Технически Университет — София

Комплексен Анализ

Ралица К. Ковачева Мариана Ив. Дурчева

Авторите изказват благодарност на Николай Икономов за техническото оформяне на учебника.

Съдържание

1 Комплексни числа

Както знаем, квадратното уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0,$$

не винаги е решимо в полето на реалните числа. Например нито едно реално число не удовлетворява уравнението

$$x^2 = -1. \tag{1.1}$$

Затова да разширим множеството на реалните числа чрез добавяне на специален символ, решаващ уравнението (1.1). Означаваме този символ чрез i, т.е.

$$i^2 = -1. \tag{1.2}$$

Дефиниция 1.1. Комплексно число z е алгебричен израз от вида $z := a+ib$, като двете числа a, b са реални. Двете комплексни числа $a + ib$ и $c + id$ са равни тогава и само тогава, когато $a = c$ и $b = d$.

Дефиниция 1.2. Числото a на комплексното число се нарича *реална част*, компонента $\Re z$ на z; числото b е *имагинерната част*, компонента $\Im z$ на z. Ако $\Im z = 0$, то числото z е реално. Ако $\Re z = 0$, то z е *чисто имагинерно* число.

Да отбележим, че $z = 0$ тогава и само тогава, когато $\Re z = \Im z = 0$.

1.1 Алгебра на комплексните числа

Множеството на комплексните числа означаваме с $\mathbb{C}$. По конструкция, $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$. Ще дефинираме сега операциите събиране и умножение по такъв начин, че те да съвпадат с познатите операции от полето на реалните числа $\mathbb{R}$ и ще покажем, че спрямо така дефинираните операции $\mathbb{C}$ е поле.

Нека $z_j = a_j + ib_j, \ j = 1, 2$. Следвайки (1.2), дефинираме събиране като

$$z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

и умножение

$$z_1 z_2 := (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Очевидно двете операции са комутативни и асоциативни, т.е.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ z_1 z_2 = z_2 z_1,$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

За да въведем деление с комплексно число, ще въведем нова операция — комплексна спрегнатост.

Дефиниция 1.3. Комплексно спрегнато $\overline{z}$ на числото $z = a + ib$ е числото

$$\overline{z} := a - ib.$$

Нека $z \neq 0$. С помощта на комплексно спрегнатото число ще пресметнем $1/z$:

Дефиниция 1.4.
$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Сега вече сме в състояние да въведем операцията деление, ако $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Така дефинираните операции събиране, умножение и деление съвпадат с познатите ни действия в полето на реалните числа. Лесно се убеждаваме, че множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ е поле спрямо тези операции, с единица $z = 1$.

1.2 Представяне на комплексните числа в равнината, абсолютна стойност

Удобен начин да се визуализират комплексните числа като точки в равнината дава Декартовата координатна система Oxy. Идеята се съдържа в съпоставянето на всяка точка в равнината $P = (a, b)$ на комплексното число $z = a + ib$ и обратно. Очевидно съответствието в двете посоки е еднозначно. Навлизайки в геометрията на равнината, да си припомним, че a е проекцията на точката P върху оста Ox, докато b — проекцията ѝ върху оста Oy. Това обстоятелство оправдава и Дефиниция 1.2

Дефиниция 1.5. В бъдеще ще наричаме алтернативно равнината Oxy *комплексна, Гаусова равнина* или само $\mathbb{C}$. Оста Ox ще наричаме *реална ос*, докато оста Oy — *имагинерна ос*.

Нека комплексното число z има алгебричното представяне $z = a + ib$. Съответства му еднозначно точката $P = (a, b)$ в равнината Oxy.

Дефиниция 1.6. Дължината на вектора $\overrightarrow{OP}$ се нарича *модул или абсолютна стойност* на комплексното число и се означава с $|z|$.

