Геометрични пресмятания и алгоритми

Бойко Банчев

boykobb@gmail.com

Институт по математика и информатика – БАН

9 януари 2023

Същност на геометричните пресмятания. Езикови средства

Ефикасно изразяване на свойства, отношения и действия с точки, отсечки, прави, окръжности, многоъгълници и др.

Синтетична геометрия.

Комплексна аритметика.

Аналитична (по същество – „координатна“) геометрия.

Векторна алгебра.

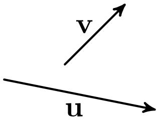
Геометрична алгебра (ориентирани величини с всякакви размерности).

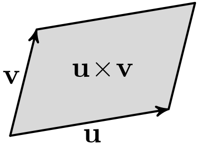
Предшестване, лицево произведение и отвес

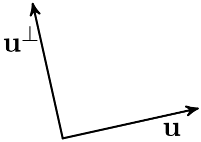
Казваме, че една посока <u>предшества</u> друга, ако втората е „към лявата полуравнина“ относно коя да е права с първата посока. (Все едно е какво наричаме „ляво“, стига да не променяме веднъж направения избор.)

<u>Лицево произведение</u> $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ на ненулеви неуспоредни вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ наричаме лицето на успоредника, образуван от техни представители – положително, ако посоката на $\mathbf{u}$ предшества тази на $\mathbf{v}$, иначе отрицателно. В останалите случаи приемаме $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=0$.

<u>Отвес</u> на вектор $\mathbf{u}$ е векторът $\mathbf{u}^{\perp}$, за който $|\mathbf{u}^{\perp}|=|\mathbf{u}|$, посоките на двата вектора са взаимно отвесни и тази на $\mathbf{u}$ предшества другата.







Геометричен смисъл на $\cdot$ и $\times$

Установяване на остър, прав и тъп ъгъл:
знакът на $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.

Установяване на успоредност и предшестване:
знакът на $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Големина на проекция на отсечка:
от $\mathbf{AB}\cdot\mathbf{u}$ като проекция на AB върху направлението на $\mathbf{u}$.

Големина на лице на триъгълник и успоредник:
$|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|$ или половината от това.

Ориентация на триъгълник и други фигури:
знакът на $\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}$ и пр.

Без $\times$ нямаме пряк алгебричен критерий за основно свойство – успоредност! (А също за ориентираност.)

Свойства на линейните операции и $\cdot$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u}\\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\
\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) &= \mathbf{0}\\
\mathbf{u}-\mathbf{v} &= \mathbf{u}+(-\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)\,\mathbf{u} &= -\mathbf{u}\\
k\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\,\mathbf{u}+k\,\mathbf{v}\\
(k+k')\,\mathbf{u} &= k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{u}\\
k\,(k'\,\mathbf{u}) &= (k\,k')\,\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\\
(k\,\mathbf{u}+k'\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+k'(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\\
|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| &\leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})
\end{aligned}
$$

Свойства на $\perp$ и $\times$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}^\perp)^\perp &= -\,\mathbf{u} \\
(k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{v})^\perp &= k\,\mathbf{u}^\perp + k'\,\mathbf{v}^\perp \\
\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} &= -\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^\perp \\
\mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \\
(k\,\mathbf{u} + k'\,\mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= k\,(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + k'(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} \\
\mathbf{u}^\perp \times \mathbf{v} &= -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}^\perp) \;=\; -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\
\mathbf{u}^\perp \times \mathbf{v}^\perp &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\
|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| &\leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \\
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}
$$

В последното равенство ъгълът е именно от $\mathbf{u}$ към $\mathbf{v}$, *не между* тях.

Ориентирано лице на три-, четири- и многоъгълник

Означаваме $[ABC] = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC}$ (ориентираното лице на успоредника, образуван от $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$, или все едно удвоеното ориентирано лице на $\triangle ABC$).

За кои да е три точки A, B и C е вярно:

$$\begin{aligned}
[ABC] &= \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} \\
&= \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \\
&= [BCA] = [CAB] = -[ACB] = -[BAC] = -[CBA].
\end{aligned}$$

Означавайки с $[ABCD]$ удвоеното ориентирано лице на четириъгълника $ABCD$, лесно намираме

$$[ABCD] = \mathbf{AC} \times \mathbf{BD} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{D} + \mathbf{D} \times \mathbf{A}.$$

