

Подготовка на разширен национален отбор по математика

ЗАДАЧА 1

Дадена е купчина с $N > 0$ камъка. Двама последователно взимат от купчината. Първият взема a камъка, където a е дадено естествено число. Втория има право да вземе $a - 1$ (ако $a - 1$ не е нула) или $a + 1$ камъка. Играта продължава, като играчът, който е на ход има право да вземе $x - 1$ (ако $x - 1$ не е нула) или $x + 1$ камъка, където x е броят камъни взети от предния играч. Губи този играч, който не може да играе според описаните правила. Другият играч печели. Да се определи в зависимост от a , кой има печеливша стратегия.

Решение на задачата при $a = 1$.

Когато $N = 3$ първият играч взема 1 камък, втория взема 2 и печели. Ще докажем, че при $N \neq 3$ първия печели. Наистина след взимане на 1 камък от първия, втория може да вземе само 2 камъка. След тези два хода общият брой камъни е намален с 3 и отново на ход е първия. При това той може да вземе както 1, така и 3 камъка. Ще разгледаме следните три случая:

1. Числото N дава остатък 0 при деление на 3, т.е. $N = 3n$, $n > 1$. Първият взема винаги по един камък докато останат 3 камъка. При това той може да взема 1 или 3 камъка. Като вземе 3 камъка той побеждава.

2. Числото N дава остатък 1 при деление на 3. Като играе по описания в 1. начин, първият ще получи накрая 1 камък, след взимането на който той печели.

3. Числото N дава остатък 2 при деление на 3. Като играе по описания в 1. начин, първият ще получи накрая 2 камъка. Като вземе 1 камък ще остане 1 камък и втория не може да играе според правилата (той трябва да вземе 2 камъка).

Следователно, когато $a = 1$ имаме: при $N = 3$ печели втория; при $N \neq 3$ печели първия.

1. Решете задачата за $a = 2$, $a = 3$ и $a = 4$.

2. Покажете, че когато a е нечетно число, то съществува число N_a така, че при $N = N_a - 1$ печели втория, а при $N \geq N_a$ печели първия (това означава, че за достатъчно големи N винаги печели първия).

3. Покажете, че когато a е четно число, то съществува число N_a така, че при $N = N_a - 1$ печели първия, а при $N \geq N_a$ печели втория (това означава, че за достатъчно големи N винаги печели втория).

4. Намерете N_1 , N_2 , N_3 и N_4 .

5. Намерете N_a , при произволно a .

6. Решете задачата при произволно a .

ЗАДАЧА 2

Дадена е купчина с $N > 0$ камъка. Двама последователно взимат от купчината. Всеки има право да вземе x на брой камъка, като x е от множеството $A = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + t\}$, където a и t са дадени естествени числа. Губи този играч, който не може да играе според описаните правила. Другият играч печели. Да се определи в зависимост от a и t , кой има печеливша стратегия.

Решение на задачата при $a = 1$ и $t = 0$.

Всеки има право да взима само по един камък. Следователно, ако N е нечетно ще спечели първия, а ако N е четно ще спечели втория.

Решение на задачата при $a = 1$ и $t = 1$.

Тъй като $A = \{1, 2\}$, то всеки има право да взима един или два камъка. Ще докажем, че при $N = 3n$ втория играч има печеливша стратегия. Ако първият взима 1, втория взима 2 и обратно, ако първия взима 2, втория взима 1. По този начин след два последователни хода (един на първия и един на втория) броят на камъните намалява с 3. Това означава, че след n двойки ходове ще останат 0 камъка и втория ще спечели.

Когато $N \neq 3n$ ($N = 3n + 1$ или $N = 3n + 2$), със своя първи ход първият играч взима 1 при $N = 3n + 1$ или 2 при $N = 3n + 2$ и остава да играе втори. Тъй като броя на камъните вече се дели на 3, той ще спечели.

Следователно при $N = 3n$ печели втория, а при $N = 3n + 1$ или $N = 3n + 2$ печели първия.

1. Решете задачата при произволно число a и $t = 0$.

Упътване: Разделете N на a с частно и остатък, т.е. нека $N = pa + q$, където $0 \leq q < a$. Докажете, че при p четно печели втория, а при p нечетно, печели първия.

2. Решете задачата при $a = 2$ и $t = 1$.

3. Решете задачата при произволно a и $t = 1$.

4. Решете задачата при произволно a и $t = 2$.

5. Решете задачата при произволни a и t .

Коментар: Да се реши 5. означава да се определи за кои N (като функция на a и t) първия има печеливша стратегия и за кои N - втория.

ЗАДАЧА 3

Дадена е купчина с $N > 0$ камъка. Двама последователно взимат от купчината. Всеки има право да вземе x на брой камъка, като x е число от множеството $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, където $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ са дадени естествени числа. Губи този, който не може да играе според описаните правила. Другият играч печели. Да се определи кой има печеливша стратегия.

Решение на задачата при $A = \{3, 5\}$. Ще докажем, че при $N = 8k + i$, за $i = 0, 1, 2$ печели втория, а във всички останали случаи печели първия. Наистина, при $N = 8k + i$, за $i = 0, 1, 2$ след всеки ход на първия, втория допълва взетите камъни до 8. По този начин след k двойки ходове, ще останат i камъка и тъй като $i < 3$, първия няма да има ход.

Когато $N = 8k + i$, за $i = 3, 4, 5, 6, 7$ първия взима: при $i = 3, 4, 5$ три камъка, а при $i = 6, 7$ пет камъка. Тогава той играе втори и броят на камъните вече е $8k + j$ за $j = 0, 1, 2$. Следователно той печели.

1. Решете задачата за $A = \{a_1, a_2\}$, където $2a_1 \geq a_2$.
2. Решете задачата за $A = \{a_1, a_2\}$, където a_1 и a_2 са произволни естествени числа.
3. Решете задачата за $A = \{3, 4, 6\}$.
4. Решете задачата за $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, където $2a_1 \geq a_2$ и $a_1 + a_2 \geq a_3$.
5. Решете задачата за $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, където a_1, a_2, a_3 са произволни естествени числа.
6. Докажете, че не съществуват $a_s + 1$ последователни стойности на N така, че за всяка от тези стойности да печели първия.
7. Решете задачата за $A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$, където $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ са дадени естествени числа.