От теоремата на Питагор следва, че

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Забележка 1.1. Абсолютната стойност $|z|$ е неотрицателно число, като $|z| = 0$ тогава и само тогава, когато $a = b = 0$. Разстоянието между две точки $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ се дава от формулата

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Да отбележим и някои от основните характеристики на комплексно спрегнатите числа. От дефиницията виждаме веднага, че комплексно спрегнатите числа z и $\overline{z}$ са симетрични спрямо реалната ос Ox. Лесно се проверяват и тъждествата

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\ \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2,$$
$$|z| = \overline{|z|},\ |z|^2 = z\overline{z},$$
$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2},\ \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2}.$$

Ще докажем важната теорема, известна като *неравенство на триъгълника*.

Теорема 1.1 (Неравенство на триъгълника). *За всеки две комплексни точки z_1 и z_2 важи оценката*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Доказателство. Нека $z_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$. Тогава

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \leq \sum_{j=1}^{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2} b_j^2 + 2(|a_1||a_2| + |b_1||b_2|).$$

Прилагайки неравенството на Коши-Шварц[1] спрямо последната сума, получаваме

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \sum_{j=1}^{2} a_j^2 + \sum_{j=1}^{2} b_j^2 + 2\sqrt{|a_1|^2 + |b_1|^2}\sqrt{|a_2|^2 + |b_2|^2} = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

[1] Cauchy-Schwarz inequality

$$\prod_{j=1}^{n} |c_j d_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2}.$$

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

така че
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$
От друга страна,
$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_2|,$$
както и
$$|z_2| \le |z_2 + z_1| + |z_1|.$$
Получихме, че
$$|z_1 + z_2| \ge (|z_1| - |z_2|,\ |z_2| - |z_1|),$$
което води непосредствено до лявото неравенство на Теорема 1.1 Q.E.D.

1.3 Векторни и полярни форми

Дефиниция 1.7. Ако означим с P точката в равнината, съответстваща на комплексното число z, то векторът $\overrightarrow{OP}$ в комплексната равнина $\mathbb{C}$ се нарича още и *векторът* z.

Нека $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ са два вектора. Както знаем, тяхната сума се намира по правилото на успоредника, т.е.
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
или вектор с начало началото на вектора z_1 и край — края на вектора z_2. Разликата е
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2),$$
т.е. вектор, с начало края на z_2 и край — края на z_1.

Освен чрез своите компоненти — реална и имагинерна, едно комплексно число се определя еднозначно и от двойката *полярни координати* — радиус-вектора r и аргумента $\arg z$. Радиус-векторът r е равен на разстоянието от точката z до началото на координатната система, т.е. $r = |z|$. Аргументът на z е ъгълът, който векторът $\overrightarrow{z}$ сключва с положителната реална полуос Ox^+.

Ако ъгълът се измерва в посока, обратна на часовниковата стрелка, то алгебричната му стойност е положително число; в противен случай алгебричната стойност е отрицателна. Например, на числото $z = 1 - i$ могат да се съпоставят две стойности на аргумента; положителна, равна на $7\pi/4$, или отрицателна, равна на $-\pi/4$.

Нека $z(x, y)$ е комплексно число (т.е. $z = x + iy$) с радиус-вектор r и нека θ е негов аргумент. Връзката между алгебричните компоненти и полярните координати се изразява чрез формулите

$$x = r\cos\theta \;\text{ и }\; y = r\sin\theta.$$

По-нататък,

$$\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r}. \tag{1.3}$$

Забележка 1.2. Въпреки че

$$\tan\theta = \left(\frac{y}{x}\right),$$

то привидно естественото заключение

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

очевидно не е вярно във втория и в третия квадрант на координатната система.

Самото комплексно число може да се запише в *полярен вид*

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{1.4}$$

Да се спрем на важния въпрос за многозначността на аргумента. Нека ъгълът θ удовлетворява (1.3). Но тогава уравнението ще бъде удовлетворено и от всеки ъгъл, отличаващ се от стойността на θ с кратно на числото 2π, т.е. от всеки ъгъл $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ще наричаме всеки от тези ъгли *аргумент на комплексното число z* и ще го означаваме с $\arg z$. Тази стойност на аргумента, която лежи в интервала $(-\pi, \pi]$, се нарича *главна стойност на аргумента* и се бележи с $\operatorname{Arg} z$. Например,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arg} 1 = 0,\ \arg 1 = 0 + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\\
&\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2},\ \arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\\
&\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4},\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\\
&\operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}, \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots
\end{aligned}$$