Изобщо, удвоеното ориентирано лице $[P_1 P_2 \dots P_n]$ на кой да е прост (без самопресичане) многоъгълник $P_1 P_2 \dots P_n$ $(n \geq 3)$ е

$$[P_1 P_2 \dots P_n] = \mathbf{P_1} \times \mathbf{P_2} + \mathbf{P_2} \times \mathbf{P_3} + \cdots + \mathbf{P_n} \times \mathbf{P_1}$$

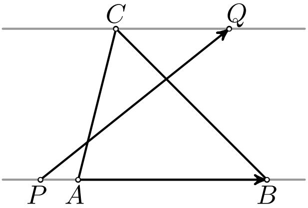
и за коя да е точка X е вярно:

$$[P_1 P_2 \dots P_n] = [X P_1 P_2] + [X P_2 P_3] + \cdots + [X P_n P_1].$$

Продължение

За кои да е точки A, B и C, всяка точка $P \in AB$ и всяка точка Q на правата през C, успоредна на AB е вярно

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{PQ} = [ABC].$$



Равенството обобщава формулите за лице на успоредник и триъгълник чрез умножаване на основа и височина.

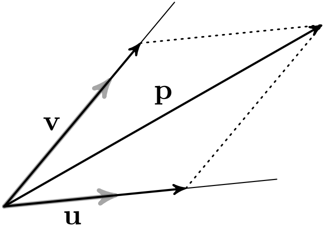
Разлагане на вектор по направления

Всеки вектор $\mathbf{p}$ *се разлага по кои да е два други* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$, *за които* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq 0$:

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{\mathbf{p}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{p}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

⌜ Следва непосредствено от

$$\mathbf{p} \;=\; k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{v} \quad \left|\; \begin{matrix}\times\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\times\end{matrix}\right. . \quad ⌟$$



Съставките на разлагането не зависят нито от големините, нито от конкретните посоки на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а само от направленията им. (Разлагането е всъщност по *направленията* на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а не по самите вектори.)

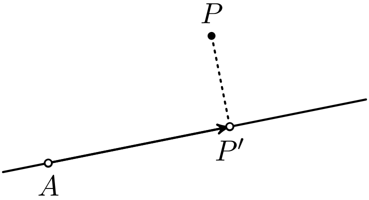
Важен частен случай е $\mathbf{v}=\mathbf{u}^{\perp}$:

$$\mathbf{p} \;=\; (\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}}^{\perp}$$

($\hat{\mathbf{u}}$ е единичен вектор с посоката на $\mathbf{u}$.)

Ориентирано разстояние и проекция

Разглеждаме права $(A, \mathbf{u})$ и точка P.



Ориентираното разстояние на P до правата – положително, ако P е отляво на правата – е

$$d = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{AP}}{|\mathbf{u}|} = \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{AP}.$$

Проекцията на P е

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP}}{\mathbf{u}^2}\,\mathbf{u} = \mathbf{A} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}.$$

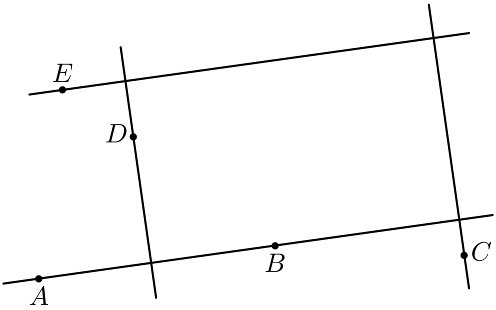
И двете са преки следствия от разлагането на $\mathbf{AP}$ по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^{\perp}$.

Пример: лице на правоъгълник, определен от пет точки

Точките A и B лежат на права, съдържаща основата на правоъгълника, а C, D и E – на прави през съседните и срещулежащата страна. (Предполагаме, че е налице $[ABE] \neq 0$ и $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{CD} \neq 0$.) Търсим ориентираното лице S на правоъгълника – положително, когато E е отляво на $\mathbf{AB}$.

От намерените формули за проекция и ориентирано разстояние следва, че големината на основата на правоъгълника е $|\widehat{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{CD}|$, а ориентираното разстояние на E до правата AB е $\widehat{\mathbf{AB}} \times \mathbf{AE}$, следователно

$$S = |\widehat{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{CD}|\,(\widehat{\mathbf{AB}} \times \mathbf{AE}).$$



Уравнения на права

Уравнение на правата през точки A и B се получава от изразеното чрез $\times$ условие $AP \| AB$ за точките P от правата:

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AP} \; = \; 0$$

или

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{P} \; = \; c, \qquad \text{където} \quad c \; = \; \mathbf{AB} \times \mathbf{A}\,.$$

За права, успоредна на вектор $\mathbf{u}$ и минаваща през точка A:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{AP} \; = \; 0$$

