Задачи за 3–4 кл.

1. $2008 + 200 \cdot 8 =$

А) 17664 **Б)** 3608 **В)** 2216 **Г)** 2008 **Д)** 4016

2. На колко е равно
двеста и едно плюс седемдесет и пет?

А) двеста седемдесет и шест
Б) двеста осемдесет и шест
В) триста седемдесет и пет
Г) двеста осемдест и пет
Д) деветстотин и шест

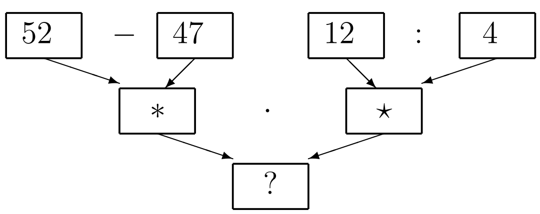
3. Купих си два сока за по 35 ст. и една вафла за 25 ст. Дадох 1 лв. Колко стотинки трябва да ми върнат?

А) 5 **Б)** 10 **В)** 15 **Г)** 20 **Д)** 25

4. Кое от числата

А) 10 **Б)** 15 **В)** 20 **Г)** 25 **Д)** 30

трябва да стои на мястото на въпросителната в схемата?



5. На колко части се разделя глобус от екватора и 2 меридиана?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

6. Биби заспала в десет и петнайсет вечерта и се събудила в седем без двайсет сутринта. Колко ча́са е спала Биби?

А) 9 ч и 35 мин **Б)** 9 ч и 15 мин **В)** 8 ч и 45 мин
Г) 8 ч и 25 мин **Д)** 8 ч и 15 мин

7. Превоз на ферибот струва 9 лева на кола́ с шофьор плюс 2 лева за всеки допълнителен пътник. Платихме общо 15 лева. Колко души сме в колата?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

8. Ако c е естествено число, различно от 1, то с $c\uparrow$ ще означаваме следващото, а с $c\downarrow$ – предишното естествено число. Например: $5\uparrow = 6$, $9\downarrow = 8$. На колко е равно

$4\uparrow + 7\downarrow - 3\downarrow$?

А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11 **Д)** 12

9. Иванчо написал в новата си тетрадка съчинение за дракони. В него той няколко пъти използвал думата „опастност“. Учителката му направила забележка, че думата се пише „опасност“ и го накарала да напише многократно думата, за да я научи. Общо думите „опастност“ и „опасност“ в тетрадката на Иванчо станали 23 и в тях буквата „т“ била употребена 31 пъти. Колко пъти е била написана вярно думата „опасност“?

А) 8 **Б)** 10 **В)** 13 **Г)** 15 **Д)** 23

10. На колко е равна сумата от всички цифри на всички естествени числа от 1 до 20 включително?

А) 21 **Б)** 51 **В)** 91 **Г)** 102 **Д)** 210

Задачи за 5–6 кл.

1. $2008 + 200,8 + 20,08 + 2,008 =$

А) 2222,8888 **Б)** 2222,888 **В)** 2230,88
Г) 2230,888 **Д)** 2238,888

2. На колко части се разделя глобус от 13 паралела и 20 меридиана?

А) 260 **Б)** 261 **В)** 273 **Г)** 280 **Д)** 294

3. Товарен влак трябва да се композира от два локомотива, 17 вагона за въглища и 15 цистерни, като първоначално всички са отделени. Ако едно закачане продължава 2 минути, колко минути са необходими за композирането на целия влак?

А) 66 **Б)** 68 **В)** 70 **Г)** 72 **Д)** 84

4. Превоз на ферибот струва 9 лева на колá с шофьор плюс 2 лева за всеки допълнителен пътник. Платихме общо 15 лева. Колко души сме в колата?

А) 5 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** 2 **Д)** 1

5. Във всяко от полетата на таблицата

А			
		Б	
			?
Г			

трябва да се постави една от буквите А, Б, В или Г, така че във всеки ред, всеки стълб и по двата диагонала да се среща всяка от четирите букви. Коя буква трябва да се постави на мястото на въпросителния знак?

А) А **Б)** Б **В)** В **Г)** Г
Д) липсват данни

6. Иванчо написал в новата си тетрадка съчинение за дракони. В него той няколко пъти използвал думата „опастност“. Учителката му направила забележка, че думата се пише „опасност“ и го накарала да напише многократно думата, за да я научи. Общо думите „опастност“ и „опасност“ в тетрадката на Иванчо станали 23 и в тях буквата „т“ била употребена 31 пъти. Колко пъти е била написана вярно думата „опасност“?