С помощта на представянето на числата в полярна форма лесно намираме стойността на аргумента на произведението и частното на две комплексни числа. Именно, нека $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Умножавайки ги, получаваме

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)] = \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

И така,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \ \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Аналогично, ако $z \neq 0$, то

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z), \ \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

От тези представяния веднага следва формулата на Моавър[2]

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

1.4 Комплексната експонента $e^{i\theta}$

Да напомним на читателя основните свойства на експоненциалната функция e^x и на тригонометричните функции $\cos x$, $\sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x\cos y \pm \sin y\cos x, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x\cos y \mp \sin x\sin y, \end{aligned}$$

както и

$$e^0 = 1, \ e^{x+y} = e^x e^y.$$

Имайки предвид тези свойства, то по-долу изложената формула на Ойлер[3] е естествено продължение на експоненциалната функция за чисто имагинерни степени.

Дефиниция 1.8. Формулата на Ойлер:

$$e^{i\alpha} := \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Оставяме на читателя да провери, че така дефинираната експонента с чисто имагинерен показател повтаря всички свойства на експоненциалната функция с реален аргумент.

[2]Abraham de Moivre (1667-1754)
[3]Leonhard Euler (1707-1783)

Тръгвайки от представянето на експоненциалната функция с чисто имагинерен показател стигаме до представянията на тригонометричните функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, именно:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\ \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}.$$

С помощта на формулата на Ойлер записваме (1.4) в *тригонометрична форма*

$$z = |z|e^{i\arg z}.$$

И накрая, дефинираме e^z, $z \in \mathbb{C}$.

Дефиниция 1.9. Ако $z = x+iy$, $z \in \mathbb{C}$, то експоненциалната функция e^z се дефинира като

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

1.5 Степенната функция $z^{p/q}$

Нека m е цяло число. Да пресметнем стойността на израза $z^{1/m}$. Полагаме

$$z^{1/m} = \omega.$$

Тогава

$$\omega^m = z$$

или

$$|\omega|^m e^{im\arg\omega} = |z|e^{i\arg z},$$

получаваме за решение всяко от числата

$$\omega_k = |z|^{1/m}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{m}},\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Пресмятанията показват обаче, че за всяко цяло число k

$$\omega_k = \omega_{k+m},$$

така че всички стойности на $z^{1/m}$ се изчерпват от точките

$$\omega_k = |z|^{1/m}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{m}},\ k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

От формулите на Моавър получаваме, по-нататък,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q}e^{ip\frac{\arg z+2k\pi}{q}},\ k = 0, 1, 2, \dots, q-1.$$

Упражнения

Задача 1.1. Запишете в алгебричен вид $a + ib$ числата

$$-\frac{3i}{2};\ \frac{2}{i};\ (-1+i)^2;\ i^3(i+1)^2.$$

Задача 1.2. Покажете, че $\Re(iz) = -\Im z$.

Задача 1.3. Нека $z = 3-2i$. Изобразете върху равнината точките $z; -z; \overline{z}; 1/z$.

Задача 1.4. Скицирайте точковите множества $z \in \mathbb{C}$, които удовлетворяват

$$\Im z = -2;\ |z-2| \leq 1;\ \Re z > 2;\ |z| = \Re z - 2.$$

Задача 1.5. Докажете, че $|\Re z| \leq |z|;\ |\Im z| \leq |z|$.

Задача 1.6. Нека $a_i,\ i = 1, \ldots, n$ са реални числа и нека z_0 е корен на полинома $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. Покажете, че и числото $\overline{z}_0$ е корен на този полином.

Задача 1.7. Запишете в полярна форма

$$1;\ -1;\ i;\ -i;\ 1 \pm i;\ \frac{\pm 1 + i}{2};\ \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}.$$

Задача 1.8. Вярно ли е или не тъждеството

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2;$$

$$\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg}(-z);$$

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 1.9. Докажете формулата на Моавър

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Задача 1.10. Покажете, че

$$|e^{i\alpha}| = 1;\ e^{i\pi/2} = i;$$

$$e^{2k\pi i} = 1;\ e^{(2k+1)\pi/2} = -1,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1},\ z \neq 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 1.11. Представете в тригонометричен вид числата

1. $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha,\ \alpha \in [0, 2\pi]$

2. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$

3. $1+\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$,

4. $1-\cos\alpha-i\sin\alpha$, $\alpha\in[0,\pi]$.