или

$$\mathbf{u} \times \mathbf{P} \; = \; c, \qquad \text{където} \quad c \; = \; \mathbf{u} \times \mathbf{A}\,.$$

Параметрично уравнение:

$$\mathbf{P} \; = \; \mathbf{A} + s\,\mathbf{AB} \; = \; (1-s)\mathbf{A} + s\,\mathbf{B}$$

или

$$\mathbf{P} \; = \; \mathbf{A} + s\,\mathbf{u}\,.$$

Уравнения на прави, зададени чрез условие

Права през точка A под прав ъгъл към вектор $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{AP} = 0 \qquad \text{или} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{A} + s\,\mathbf{u}^{\perp}.$$

Права през A под ъгъл φ към (посоката на) вектор $\mathbf{u}$:

$$(\cos\varphi\,\mathbf{u} + \sin\varphi\,\mathbf{u}^{\perp}) \times \mathbf{AP} = 0\,.$$

Вътрешна и външна ъглополовящи през A в $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}(b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) \times \mathbf{AP} &= 0\,,\\ (b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{AP} &= 0\,.\end{aligned}$$

НДУ вектор $\mathbf{u}$ да е успореден на <u>коя да е</u> от двете ъглополовящи през A:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{u} \times \mathbf{c}) = 0.$$

Решаване на уравнения

$$s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{v} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{u} = \frac{s\,\mathbf{v} - t\,\mathbf{v}^{\perp}}{s^2 + t^2}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{p} = s \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} = \frac{s}{u^2}\,\mathbf{u}^{\perp} + k\,\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = s \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p} = \frac{s}{u^2}\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u}^{\perp}$$

Решаване на система от уравнения

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{u}\times\mathbf{p}=s\\ \mathbf{v}\times\mathbf{p}=t\end{array}\right.\quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{s\,\mathbf{v}-t\,\mathbf{u}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$$

Еквивалентността следва пряко от разлагането на неизвестното $\mathbf{p}$ по $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Оттук на свой ред, използвайки заменяемостта между $\times$ и $\cdot$, следват

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{u}\times\mathbf{p}=s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}=t\end{array}\right.\quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{v}^{\perp}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}$$

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}=s\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}=t\end{array}\right.\quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{(t\,\mathbf{u}-s\,\mathbf{v})^{\perp}}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}$$

В частност първото за $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ е:

$$\left|\begin{array}{l}\mathbf{u}\times\mathbf{p}=s\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{p}=t\end{array}\right.\quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{p}=\frac{t\,\mathbf{u}+s\,\mathbf{u}^{\perp}}{\mathbf{u}^{2}}$$

Всяко векторно линейно уравнение е уравнение на права.

Параметричното уравнение на същата права – това е тъкмо решението на векторното линейно уравнение.

Радиусвекторът на пресечницата на прави е решението на системата векторни линейни уравнения на правите.

Продължение

Правите $(A, \mathbf{u})$ и $(B, \mathbf{v})$ имат уравнения съответно $\mathbf{u} \times \mathbf{AP} = 0$ и $\mathbf{v} \times \mathbf{BP} = 0$. Като ги приведем във вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{P} &= \mathbf{u} \times \mathbf{A} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{P} &= \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

и за тази система приложим намерената формула за решение, получаваме, че пресечницата се задава с

$$\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{A})\,\mathbf{v} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,\mathbf{u}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

На свой ред оттук, избирайки съответно A и B за отправна точка на радиусвекторите, непосредствено получаваме

$$\mathbf{AP} = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{v}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{u} \qquad \mathbf{BP} = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{u}}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{v}.$$

Следствие: забележителни точки на $\triangle ABC$

В $\triangle ABC$ означаваме страните $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ и като вектори $\mathbf{a} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{CA}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{AB}$. M_a, M_b и M_c са средите на страните. $S = [ABC]$.

Медицентър: $\mathbf{G} = \dfrac{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}}{3}$.

Ортоцентър – пресечница на височините:

$$\mathbf{H} = -\frac{((\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{B} + (\mathbf{C}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{C})^{\perp}}{S} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{S}\,\mathbf{a}^{\perp}.$$

Център на $\bigcirc ABC$ – пресечница на симетралите:

$$\mathbf{O} = \frac{(\mathbf{A}^2\,\mathbf{a} + \mathbf{B}^2\,\mathbf{b} + \mathbf{C}^2\,\mathbf{c})^{\perp}}{2\,S} = \mathbf{M_a} - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{2\,S}\,\mathbf{a}^{\perp}.$$

Център на $\bigcirc abc$ – пресечница на ъглополовящите:

$$\mathbf{I} = \frac{a\,\mathbf{A} + b\,\mathbf{B} + c\,\mathbf{C}}{a+b+c} = \mathbf{A} + \frac{b\,\mathbf{c} - c\,\mathbf{b}}{a+b+c}.$$

Забележка

Нерядко точките (радиусвекторите) се представят като линейни комбинации не от други радиусвектори, а от вектори-страни или техни отвеси ($^\perp$), или от отвеси на радиусвектори на точки.