А) 23 **Б)** 15 **В)** 13 **Г)** 10 **Д)** 8

7. Един фунт е равен на 16 унции. Три унции бонбони тежат 84 грама. Колко грама тежат два фунта картофи?

А) 932 **Б)** 915 **В)** 896 **Г)** 878 **Д)** 863

8. Ачо, Бебо и Вуте се занимавали със статистика: всеки от тях класифицирал топчетата от една и съща кутия, които били от четири цвята. Обаче всеки един правилно определял само два от цветовете, а другите два не различавал (което не е необичайно за статистиката). Единият не различавал червено и оранжево, другият не различавал оранжево и жълто, а третият – жълто и зелено. Резултатите от статистическите наблюдения са дадени в таблицата.

	Ч	О	Ж	З
Ачо	2	5	7	9
Бебо	2	4	9	8
Вуте	3	3	8	9

От кой цвят по колко топчета е имало в действителност в кутията?

А) Ч - 3, О - 3, Ж - 9, З - 8
Б) Ч - 2, О - 4, Ж - 8, З - 9
В) Ч - 2, О - 4, Ж - 9, З - 8
Г) Ч - 3, О - 3, Ж - 8, З - 9
Д) друго разпределение

9. На колко е равна сумата от всички цифри на всички естествени числа от 1 до 100 включително?

А) 100 **Б)** 495 **В)** 901 **Г)** 1050
Д) никое от тези

10. Сборът на три числа е 348. От всяко от тези числа било извадено едно и също число. Получили се числата 101, 105 и 112. На колко е равен сборът от цифрите на първоначално дадените числа?

А) 15 **Б)** 12 **В)** 17 **Г)** 9 **Д)** 20

Задачи за 7–8 кл.

1. Решете уравнението

`две хикс минус едно равно на три втори.`

А) хикс е равно на три четвърти
Б) хикс е равно на пет четвърти
В) хикс е равно на пет втори
Г) хикс е равно на три втори
Д) никое от тези

2. С A, B и C са означени три различни върха на квадрат. Колко различни стойности може да приема $\sphericalangle ABC$?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

3. Коя е цифрата на десетиците на стойността на израза

$$\frac{38^3 - 27 \cdot 38^2 + 3^5 \cdot 38 - 9^3}{38^2 - 18 \cdot 38 + 81}?$$

А) 5 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** 2 **Д)** 1

4. Един от ъглите на триъгълник има мярка $15°$, а друг е със $70°$ по-голям. Мярката на третия ъгъл е:

А) $80°$ **Б)** $85°$ **В)** $90°$ **Г)** $95°$ **Д)** $100°$

5. Кое цяло число е най-близко до

$$\frac{2008! + 2005!}{2007! + 2006!}?$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.)$

А) 1 **Б)** 2 **В)** 1004 **Г)** 2007 **Д)** 2008

6. Една кола изминала z км с y км/ч. Колата е тръгнала в 9 часа́ сутринта и е пристигнала предиобед същия ден. В колко часа́ е пристигнала?

А) $9y - z$ **Б)** $\frac{z}{y} + 9$ **В)** $\frac{z-9}{y}$
Г) $\frac{z}{y-9}$ **Д)** $9 - \frac{z}{y}$

7. Какво ще бъде отпечатано в резултат от изпълнението на процедурата

```
n:=2008; p:=1;
    докато 2*p<n повтаряй p:=2*p;
отпечатай n-p
```

А) 0 **Б)** 2008 **В)** 984 **Г)** 1024
Д) никое от тези

8. Колко са точките с целочислени координати $(x; y)$, за които $2|x| + 3|y| = 12$?

А) 4 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 12 **Д)** никое от тези

9. Лицето на фигурата, ограничена от абсцисната ос и начупената линия с върхове $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;2)$, $(-2;2)$, $(-4;0)$, е число от интервала:

А) $[5;8)$ **Б)** $[8;13)$ **В)** $[13;16)$ **Г)** $[16;19)$ **Д)** $[19;22]$

10. На годишната забава броят на момчетата беше четири пъти по-голям от броя на момичетата. Когато на дансинга танцуваха 4 момчета и 4 момичета, броят на нетанцуващите момчета беше седем пъти по-голям от броя на нетанцуващите момичета. Кое от числата

А) 20 **Б)** 30 **В)** 35 **Г)** 36 **Д)** 40

може да бъде равно на броя на ученици на забавата?