Задача 1.12. Опростете сумата $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha$.

Упътване: Използвайте формулите на Ойлер за тригонометричните функции, след което приложете формулата за сума на крайна геометрична прогресия (виж задача 1.10).

Задача 1.13. Дадени са числата z_1,z_2,z_3, такива че $z_i\neq z_j$, $i,j=1,2,3$. Докажете еквивалентността на следните твърдения:

1. $|z_1-z_3|^2=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2$,

2. съществува чисто имагинерно число β, такова че $(z_3-z_1)=\beta(z_2-z_1)$.

Задача 1.14. Покажете, че уравнението $|z|^2+lz+\bar{l}\bar{z}+m=0$, в което m е реално число и $m<|l|^2$, е уравнение на окръжност.

Упътване: Покажете, че уравнението може да се запише, след подходящи преобразования, във вида $|z-a|^2=R^2$, $R>0$.

Задача 1.15. Покажете, че уравнението $Az+\overline{A}\overline{z}+B=0$, $A\neq 0$, B — чисто имагинерно число, е уравнение на права.

Упътване: Ако z_0, z_1, z_2 са три различни една от друга точки в $\mathbb{C}$, то необходимото и достатъчно условие те да лежат върху една права е $\operatorname{Arg}(z_1-z_0)=\operatorname{Arg}(z_2-z_0)$. От тук веднага следва, че числото $(z_1-z_0)/(z_2-z_0)$ ще е реално, което от своя страна означава, че $(z_1-z_0)/(z_2-z_0)=\overline{(z_1-z_0)/(z_2-z_0)}$.

Задача 1.16. Ако a е комплексно число от единичният кръг ($|a|<1$), то докажете еквивалентността на неравенствата

$$\left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right|<1 \Longleftrightarrow |z|<1.$$

Задача 1.17. Нека числата $z_1,\dots,z_n$, различни две по две, лежат от едната страна на правата l. Да се покаже, че сумите $\sum_{i=1}^{n} z_i$ и $\sum_{i=1}^{n} z_i^{-1}$ са различни от нула.

Задача 1.18. Нека числата $z_1, \ldots, z_n$, $z_i \neq z_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ лежат в единичния кръг. Да положим $P(z) := \prod_{i=1}^n (z - z_j)$. Докажете, че всички нули на полинома $P'(z)$ също лежат в единичния кръг (Теорема на Гаус).[4]

Упътване: Покажете, че

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - z_j}.$$

След това използвайте факта, че всяка допирателна към окръжността има само една обща точка с нея и разгледайте последния израз.

Задача 1.19. Докажете, че уравнението

$$z(t) = (1 - t)z_0 + tz_1,\ 0 \leq t \leq 1$$

представя интервала $[z_0, z_1]$.

[4]В оригинален вид теоремата на Гаус гласи, че ако M е най-малкото изпъкнало множество, което съдържа нулите на даден полином P, то в него лежат и всички нули на полинома P'.

2 Топология в $\mathbb{C}$, граници и непрекъснатост

2.1 Стереографска проекция

В предишната глава видяхме, че между множеството $\mathbb{C}$ на комплексните числа и на точките от равнината Oxy съществува взаимно-еднозначно съответствие, поради което ще ги считаме за идентични.

Нека $\mathcal{S}_f$ е сферата с център в началото на координатната система $(0, 0, 0)$. Ще наречем точката $(0, 0, 1)$ северен полюс N на $\mathcal{S}_f$, а точката $(0, 0, -1)$ — южен полюс S. Нека $P = (x, y)$ е произволна точка от равнината, несъвпадащ със северния полюс. Прекарваме права през P и N. Тази права ще пресече сферата $\mathcal{S}_f$ в единствена точка, да кажем, в точката P'.

Обратно, ако Q' е точка върху сферата, различна от северния полюс N, то съществува, при това единствена точка в равнината $Q \in \mathbb{C}$, в която правата през Q' и през N я пресича.