Уравнения на окръжност по център и радиус и по диаметър

По зададени център C и радиус r:

$$CP = r \quad \Longrightarrow \quad CP^2 = r^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{CP}^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{P}^2 - 2\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}) + \mathbf{C}^2 - r^2 = 0.$$

Изобщо, уравнение от вида

$$\mathbf{P}^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{P} + k = 0.$$

е (при $\mathbf{u}^2 > s$) уравнение на окръжност с център $\mathbf{u}$ и радиус $\sqrt{\mathbf{u}^2 - s}$.

По зададен диаметър AB:

$$\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP} \;=\; 0.$$

($\mathbf{AP}\cdot\mathbf{BP} \leq 0$ е уравнение на кръга.)

Уравнение на окръжност и кръг по три точки

Нека точките са A, B и C (не на една права). Ако O е центърът на окръжността, НДУ точката P да е на нея е $OP = OA$ или все едно $\mathbf{OP}^2 - \mathbf{OA}^2 = 0$. Замествайки $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$, това НДУ става

$$\mathbf{AP} \cdot (\mathbf{AP} + 2\,\mathbf{OA}) \;=\; 0.$$

От изразяването на $\mathbf{O}$ (виж по-горе) е вярно

$$2\,\mathbf{AO} = \mathbf{AB} + \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{\mathbf{CA} \times \mathbf{CB}}\, \mathbf{AB}^{\perp}$$

и оттук

$$\mathbf{AP} + 2\,\mathbf{OA} \;=\; \mathbf{BP} - \frac{\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB}}{\mathbf{CA} \times \mathbf{CB}}\, \mathbf{AB}^{\perp}.$$

Замествайки този израз в горното НДУ, в него вече не участва O, а само A, B и C: това е уравнение на окръжността през A, B и C за променлива точка P. Вземайки предвид $\mathbf{AP} \cdot \mathbf{AB}^{\perp} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AP} = [ABP] = \mathbf{PA} \times \mathbf{PB}$, уравнението добива вида

$$(\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}) - (\mathbf{CA} \times \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB}) \;=\; 0.$$

Уравнение на *кръга* е

$$((\mathbf{CA} \cdot \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}) - (\mathbf{CA} \times \mathbf{CB})\,(\mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB}))\,\mathsf{sign}[ABC] \;\geq\; 0.$$

Забележка

Съществуват и други уравнения на окръжност по три зададени точки, удобни за различни цели.

Почти всички непосредствено се преобразуват и в уравнения на кръг.

Някои от уравненията са едновременно и уравнения на права, ако трите точки са сълинейни.

Като цяло – *обратно на разпространената представа* – **векторите са особено удобни за пресмятания с окръжности**, включително за намиране на пресечници, на инверсни образи, полярност и др. под.

Съобщност на три прави

Ако правите са зададени с $(P_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2, 3$, НДУ за съобщност (наличие на обща точка или общо направление, включително съвпадане на две или и трите прави) са например

$$(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2})(\mathbf{u_3} \times \mathbf{P_3}) + (\mathbf{u_2} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_1} \times \mathbf{P_1}) + (\mathbf{u_3} \times \mathbf{u_1})(\mathbf{u_2} \times \mathbf{P_2}) = 0$$

и

$$(\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_2})(\mathbf{u_3} \times \mathbf{P_1 P_3}) - (\mathbf{u_1} \times \mathbf{u_3})(\mathbf{u_2} \times \mathbf{P_1 P_2}) = 0\,,$$

а ако правите са A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, НДУ е също

$$[A_1B_1B_2][A_2C_1C_2] - [A_1C_1C_2][A_2B_1B_2] \;=\; 0\,.$$

Лице на триъгълник, зададен чрез три прави

Ако правите са $(P_1, \mathbf{u_1})$, $(P_2, \mathbf{u_2})$ и $(P_3, \mathbf{u_3})$, лицето е

$$\frac{1}{2}\frac{((\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{P_3})+(\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_1}\times\mathbf{P_1})+(\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{P_2}))^2}{(\mathbf{u_1}\times\mathbf{u_2})(\mathbf{u_2}\times\mathbf{u_3})(\mathbf{u_3}\times\mathbf{u_1})}$$

Извежда се, като намерим пресечниците и изразим чрез тях ориентираното лице.