11. На първи юли търговец купил 12 тона дини с водно съдържание 96% при цена 20 стотинки за килограм. На втори юли той продал 4 тона от дините, които вече имали водно съдържание 94%, при цена 40 ст. за килограм. На трети юли продал и останалите, които вече имали водно съдържание 92%, при цена 30 ст. за килограм. Колко лева е печалбата на търговеца от цялата операция?

А) 1600 **Б)** 400 **В)** 200 **Г)** 100 **Д)** 0

12. Корабокрушенец попаднал на самотен остров, а от багажа му оцеляла само огромна кутия бонбони. Всеки ден той ял по еднакъв брой бонбони от нея, докато я изпразнил. Ако беше ял с един бонбон по-малко на ден, тя щеше да му стигне за 9 дни повече. Ако беше ял с един бонбон повече на ден, щеше да му стигне за 6 дни по-малко. За колко дена е изпразнил кутията корабокрушенецът?

А) 30 **Б)** 36 **В)** 42 **Г)** 48 **Д)** 54

Задачи за 9–10 кл.

1. Как са подредени по големина числата

$a = 2008 \cdot 2008$,
$b = 2007 \cdot 2009$,
$c = 2006 \cdot 2010$?

А) $a < b < c$ **Б)** $b < c < a$
В) $a > b > c$ **Г)** $b > c > a$
Д) $a = b = c$

2. Решете уравнението
`три хикс квадрат минус две хикс равно на едно.`

А) хикс едно равно на едно, хикс две равно на минус една трета
Б) хикс едно равно на минус едно, хикс две равно на една трета
В) хикс едно равно на три, хикс две равно на минус едно
Г) хикс едно равно на едно, хикс две равно на една трета
Д) никое от тези

3. На колко е равен сборът от корените на уравнението

$$x^2 + 2008|x| - 16000 = 0?$$

А) 0 **Б)** -2008 **В)** 2008 **Г)** 4016
Д) никое от тези

4. Една кола изминала z км с y км/ч. Колата е тръгнала в 9 часà вечерта и е пристигнала на другия ден предиобед. В колко часà е пристигнала?

А) $\dfrac{z}{y} + 9$ **Б)** $\dfrac{z-12}{y}$
В) $\dfrac{z}{y-9}$ **Г)** $\dfrac{z}{y} - 12$
Д) по друго време

5. С A, B и C са означени три различни върха на правилен шестоъгълник. Колко различни стойности може да приема $\sphericalangle ABC$?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 10

6. Какво ще бъде отпечатано в резултат от изпълнението на процедурата

```
n:=2008; p:=1;
    докато 2*p<n повтаряй p:=2*p;
отпечатай n-p
```

А) 0 **Б)** 2008 **В)** 984 **Г)** 1024
Д) никое от тези

7. В Средния адронен колайдер има два кръга за ускоряване на частици – малък, с дължина 5 км, и голям, с дължина 15 км. Енергията за обслужване на 1 км от големия кръг е с 20% повече от тази, необходима за поддържането на същите параметри в 1 км от малкия кръг. В малкия кръг протон бил ускорен до скорост 60% от скоростта на светлината, с която скорост протонът направил 3 обиколки на кръга. След това протонът навлязъл в големия кръг и бил ускорен до 75% от скоростта на светлината, като направил 4 обиколки с тази скорост. Приблизително каква енергия (в ГВтЧ) е била необходима за четирите обиколки в големия кръг, ако в малкия за трите обиколки са били изразходени 1,2 ГВтЧ? Приема се, че увеличението на енергията, необходима за поддържане на скоростта на протон от v_1 на $v_2 > v_1$, е $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2$ пъти.

А) 10 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 7 **Д)** 6

8. Едно естествено число ще наричаме *объркано*, ако при деление с 9 дава частно a и остатък b, а при деление със 17 дава частно b и остатък a. Колко са *обърканите* трицифрени числа?

А) 3 **Б)** 33 **В)** 39 **Г)** 47 **Д)** 52

9. На колко е равна сумата от всички цифри на всички естествени числа от 1 до 2008 включително?