По този начин се установява взаимно-еднозначно съответствие между точките от сферата, различни от северния полюс, от една страна, и точките от равнината, от друга.

Нека сега $\{P_n\}$ е безкрайна редица от комплексни числа, такава, че

$$|P_n| \to \infty.$$

Очевидно проекциите P'_n върху сферата $\mathcal{S}_f$ ще се приближават към северния полюс N. Това ни дава основание да съпоставим на "безкрайността", т.е. безкрайно отдалечената точка в равнината, северният полюс N върху сферата. Да означим тази точка със символа ∞.

Така установихме взаимно-еднозначно съответствие между цялата сфера $\mathcal{S}_f$ и множеството $\mathbb{C} \bigcup \infty$. Полагаме $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \bigcup \infty$. Множеството $\overline{\mathbb{C}}$ се нарича *разширена Гаусова равнина.*

Нека точката $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, се проектира върху точката $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}_f$. Зависимостта между координатите на двете точки се изразява по следния начин:

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \; x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \; x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Доказателството оставяме на читателя.

Ще отбележим, че в редица случаи е по-удобно да се работи с проекциите върху сферата, вместо с двукоординатните комплексни числа. Както ще се убедим в бъдещите изследвания, това дава възможност да избегнем специалния статус на безкрайната точка в равнината.

Нека $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ са две различни числа. Означаваме с z_1^*, z_2^* техните проекции върху $\mathcal{S}_f$. Пресмятанията показват, че Евклидовото разстояние $|z_1^* - z_2^*|$ между z_1^* и z_2^* е равно на

$$|z_1^* - z_2^*| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\sqrt{|z_2|^2+1}}.$$

Ако разгледаме независимо дясната страна, ще установим че са изпълнени всички изисквания за метрика.[5]

Така дефинираното разстояние се нарича *хордално разстояние* $\chi[z_1, z_2]$ между точките в разширената Гаусова равнина, именно:

$$\chi[z_1, z_2] = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\sqrt{|z_2|^2+1}}.$$

Ще отбележим, че

$$\chi[z_1, \infty] = \frac{2}{\sqrt{|z_1|^2+1}} < \infty.$$

2.2 Топология в $\mathbb{C}$

С оглед на бъдещите разглеждания ще въведем необходимите дефиниции и означения.

Нека $a \in \mathbb{C}$ е точка и числото $r > 0$. Означаваме с $D_a(r)$ отворения кръг

$$D_a(r) := \{z,\ |z-a| < r\},$$

а с $C_a(r)$ — принадлежащата окръжност

$$C_a(r) := \partial D_a(r) = \{z,\ |z-a| = r\}.$$

Навсякъде по-нататък, освен ако не е уговорено обратното, ще наричаме отворения кръг $D_a(r)$ — *околност на точката* a.

По-нататък, нека A и B са две точкови множества в $\mathbb{C}$. Въвеждаме $A \bigcup B$ (обединението на A с B) и съответно $A \bigcap B$ (сечението на A с B) и $A \setminus B$

[5]Метрика, или разстояние $d(a,b)$, $a, b \in X$, в пространството X е функция със следните свойства:

1. $d(a,b) \geq 0$, $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$,
2. $d(a,b) = d(b,a)$,
3. $d(a,c) + d(c,b) \geq d(a,b)$.

(допълнение на B спрямо A) както следва:

$$A\bigcup B := \{z \in \mathbb{C}, z \in A \text{ или } z \in B\},$$
$$A\bigcap B := \{z \in \mathbb{C}, z \in A \text{ и } z \in B\},$$
$$A \setminus B := \{z \in \mathbb{C}, z \in A \text{ и } z \notin B\}.$$

Дефиниция 2.1 (Топология в $\mathbb{C}$)**.** Нека M е точково множество в комплексната равнина $\mathbb{C}$.

Множеството M е *отворено*, ако всяка точка $a \in M$ е същевременно и негова *вътрешна точка*, т.е. принадлежи на M заедно с някоя своя околност.