Пресичане на отсечки

Нека точките A_1, A_2, B_1 и B_2 са такива, че никои три от тях не лежат на една права. Тогава отсечките A_1A_2 и B_1B_2 се пресичат, когато и само когато

$$[A_1A_2B_1][A_1A_2B_2] < 0 \quad \& \quad [B_1B_2A_1][B_1B_2A_2] < 0.$$

Ако отсечките наистина имат обща точка, нейният радиусвектор е

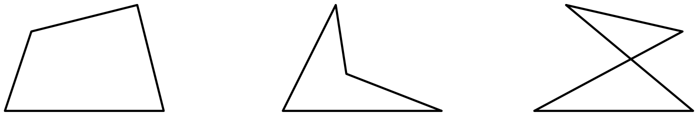
$$\mathbf{A_1} + \frac{[B_1B_2A_1]}{[B_1B_2A_1] - [B_1B_2A_2]}\,\mathbf{A_1A_2},$$

което е всъщност пресечницата на правите $A_1A_2 \cap B_1B_2$, но в този вид участващите в израза лица са вече пресметнати.

Така намирането на пресечница се спестява, когато то е ненужно (пресичат се правите, но не отсечките). Самото намиране е икономично, ползвайки вече направените при проверката за съществуване пресмятания.

Вид на четириъгълник

Кои да е четири точки, последователно свързани с отсечки в някакъв ред, могат да образуват фигура с различна форма. Предполагайки, че никои три от точките не лежат на една права, фигурата е изпъкнал, неизпъкнал или непрост четириъгълник.



Задачата за определяне кой от случаите е налице на практика съвпада с тази за установяване дали две отсечки се пресичат.

Дали четириъгълникът е квадрат, правоъгълник, успоредник и пр., както и ред други свойства, също се описват и извеждат удобно именно на езика на векторната алгебра.

Афинни преобразования

Следното просто следствие от разлагането на вектор дава образа P' на точка P при какво да е афинно преобразование, зададено с реперите (афинни к. с.) $(A, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $(A', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{A}' + \frac{(\mathbf{AP} \times \mathbf{v})\,\mathbf{u}' + (\mathbf{u} \times \mathbf{AP})\,\mathbf{v}'}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

Съответното и по-общо преобразование на вектори се определя само от *векторните* репери $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$:

$$\mathbf{p}' = \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{v})\,\mathbf{u}' + (\mathbf{u} \times \mathbf{p})\,\mathbf{v}'}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}.$$

Еднаквости, подобия, отвесна и афинна симетрии и други частни случаи получават лаконични и удобни формули – прости следствия от горните.

Уравнения на пространствени обекти
и отношения между тях

Разлагане на вектор по два или три други

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{[\mathbf{p}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]\mathbf{u} + [\mathbf{u}\,\mathbf{p}\,\mathbf{w}]\mathbf{v} + [\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{p}]\mathbf{w}}{[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}]} \qquad \text{при} \quad [\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] \neq 0$$

В частност, разлагане по $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ (при $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{v}$):

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{[\mathbf{p}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\,\mathbf{u} + [\mathbf{u}\,\mathbf{p}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\,\mathbf{v} + [\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{p}]\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2}$$

и ако $\mathbf{p}$ е равнинно успореден на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ($[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{p}] = 0$):

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{[\mathbf{p}\,\mathbf{v}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\,\mathbf{u} + [\mathbf{u}\,\mathbf{p}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\,\mathbf{v}}{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})^2}.$$

Разлагане на вектор, успоредно на един и отвесно на друг

Ако $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\neq 0$, кой да е вектор $\mathbf{p}$ се разлага по единствен начин на вектор $\parallel\mathbf{u}$ и вектор $\perp\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}\,\mathbf{u} + \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n}$$

(успоредно на права с носещ вектор $\mathbf{u}$ и отвесно към равнина с нормален вектор $\mathbf{n}$).

При $\mathbf{u}=\mathbf{n}$ това е разлагане на успоредна и отвесна на $\mathbf{u}$ части:

$$\mathbf{p} \;=\; \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{u}^2}\,\mathbf{u} + \frac{1}{\mathbf{u}^2}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\times\mathbf{u} \;=\; (\hat{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}}\times\mathbf{p})\times\hat{\mathbf{u}}$$

(успоредно и отвесно на права или направление разлагане).