А) 20 345 **Б)** 31 412
В) 46 538 **Г)** 52 764
Д) никое от тези

10. През XIX в. е имало 11 пътя, които свързвали Лондон и Кембридж, включително тези през Оксфорд, и 13 пътя от Лондон до Оксфорд, включително тези през Кембридж. Колко директни пътя са свързвали Оксфорд и Кембридж през XIX век?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

Задачи за 11–12 кл.

1. В кой от интервалите

А) $[0;1)$ **Б)** $[1;2)$ **В)** $[2;3)$
Г) $[3;4)$ **Д)** $[4;5]$

лежи най-големият корен на уравнението
$$\frac{x+1}{|x-1|}-3\frac{|x-1|}{x+1}+2=0?$$

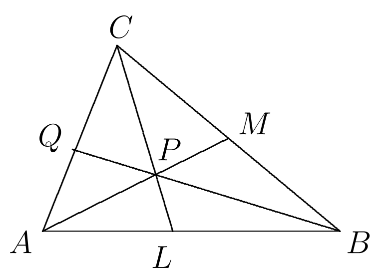
2. По колко различни начина би могло да изглежда попълването на бланката, която се предава в края на състезанието **Черноризец Храбър**, ако се следва инструкцията?

А) $\binom{30}{6}$ **Б)** $\frac{30!}{25!}$ **В)** 30^6 **Г)** 5^{30} **Д)** 6^{30}

3. За всяко x числото $4\sin x-3\cos x$ е от интервала:

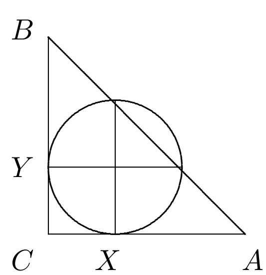
А) $[-3;6]$ **Б)** $[-6;4]$ **В)** $[-4;6]$
Г) $[-4;4]$ **Д)** $[-5;5]$

4. За $\triangle ABC$ са дадени $BC=4$, $CA=2$, $AB=3$. Медианата AM пресича ъглополовящата CL в точката P. Правата BP пресича страната AC в точката Q. На колко е равна отсечката CQ?



А) $\frac{3}{2}$ **Б)** $\frac{4}{3}$ **В)** $\frac{5}{4}$ **Г)** $\frac{6}{5}$ **Д)** никое от тези

5. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB=6$. Окръжност се допира до AC и BC в точки X и Y, а диаметрално противоположните точки на X и Y лежат на хипотенузата. На колко е равно лицето на сегмента извън триъгълника?



А) $\frac{1}{2}\pi-1$ **Б)** $\pi-1$ **В)** $2\pi-4$
Г) $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}$ **Д)** $\pi-2$

6. За растящата аритметична прогресия $\{a_n\}$ е дадено $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=140$ и $a_2a_9=147$. На колко е равен a_3?

А) 3 **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 9 **Д)** никое от тези

7. Десет ученици имат общо 10 лв. и са подредени в редица така, че всеки (без първия) има с 10 ст. повече от предния. Колко стотинки има десетият в редицата?

А) 100 **Б)** 125 **В)** 140 **Г)** 145 **Д)** 150

8. Каква е вероятността случайно избрано трицифрено число да има една четна и две нечетни цифри?

А) $\frac{28}{225}$ **Б)** $\frac{31}{90}$ **В)** $\frac{13}{36}$ **Г)** $\frac{7}{18}$ **Д)** $\frac{1}{2}$

9. Ако x е положително ирационално число, а y е рационално число, кое от следните числа е непременно ирационално?

А) $x+y$ **Б)** xy **В)** $\ln x$ **Г)** x^y
Д) никое от тези

10. Кое е най-голямото естествено число n, за което системата неравенства

$$k < x^k < k+1,\ k = 1,\ 2, \dots,\ n$$

има решение?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5
Д) няма най-голямо число с това свойство

Отговори и кратки решения 3–4 кл.

1. Отговор. Б. *Решение.* $2008 + 200 \cdot 8 = 2008 + 1600$.

2. Отговор. А. *Решение.* $201 + 75 = 276$.

3. Отговор. А. *Решение.* $100 - 2 \cdot 35 - 25 = 5$.

4. Отговор. Б. *Решение.* $(52 - 47) \cdot (12 : 4) = 5 \cdot 3 = 15$.