Множеството M е *затворено*, ако неговото допълнение $M^C := \overline{\mathbb{C}} \setminus M$ спрямо разширената равнина $\overline{\mathbb{C}}$ е отворено. В този случай точките $b \in M^C$ са наричат *външни за* M. С M^0 ще означаваме множеството на вътрешните точки на M. *Границата* ∂M *на* M, или контурът, е множеството, съдържащо точките, всяка околност на които сече както множеството M, така и неговото допълнение M^C. Множеството $\overline{M} := M^0 \bigcup \partial M$ се нарича *затворена обвивка на* M.

M е *компактно множество*, ако е ограничено и затворено.[6]

Множеството е *свързано*, ако всеки две точки могат да бъдат съединени с път, лежащ изцяло в множеството.

И на края, дадено множество $D \subset \mathbb{C}$ е *област*, ако е свързано и отворено.

Дефиниция 2.2 (Топология в $\overline{\mathbb{C}}$)**.** Дефинираме отворени множества по същия начин, както и в Гаусовата равнина $\mathbb{C}$ — посредством въвеждане на кръгови околности, разположени върху сферата $\mathcal{S}_f$. Множеството N в $\mathcal{S}_f$ е затворено, ако допълнението му спрямо $\mathcal{S}_f$ е отворено. Виждаме, че всяко затворено множество върху сферата $\mathcal{S}_f$ е същевременно и компактно върху сферата.

Да напомним някои добре известни релации. Нека A и B са точкови множества. Тогава

$$\left(A\bigcup B\right)^C \equiv A^C \bigcap B^C \quad \text{и} \quad \left(A\bigcap B\right)^C \equiv A^C \bigcup B^C.$$

С помощта на последното доказваме:

[6]Коректната дефиниция за компактно множество е следната: от всяко покритие $\bigcup U_i$ на M от отворени множества може да се избере крайно подпокритие $\bigcup_{i=1}^{N<\infty} U_i \supset M$. Написаното по-горе е известната лема на Хайне-Борел, която следва от тази дефиниция.

Нека M_i, $i = 1, 2, \ldots$ са отворени множества. Тогава безкрайната сума $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ и крайното сечение $\bigcap_{i=1}^{k} M_i$, $k \in \mathbb{Z}$, също са отворени. Ако обаче множествата M_i, $i = 1, 2, \ldots$ са затворени, то крайната сума $\bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $n \in \mathbb{Z}$, и безкрайното сечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ са затворени.

2.3 Теория на сходимостта

Дефиниция 2.3. Нека $\{a_n\}$ е безкрайна редица от комплексни числа. Точката a е *точка на сгъстяване на редицата*, ако всяка околност на a съдържа безброй много членове на редицата.

С други думи, за всяко положително число ε съществува безкрайна редица $\Lambda \subset \mathbb{N}$ от естествени числа, такава че $|a_n - a| < \varepsilon$ за всяко $n \in \Lambda$. Например, редицата

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n-1}, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k+1, \end{cases}$$

има две точки на сгъстяване: $a = 0$ и $a = 1$.

Сега е уместно да напомним известния *принцип на Болцано*, според който всяка ограничена безкрайна числова редица има поне една точка на сгъстяване. В частност, от тук следва, че всяка безкрайна редица върху сферата $\mathcal{S}_f$ се концентрира поне около една точка от $\mathcal{S}_f$. Следователно, пренасяйки това наблюдение върху Гаусовата равнина заключаваме, че всяка безкрайна редица от комплексни числа има поне една точка на сгъстяване в разширената Гаусова равнина — крайна точка или безкрайността.

Дефиниция 2.4. Редицата $\{a_n\}$ *клони към числото* $z = a \in \mathbb{C}$, когато $n \to \infty$, ако точката a е единствената точка на сгъстяване за $\{a_n\}$. Точката a се нарича *граница на* $\{a_n\}$. Пишем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

или

$$a_n \to a, \ n \to \infty.$$

Например, редицата $a_n := i^n/2^n$ клони към нулата.

Класическата теорема на Коши дава необходимо и достатъчно условие за сходимост на дадена редица.

Теорема 2.1 (Коши)**.**

$$a_n \to a, \ n \to \infty$$

тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс $n_0 \in \mathbb{N}$, такъв че

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

всеки път, когато $n \geq n_0$.

