пространството.

В тази глава вече на няколко пъти използвахме трансформации именно с цел смяна на координатната система. Така постъпихме при намиране на общи зависимости чрез привеждане към специален случай за ротация – равнинна и пространствена, мащабиране, симетрии и др.

Смяната на координатите може да се извършва не само чрез еднаквости. На *всяка* трансформация може да се гледа като на смяна на координатната система. Все пак, тази идея се прилага преди всичко във връзка с обратими преобразования, тъй като при тях е възможно възстановяване на изходния вид на обекта по неговия образ.

Да отбележим, че използването на трансформации за изменяне на координатната система не е непременно свързано със съществуването на геометричен модел в явен вид – като даннова структура, на която трансформациите да бъдат елементи. В много случаи създаването на изображение на геометричен обект става по-удобно, ако при чертането частите на дадения обект се съотнесат една с друга чрез подходящи трансформации, локално променящи координатната система.

Езикът PostScript – универсален език за програмиране с основно предназначение описването на (статични) изображения – има развити средства за боравене с еднаквости и с общи афинни трансформации, които се използват почти изключително именно за променяне на координатната система. Това е съществена черта на стила на програмиране чрез този език. Следващият пример, написан на PostScript, показва някои от предимствата на такъв стил.

Програмата чертае правоъгълна мрежа с размери w и h и брой на клетките във всяка хоризонтала и вертикала съответно x и y (всяка клетка има ширина w/x и височина h/y). Предполага се, че координатите на долния ляв ъгъл на мрежата се задават непряко – като местоположение на текущата позиция на писеца.

```
gsave                                                          % 1
matrix currentmatrix                                           % 2
currentpoint translate                                         % 3
w x div h y div scale                                          % 4
newpath                                                        % 5
  matrix currentmatrix                                         % 6
  x 1 add  {0 0 moveto  0 y lineto  1 0 translate}  repeat     % 7
  1 index setmatrix  stroke                                    % 8
  setmatrix                                                    % 9
  y 1 add  {0 0 moveto  x 0 lineto  0 1 translate}  repeat     % 10
  setmatrix  stroke                                            % 11
grestore                                                       % 12
```

На ред 3 в програмата координатната система се премества така, че началото ѝ да съвпадне с ъгъла на мрежата – текущата точка. След това (ред 4) координатната система се мащабира по такъв начин, че пресметнатите размери на клетките на мрежата да бъдат равни на единични разстояния по двете координатни оси. Вертикалните и хоризонтални линии на мрежата се построяват в циклите `repeat` съответно на редове 7 и 10. В тялото на всеки от циклите се извършват локални транслации на координатната система, така че всяка вертикала се построява по координати $(0, 0)$ и $(0, y)$ на крайните ѝ точки, а всяка хоризонтала има краища $(0, 0)$ и $(x, 0)$. Чрез командата на ред 6 се запомня, а на ред 9 – преди построяването на хоризонталите – се възстановява координатната система, така че промените върху нея в резултат на транслациите в първия цикъл да не влияят на правилното изпълнение на втория.

Да отбележим, че фактическото начертаване на вертикалите и хоризонталите става чрез отделни команди `stroke` (редове 8 и 11) след построяването на линиите: построенията само създават т. нар. предизображение, съдържанието на което се визуализира чрез `stroke`. (Командата на ред 5 задава начало на ново предизображение.) Непосредствено преди всяко визуализиране чрез `setmatrix` се възстановява съхранената в самото начало (ред 2) координатна система, текуща преди изпълнението на горния фрагмент. Така при чертането мащабирането от ред 4 не влияе върху дебелината на чертожната линия: тази дебелина се интерпретира винаги в контекста на текущата координатна система, а в нашия случай се смята, че е избрана предварително.

Накрая, командите на първия и на последния ред на горния фрагмент служат съответно за съхраняване и за възстановяване на общия графичен контекст. Графичният контекст включва стойностите на редица параметри, част от които програмата променя: координатна система, текуща позиция на писеца и предизображение. Чрез възстановяването на контекста се постига независимост на останалата част от програмата от дадения фрагмент, чертаещ мрежата.

Да отбележим няколко важни момента, свързани с показания стил на програмиране.

- Използването на подходящи трансформации за смяна на координатната система дава възможност за просто и естествено задаване на построения. Не се налага въвеждането на помощни променливи или на утежнени управляващи конструкции. Например вместо да се използват цикли с управляваща променлива-брояч, всеки от двата цикъла в примера непосредствено съответства на командата „направи $x+1$ (или $y+1$) пъти начертаване на отсечка и преместване до началото на следващата“. Не се извършват и каквито и да било аритметични пресмятания, свързани с начертаването: всичко необходимо се постига чрез трансформациите.
- Програмата от примера показва типично и за много други случаи функционално разбиване на построяването на две следващи едно друго, ясно разделени действия:
  — *избор на метрични характеристики* – местоположение и размери – и
  — *собствено построяване, отразяващо само структурата* на построявания обект, в случая – броя вертикали и хоризонтали на мрежата; в примера при построяването (редове 6-11 и по-специално 7 и 10 – двата цикъла) променливи стойности са само x и y – именно броя линии по двете направления.