5. Отговор. В. *Решение.* Екваторът разделя глобуса на две части, а двата меридиана разделят всяка от тези части на две.

6. Отговор. Г. *Решение.* Биби е спала 1 ч 45 мин до полунощ и 6 ч 40 мин след полунощ – общо 7 ч и 85 мин.

7. Отговор. Г. *Решение.* Допълнителната такса от 6 лева е за трима пътници. В колата има и шофьор.

8. Отговор. Б. *Решение.* $4 \uparrow +7 \downarrow -3 \downarrow = 5 + 6 - 2$.

9. Отговор. Г. *Решение.* Имаме 8 излишни букви „т“, така че толкова пъти думата е била написана грешно. Остават $23 - 8 = 15$ верни думи.

10. Отговор. Г. *Решение.* Сумата от цифрите на едноцифрените числа е $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, а на числата от 10 до 19 е $(1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) + \cdots + (1 + 9) = 10 + 45 = 55$. Накрая трябва да добавим още 2 – сумата от цифрите на 20.

Отговори и кратки решения 5–6 кл.

1. Отговор. Г.

2. Отговор. Г. *Решение.* Паралелите разделят глобуса на 14 части. Всяка от тези части се разделя от меридианите на 20 части; общо $14 \cdot 20 = 280$ части.

3. Отговор. А. *Решение.* Имаме общо $2 + 17 + 15 = 34$ локомотива и вагона, значи 33 закачания, т.е. 66 минути.

4. Отговор. Б. *Решение.* Допълнителната такса от 6 лева е за трима пътници. В колата има и шофьор.

5. Отговор. Б. *Решение.* Първо можем да открием, че в горния десен ъгъл се намира В, понеже другите букви се срещат по диагонала или по реда.

А	Б	Г	В
В	Г	Б	А
Б	А	В	Г
Г	В	А	Б

По същата причина под буквата А се намира пак В. С подобни средства можем да възстановим цялата таблица.

6. Отговор. Б. *Решение.* Имаме 8 излишни букви „т“, така че толкова пъти думата е била написана грешно. Остават $23 - 8 = 15$ верни думи.

7. Отговор. В. *Решение.* Една унция е равна на $84 : 3 = 28$ грама. Два фунта са равни на 32 унции, т.е. на $32 \cdot 28 = 896$ грама.

8. Отговор. Б. *Решение.* Червените са объркани само от един измежду А, Б и В. Това трябва да е В, понеже А и Б имат един и същи резултат. Следователно червените топчета са 2. След като В не различава червени и оранжеви, той правилно определя жълтите и зелените – те са съответно 8 и 9. Понеже общият брой топчета е 23 (установено с консенсус), оранжевите топчета са $23 - (2 + 8 + 9) = 4$.

9. Отговор. В. *Решение.* Нека $S(n)$ е сумата от всички цифри всички на естествени числа от 1 до n. Имаме

$S(9) = 45,$

$S(99) = 10(1 + 2 + \cdots + 9) + 10S(9) = 900,$

Накрая

$S(100) = S(99) + 1 = 901.$

10. Отговор. А. *Решение.* Числото, което било било извадено, е

$$\big(348 - (101 + 105 + 112)\big) : 3 = 10.$$

Следователно дадените числа са 111, 115 и 122.

Отговори и кратки решения 7–8 кл.

1. Отговор. Б. *Решение.* $2x-1=\dfrac{3}{2} \Longrightarrow 2x=\dfrac{5}{2} \Longrightarrow x=\dfrac{5}{4}$.

2. Отговор. Б. *Решение.* Възможните стойности са 45° и 90°.

3. Отговор. Г. *Решение.* Изразът е равен на $\dfrac{(38-9)^3}{(38-9)^2} = 38-9=29$.

4. Отговор. А. *Решение.* Вторият ъгъл е 85°, така че третият е $180^\circ-15^\circ-85^\circ=80^\circ$.

5. Отговор. Г. *Решение.* Имаме

$$\frac{2008!+2005!}{2007!+2006!}=\frac{2005!(2008\cdot 2007\cdot 2006+1)}{2006!(2007+1)}=$$
$$2007+\frac{1}{2006\cdot 2008}<2007,5.$$

6. Отговор. Б. *Решение.* Времето в часове, което е пътувала колата, е $\dfrac{z}{y}$.