Уравнения на права

Права $(A, \mathbf{u})$ през точка A и $\|\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{AP} = \mathbf{0} \qquad \text{(пряко)}$$

или

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + s\,\mathbf{u} \qquad \text{(параметрично, с параметър } s\text{).}$$

($\mathbf{P}$ е радиусвекторът на променливата точка.)

Равнина $(A, \mathbf{n})$ през точка A и $\perp \mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{AP} = \mathbf{0} \qquad \text{(пряко).}$$

Ако вместо нормален вектор $\mathbf{n}$ са дадени два успоредни на равнината и неуспоредни помежду си вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, равнината е $(A, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ и има уравнения

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{AP}] = 0 \qquad \text{(пряко)}$$

и

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \qquad \text{(параметрично, с параметри } s \text{ и } t\text{).}$$

Равнината, съдържаща права $(A, \mathbf{u})$ и точка B, която не е върху правата, е $(A, \mathbf{u} \times \mathbf{AB})$ или все едно $(B, \mathbf{u} \times \mathbf{AB})$.

Проекции върху равнина

Проекцията на вектор $\mathbf{p}$ върху равнина $\perp\mathbf{n}$ при проектиране $\|\mathbf{u}$:

$$\frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}(\mathbf{u}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n} \;=\; \mathbf{p}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}\,\mathbf{u}.$$

В частност, отвесна проекция върху равнина $\perp\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}}{\mathbf{n}^2}\,\mathbf{n} \;=\; \mathbf{p}-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}}.$$

За точка P – точката с радиусвектор $\mathbf{P}-\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{AP}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}}\,\mathbf{u}$,
а при отвесно проектиране $(\mathbf{u}=\mathbf{n})$:

$$\mathbf{P}-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{AP}}{\mathbf{n}^2}\,\mathbf{n} \;=\; \mathbf{P}-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{n}}.$$

Ориентираното разстояние на P до равнината по направлението на $\mathbf{u}$ – положително, когато P е в полупространството относно равнината, в което сочи $\mathbf{n}$ – е $\dfrac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{AP}}{|\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{u}}|}$, а отвесното ориентирано разстояние е $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{AP}$.

Отвесни проекции върху права

Отвесната проекция на вектор $\mathbf{p}$ върху права $(A, \mathbf{u})$ е

$$(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p})\,\hat{\mathbf{u}},$$

а на точка P върху правата – точката с радиусвектор

$$\mathbf{A} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{AP})\,\hat{\mathbf{u}}.$$

Разстоянието между точката и правата е $|\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{AP}|$.

Взаимно положение на две прави

Правите $(A, \mathbf{u})$ и $(B, \mathbf{v})$:

- са успоредни при $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (съвпадат, ако освен това $\mathbf{u} \times \mathbf{AB} = \mathbf{0}$),
- се пресичат при $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{AB}] = 0$ и
- са кръстосани, ако $[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{AB}] \neq 0$.

Когато правите са кръстосани, съществува единствена права, която пресича всяка от двете под прав ъгъл. Тя е успоредна на $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ и минава през точките с радиусвектори

$$\mathbf{A} + \frac{[\mathbf{v}\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\ \mathbf{AB}]}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2}\,\mathbf{u} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{B} + \frac{[\mathbf{u}\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\ \mathbf{AB}]}{(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^2}\,\mathbf{v}$$

– съответно върху първата и втората от дадените прави. Разстоянието между тези точки, т. е. между правите, е

$$\left|(\widehat{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}) \cdot \mathbf{AB}\right|.$$

Когато двете прави се пресичат, посочените две точки съвпадат помежду си и са пресечницата на правите.

Център на описана сфера

Центърът на описаната около тетраедъра $ABCD$ сфера (пресечницата на равнините през средите на AB, AC и AD, отвесни към тези отсечки) има радиусвектор

$$\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{AD} \cdot (\mathbf{AZ} + \mathbf{DZ})}{2\,[\mathbf{AB}\ \mathbf{AC}\ \mathbf{AD}]}\,\mathbf{AB} \times \mathbf{AC},$$

където

$$\mathbf{Z} \ = \ \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{2} + \frac{\mathbf{AC} \cdot \mathbf{BC}}{2\,(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC})^2}\,(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \times \mathbf{AB}$$

е радиусвекторът на центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Център на вписана сфера

Радиусвекторът на центъра на сферата, вписана в тетраедъра $ABCD$ е

$$\mathbf{D} + \frac{\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{0} \cdot \mathbf{AD}}{(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{3} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{0}) \cdot \mathbf{u}} \, \mathbf{u} \, ,$$

където

$$\mathbf{u} \; = \; \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1} \times \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2} + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2} \times \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{3} + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{3} \times \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1} \, ,$$

а $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$, $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{3}$ са единичните нормални вектори на равнините ABC, DBC, DCA и DAB, насочени към вътрешността на тетраедъра.