  За сравнение да разгледаме програмен фрагмент, решаващ същата задача при „неподвижна“ координатна система:

  ```
  for (box_w=w/x,i=0; i<x; ++i)  {
    moveto(current_x+i*box_w,current_y);
    lineto(current_x+i*box_w,current_y+h);
  }
  for (box_h=h/y,i=0; i<y; ++i)  {
    moveto(current_x,current_y+i*box_h);
    lineto(current_x+w,current_y+i*box_h);
  }
  ```

  Характерната за езика C компактност на изразяването първоначално създава впечатлението, че това решение е „по-малко“ и значи „по-добро“. Всъщност то съдържа приблизително същия брой елементи, както по-горния пример, но няма нито простотата, нито функционалното разделяне и ясност, които са налице в него.
- Външният контекст – този на основната програма – от една страна се запазва, както видяхме, а от друга – сам той влияе на извършваното построение. В случая това се отнася до
  — „външното“ задаване на дебелина на писеца *преди чертането на мрежата*,

както бе описано, и

— отнасянето на цялото построение към текущата координатна система; това позволява построяваната мрежа да има произволна големина и съотношение на размерите, може клетките да не са вертикално-хоризонтално ориентирани, а произволно наклонени и дори неправоъгълни (при координатна система с неортогонални оси).

x.5. Ефективно пресмятане на геометричните преобразования

От гледна точка на ефективността на пресмятанията решаването на различни задачи, свързани с геометрични преобразования, трябва да се опира на различни подходящи техни представяния.

Например, по-ефективно е намирането на декартовите координати на съответната на дадена точка при определена афинна трансформация да става не чрез умножаване с матрица, а като се използват общите уравнения на афинитет. При пресмятания за равнинни точки в първия случай се извършват девет умножения на числа, а във втория – само четири. Разликата възниква поради това, че матрицата на всяко афинно преобразование съдържа в последния си ред една единица и две или три (съответно за равнинния и за пространствения случай) нули, умножаването с които е тривиална операция.

Тази разлика в ефективността се проявява толкова повече, колкото по-голям брой координатни вектори подлежат на преобразуване в програмата.

Подходящо решение за равнинни афинитети може да бъде и представянето им чрез смесени линейни комплексни уравнения, а в частния случай за еднаквости и подобия – чрез линейни комплексни уравнения. Освен ефективността на пресмятанията, това представяне има и други предимства, както посочихме при разглеждането му в тази глава.

В някои случаи пресмятанията могат да се ускорят, като се използват подходящи геометрични зависимости.

От алгебричното представяне на равнинна ротация с произволен център – независимо кое именно – се вижда, че тя може да се разложи в композиция от ротация на *същия ъгъл* около центъра на координатната система и подходяща транслация. Например векторно-матричното уравнение се преобразува така:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{C} + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{C}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + (\mathbf{C} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{T_1}.$$

Обратната на $\mathbf{R}$ ротация се представя в същата форма с уравнението:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} + \mathbf{R^{-1}} \cdot (\mathbf{P'} - \mathbf{C}) = \mathbf{R^{-1}} \cdot \mathbf{P'} + (\mathbf{C} - \mathbf{R^{-1}} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{R^{-1}} \cdot \mathbf{P'} + \mathbf{T_2},$$

където $\mathbf{R^{-1}}$ е ротация на обратния ъгъл.

В смисъла на това представяне можем да смятаме, че всяка еднопосочна еднаквост има ротационна и транслационна компоненти, като ротационната е винаги в „каноничен“ вид (централна). При това ротационната компонента на обратната на дадена еднаквост има ъгъл на въртене, обратен на този на дадената.

Ако $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$ са еднопосочни еднаквости, за да намерим ротационната компонента на произведението им, достатъчно е да съберем ъглите на техните ротационни компоненти, без да е нужно да знаем самото произведение.

Повтаряйки горното за хомотетии вместо ротации, виждаме, че всяка хомотетия се представя като произведение на хомотетия със същия коефициент, но спрямо началото на координатите, и транслация. Следователно за еднопосочните подобия можем да разглеждаме хомотетична, ротационна и транслационна компоненти, при което първата от тях можем винаги да представим с положителен коефициент (при преминаване към такова представяне, ако имаме хомотетия с отрицателен коефициент, вземаме абсолютната му стойност и увеличаваме ъгъла на ротационната компонента с 180°).

Ако $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$ са еднопосочни подобия, за да намерим хомотетичната или ротационната компоненти на композицията им, достатъчно е да знаем само съответните компоненти на $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$, а не (представяне на) самата композиция. Намирането става само с една операция умножение (за хомотетия) или събиране (за ротация). В частност, по този начин лесно определяме кога произведението на $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{E_2}$ *не съдържа* ротация (има ъгъл на въртене 0) или хомотетия (съответният коефициент е 1).

За аналогично представяне в каноничен вид на разнопосочните подобия е нужно да изберем за „канонична“ коя да е осева симетрия, например тази спрямо абсцисата, и да разглеждаме всяко подобие като композиция от тази симетрия и съответна еднопосочна еднаквост.

По подобен начин може да се постъпи и при пространствените еднаквости и подобия. Каноничната ротация в случая е ротация около ос през началото на координатната система. Сумарните ротационни компоненти при композиране на еднаквости или подобия се намират чрез умножаване *само* на ротации с оси, минаващи през обща точка (началото). За последното, както видяхме, ефективно може да се използва кватернионното смятане.