7. Отговор. В. *Решение.* Процедурата пресмята в p най-голямата стойност на 2^k, по-малка от n, и отпечатва разликата

$$n-p=2008-1024=984.$$

8. Отговор. В. *Решение.* Когато $|x|$ е цяло число, $|y|=4-\dfrac{2|x|}{3}$ е естествено число единствено за $|x|\in\{0;\ 3;\ 6\}$.
- при $|x|=0$ имаме $|y|=4$, което ни дава две точки: $(0;\pm 4)$;
- при $|x|=3$ имаме $|y|=2$, което ни дава четири точки: $(\pm 3;\pm 2)$;
- при $|x|=6$ имаме $|y|=0$, което ни дава две точки: $(\pm 6;0)$.

9. Отговор. А. *Решение.* Фигурата се състои от равнобедрени правоъгълни триъгълници, първият от които има лице $\dfrac{1}{2}$, а всеки следващ е с два пъти по-голямо лице от предишния, което се установява с подходящ разрез. Така сборът от лицата на триъгълниците е $0,5+1+2+4=7,5$.

10. Отговор. Д. *Решение.* Броят на учениците на забавата е кратен на 5, а ако извадим 8 се получава кратно на 8, т.е. този брой се дели и на 8. Единственото от посочените числа, отговарящо на условието, е 40. Условието се реализира, ако момчетата са 32, а момичетата – 8.

11. Отговор. Г. *Решение.* За дините е той е платил $12000\cdot 0,2=2400$ лв. На 2 юли сухото вещество в дините вече е 6% вместо 4%, без да е променило масата си, следователно дините вече тежат $\dfrac{2}{3}\cdot 12=8$ тона. Продадени са 4 тона от тях (срещу $4000\cdot 0,4=1600$лв), така че остават 4 тона. На 3 юли сухото вещество в дините е 8% вместо 6%, без да е променило масата си, следователно дините вече тежат $\dfrac{3}{4}\cdot 4=$

3 тона. За тях са получени $3000 \cdot 0,3 = 900$ лева. Печалбата е $1600 + 900 - 2400 = 100$ лева.

12. Отговор. Б. *Решение.* Ако е ял d дни по b бонбона на ден, имаме равенствата

$$db = (d+9)(b-1) \quad \text{и} \quad db = (d-6)(b+1).$$

Оттук

$$0 = 9b - d - 9 \quad \text{и} \quad 0 = -6b + d - 6.$$

Събирайки, получаваме $0 = 3b - 15$ и $b = 5$. Сега

$$0 = -30 + d - 6 \text{ и } d = 36.$$

Отговори и кратки решения 9–10 кл.

1. Отговор. В. *Решение.* $a = 2008^2$, $b = 2008^2 - 1$, $c = 2008^2 - 4$.

2. Отговор. А. *Решение.* $3x^2 - 2x = 1 \Longrightarrow$ $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3}$.

3. Отговор. А. *Решение.* Даденото уравнение има реален корен, понеже уравнението

$$x^2 + 2008x - 16000 = 0$$

има положителен корен, който е корен на даденото уравнение. Ако x е корен, то очевидно $-x$ също е корен.

4. Отговор. Д. *Решение.* Отговорът е $\dfrac{z}{y} - 3$. Времето в часове, което е пътувала колата, е $\dfrac{z}{y}$. Това време трябва да се намали с $12 - 9 = 3$ ч.

5. Отговор. Б. *Решение.* Възможните стойности са $30°$, $60°$, $90°$ и $120°$.

6. Отговор. В. *Решение.* Процедурата пресмята в `p` най-голямата стойност на 2^k, по-малка от n, и отпечатва разликата

$$n - p = 2008 - 1024 = 984.$$

7. Отговор. Б. *Решение.* Енергията, необходима за поддържане на 60% от скоростта на светлината в една обиколка на големия кръг е $\dfrac{15}{5} \cdot 1,2$ от тази за една обиколка в малкия кръг. Отчитайки броя обиколки, енергията става $\dfrac{15}{5} \cdot 1,2 \cdot \dfrac{4}{3}$. Увеличението на скоростта води до множителя $\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(\dfrac{75}{60}\right)^2 = \dfrac{5^2}{4^2}$. Оттук за търсената енергия окончателно получаваме

$$1,2 \cdot \frac{15}{5} \cdot 1,2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5^2}{4^2} = 9 \text{ ГВтЧ}.$$

8. Отговор. А. *Решение.* Нека

$$n = 9a + b = 17b + a$$

е произволно объркано число. От равенствата получаваме, че $a = 2b$ и $n = 19b$. Трицифрени объркани числа се получават само при $b \in \{6;\ 7;\ 8\}$ – общо три на брой.