ForGe: геометричен калкулатор и чертожник

Два езика, съвместени в един:

- за пресмятания и (абстрактни) геометрични построения;
- за построяване на геометрични чертежи.

Първото е въплъщение на специално разработена за целта разновидност на векторната алгебра в равнината. Второто е „геометричен предпроцесор“ към графичния език SVG.

Пораждaният чертеж може да се изведе във файл във формат SVG, тъй че по-сетне да се използва самостоятелно като илюстрация в печатен документ, уебсреда и др.

Налице е високо технологично качество на така получаваните чертежи.

Ефикасното използване на ForGe, а и изобщо на векторната алгебра предполага познаването и прилагането на резултатите в тази област за решаване на геометрични задачи.

Езикът ForGe: съдържание

Сметачната част съдържа 75 едно- и двуаргументни операции с

числа,
булеви стойности,
равнинни вектори,
текстови низове и
редици.

Всяка стойност, проста или съставна, може да бъде изведена – показана в текстов вид – като резултат от пресмятане. Текстовото представяне на числа, в чертежа или извън него, подлежи на управляемо форматиране по избор.

За построяване на образи на геометрични фигури са предвидени 8 команди. Към образите могат да се поставят стрелки и други особености.

Графични свойства на образите на фигури са например цвят и плътност на запълване, както и цвят, плътност, вид и дебелина на линията. Те могат да се задават изрично, а за всяко от тях съществува и удобно подразбиране.

Алгоритми, програмиране

Принадлежност на точка на изпъкнал многоъгълник

Нека многоъгълникът е положително ориентиран и L, Z, R са последователни върхове.

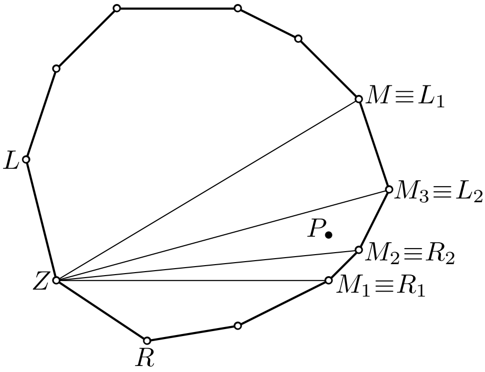
Ако $[ZLP] > 0 \vee [ZRP] < 0$: P е извън многоъгълника.
Ако $([ZLP] = 0 \wedge P \in ZL) \vee ([ZRP] = 0 \wedge P \in ZR)$: P е върху контура.

В противен случай повтаряй докато между R и L има върхове:

- нека M е средният от тези върхове;
- ако $[ZMP] \geq 0$: $R \leftarrow M$; иначе: $L \leftarrow M$.

P е вътре, вън или върху контура според това дали $[RLP]>0$, $[RLP]<0$ или $[RLP]=0$.

Алгоритъмът е приложение на двоичното търсене, така че скоростта му е $O(\log n)$.



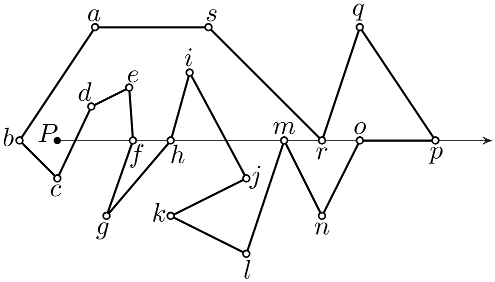
Принадлежност на точка на какъв да е многоъгълник

Лъч от точката в която и да е посока пресича контура в нечетен или четен брой точки според това дали точката е в или извън многоъгълника. Това е така нареченото четно-нечетно правило и именно на него се основава алгоритъмът.

Избираме лъча да бъде хоризонтален – това опростява пресмятанията.

Съществено и за правилността, и за простотата на алгоритъма е, че търсим наличие на пресичане за всяка страна поотделно.

Какви различни случаи възникват? Кои от тях и с какво са особени?