9. Отговор. Д. *Решение.* Нека $S(n)$ е сумата от всички цифри на всички естествени числа от 1 до n. Имаме

$S(9) = 45,$

$S(99) = 10(1 + 2 + \cdots + 9) + 10S(9) = 900,$

$S(999) = 100(1 + 2 + \cdots + 9) + 10S(99) = 13500.$

Накрая

$S(2008) = 2S(999) + 1000 + 9 \cdot 2 + S(8) = 28054.$

10. Отговор. Б. *Решение.* Нека x и y са директните пътища от Лондон съответно до Кембридж и Оксфорд. Ако

Оксфорд и Кембридж са свързани със z директни пътя, имаме

$$\left|\begin{array}{l} x + yz = 11 \\ y + xz = 13. \end{array}\right.$$

Като извадим двете равенства, получаваме

$$(x - y)(z - 1) = 2,$$

откъдето z е 2 или 3. Само при $z = 2$ получаваме естествени решения на системата.

Отговори и кратки решения 11–12 кл.

1. Отговор. А. *Решение.* Даденото уравнение има за корен единствено $x = 0$. Наистина, нека $y = \dfrac{x+1}{|x-1|}$. Тогава

$$y^2 + 2y - 3 = 0,$$

откъдето $y_1 = 1$, $y_2 = -3$.

$\dfrac{x+1}{|x-1|} = 1 \Longrightarrow x = 0$; $\dfrac{x+1}{|x-1|} = -3$ няма решение.

2. Отговор. Д. *Решение.* На всяка от 30-те задачи имате по шест възможности: пет букви или празно.

3. Отговор. Д. *Решение.* За подходящо φ

$$4\sin x - 3\cos x = 5\sin(x+\varphi).$$

4. Отговор. Б. *Решение.* За $L = l_C \times AB$ и M – средата на BC от теоремата на Чева имаме $\dfrac{AL}{LB}\cdot\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CQ}{QA} = 1$. Освен това $\dfrac{AL}{LB} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, откъдето $CQ = 2AQ$, т.е. $CQ = \dfrac{2}{3}AC$.

5. Отговор. А. *Решение.* Лесно се вижда, че триъгълникът е равнобедрен с катет $3\sqrt{2}$. Да означим $AX = x$, тогава всяка от пресечните точки с хипотенузата я разделя на отсечки $x\sqrt{2}$ и $6 - x\sqrt{2}$. От равенството $x\sqrt{2}(6 - x\sqrt{2}) = x^2$ намираме $x = 2\sqrt{2}$. Тогава радиусът на окръжността е $r = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Търсеното лице е $\dfrac{1}{4}\pi r^2 - \dfrac{1}{2}r^2 = \dfrac{1}{2}\pi - 1$.

6. Отговор. Г. *Решение.* От $140 = a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 5(a_1 + a_{10}) = 5(a_2 + a_9)$ намираме $a_2 + a_9 = 28$. Сега от системата $\left|\begin{array}{l} a_2 + a_9 = 28 \\ a_2 a_9 = 147 \end{array}\right.$ намираме $a_2 = 7$, $a_9 = 21$. Разликата на прогресията е $d = \dfrac{21-7}{7} = 2$, откъдето $a_3 = a_2 + 2$.

7. Отговор. Г. *Решение.* Средно един ученик има 1 лв. и първият и десетият са „симетрично разположени около този лев на разстояние 45 ст.“ (По модела на задача от египетски папирус).

8. Отговор. Г. *Решение.* Всички трицифрени числа са 900, а благоприятните случаи са 350.

9. Отговор. А. *Решение.* Ако реалното число $z = x + y$ беше рационално, то $x = z - y$ би било рационално, абсурд. Значи z е ирационално. Отговори Б и Г пропадат при $y = 0$. Отговор В пропада при $x = e$.

10. Отговор. В. *Решение.* Умножаваме неравенствата при $k = 2$ и $k = 3$ и получаваме $6 < x^5$, откъдето следва, че $n < 5$. Тъй като

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4},$$

то всяко число $x \in (\sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{5})$ е решение на системата неравенства $(1 - 4)$.