Алгоритъм за общия случай на многоъгълник

```
• Установи флага за принадлежност на неистина.
• За всяка страна UV на многоъгълника:
    • Ако хоризонталата през P пресича UV в точка,
    | различна от най-високата за UV:
    |   • Ако P лежи на UV:
    |   |   P е контурна; край.
    |   • Иначе, ако P е наляво от UV:
    |   |   Обърни флага за принадлежност.
    • Иначе, ако UV е хоризонтална и P лежи на UV:
    |   P е контурна; край.
• Съобщи стойността на флага.
```

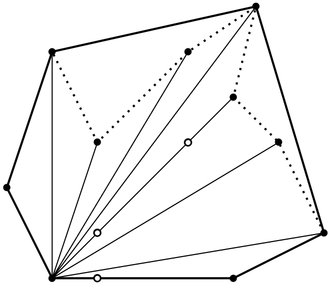
Времевата сложност на алгоритъма е $O(n)$.

Алгоритъм на Греъм за изпъкнала обвивка на точки

За първи връх на обвивката избираме например най-левият от най-ниските. Нека този връх е A. Подреждаме всички останали точки P според предшестването на съответните вектори $\mathbf{AP}$. Ако $\mathbf{AP} \upuparrows \mathbf{AP}'$ за две точки P и P', като стояща „по-напред“ смятаме по-близката до A или дори запазваме само по-далечната точка, а близката премахваме. След това

- За всяка точка P от вече подреденото множество:
  - Нека H е последният добавен към обвивката връх.
  - Докато обвивката съдържа поне два върха, като H' е предпоследният, и $[HH'P] \leq 0$: премахни H и преименувай H' на H.

Оптималното подреждане има сложност $O(n \log n)$. Тази на останалото е $O(n)$, тъй като работата с отделна точка е средно константна по обем. Следователно цялостната времева сложност на алгоритъма е $O(n \log n)$.



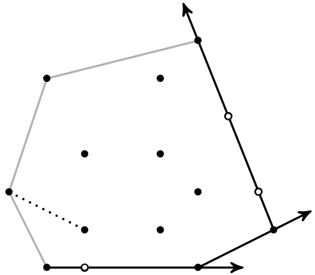
Алгоритъм на опаковането (на Jarvis)

И тук за първи връх на обвивката избираме например най-левият от най-ниските.

Повтаряме докато е възможно следното: ако последният избран връх е I, избери J, така че IJ да е дясна опорна права за оставащите точки и всяка точка K, за която $[IJK]=0$, е между I и J.

Завършваме, когато или не остават точки за избор, или последната добавена заедно с текущо избраната и първата точка в обвивката образуват отрицателно ориентирана тройка.

Алгоритъмът е *чувствителен към данните*: ако точките са n, а върховете на обвивката – h, времевата сложност е $O(hn)$ Така тя в най-лошия случай е $O(n^2)$, но е около $O(n)$ при $h \ll n$, а последното не е необичаен случай.



Аспекти на геометричното програмиране чрез C++

- Език за програмиране, осигуряващ възможност за много високо бързодействие на програмите.
- Възможност за лаконично и удобно изразяване на алгебричните операции с вектори.
- Наличие на необходими и ефективно реализирани СД – приоритетни опашки, множества с логаритмичен или квазиконстантен достъп и др.
- Наличие на множество основни алгоритми – за подреждане, търсене и др.

Всички изброени фактори са съществени в областта на геометричната алгоритмика и тази на компютърната графика.

Някои общи правила

При възможност предпочитайте целочислената аритметика.

Вместо разстояния, пресмятайте и сравнявайте лица.

По възможност вместо с разстояния работете с квадратите на разстоянията.

Избягвайте да пресмятате ъгли. Например заменяйте сравняване на ъгли с предшестване.

Ако е възможно (много често е!) избягвайте употребата на тригонометрични функции.

Особено важно: стремете се навсякъде да си служите с вектори – и за ръчни пресмятания, и в програми. Прибягвайте до координати само ако това *наистина* ускорява програмата и ако разликата е *съществена*.

Препратки

Този текст:
http://www.math.bas.bg/bantchev/misc/geca-chaos.pdf

Кратък справочник по векторни пресмятания в равнината:
http://www.math.bas.bg/bantchev/ForGe/va-qref-bk.pdf

Справочник по някои векторни пресмятания в пространството:
http://www.math.bas.bg/bantchev/ForGe/va-qref-3d-bk.pdf

Малка програмна библиотека за учебни и опитни цели:
http://www.math.bas.bg/bantchev/vecta/vecta.h
http://www.math.bas.bg/bantchev/vecta/vecta.pdf

ForGe – достъп чрез браузър:
http://www.math.bas.bg/bantchev/ForGe

ForGe – справочник (достъпен и от горната препратка):
http://www.math.bas.bg/bantchev/ForGe/forge-ref.html