Геометричната интерпретация е, че всяка околност на $z = a$ съдържа всички числа a_n, с евентуално изключение на най-много краен брой членове.

Дефиницията се отнася, в общия случай, до сферата $\mathcal{S}_f$. По-точно, редица от точки в комплексната равнина е сходяща, ако върху сферата съответните образи се "натрупват" около образа на границата. По този начин, понятието "сходимост" на редица от комплексни числа включва и безкрайната точка, която има за образ северния полюс N върху сферата. Именно редицата дивергира към безкрайност (в равнината), т.е.

$$a_n \to \infty,\ n \to \infty,$$

тогава и само тогава, когато за всяко число $R > 0$ е вярно неравенството

$$|a_n| > R$$

за всички достатъчно големи числа n.

Лесно се доказва еквивалентното твърдение: редицата $\{a_n\}$ дивергира към безкрайност тогава и само тогава, когато редицата от реципрочни стойности $\{1/a_n\}$ клони към нула.

От теоремата на Коши веднага следва

Теорема 2.2.

$$a_n \to a,\ n \to \infty,$$

тогава и само тогава, когато

$$\Re a_n \to \Re a,\ \Im a_n \to \Im a,\ n \to \infty.$$

Доказателство. Необходимост. Действително, нека $a_n \to a$. Фиксираме произволно положително число ε. Тогава

$$|a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > N$$

за всяко n достатъчно голямо. Както обаче знаем,

$$|\Re(a_n - a)| \leq |a_n - a|,\ |\Im(a_n - a)| \leq |a_n - a|.$$

Прилагайки отново теоремата на Коши, стигаме до твърдението.

Оставяме на читателя да провери верността на достатъчното условие, като ползва аналогични аргументи. Q.E.D.

Да отбележим, че ако $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то очевидно

$$|a_n| \to |a|,\ n \to \infty.$$

В общия случай не е вярна релацията $\arg a_n \to \arg a$, $n \to \infty$. Наистина, да разгледаме редицата

$$a_n := \frac{(i)^n}{n},\ n = 1, 2, \dots,$$

която клони към нулата. Редицата от стойности на аргументите минава през четири стойности, $0, \pi/2, \pi, -\pi/2$, така че не е сходяща. Читателят лесно може да се убеди, че когато границата на редицата е различна от нулата ($a \neq 0$), то горното твърдение е вярно.

Понятието сходимост може да се въведе и чрез т.н. *фундаментална редица на Коши*.

Дефиниция 2.5. Нека $\{a_n\}$ е безкрайна редица от комплексни числа. Казваме, че тя е фундаментална, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс n_0 такъв, че за всяко естествено число m е валидно неравенството

$$|a_n - a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1 може да бъде изказана в термините на фундаментални редици по следния начин:

Теорема 2.3. *Редицата $\{a_n\}$ е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална.*

Доказателството следва същия ход на разсъждения, както и Теорема 2.1, така че ще остане за любознателния читател.

2.4 Функция на комплексна променлива

Да си припомним класическата концепция за функция.

Дефиниция 2.6. Функцията $f : A \to B$ е правило, съпоставящо на всеки елемент от множеството B един и само един елемент от множеството A. Ако на елемента a от A съответства елементът b от B, то пишем

$$f(a) = b.$$

Множеството A се нарича *дефиниционно множество.*

Например, ако имаме функцията

$$f(z) := \frac{z^2+1}{z^2-1},$$

то дефиниционното ѝ множество е $\overline{\mathbb{C}} \setminus \pm 1$. Ако направим уговорката, че $f(\pm 1) = \infty$, то "новата" дефиниционна област ще съвпадне с разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}}$.

Така, както числото $z = x + iy$ се разлага в сума от реална и чисто имагинерна компонента, така и числото $\omega = f(z)$ се представя като сума от реалнозначна и чисто имагинерна функция на променливата $z = x + iy$, т.е.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Пример 2.1. Ако $f(z) := z^2 + 1$, то

$$f(z) = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy.$$

2.5 Непрекъснати функции

Дефиниция 2.7 (Сходимост на функцията в точка)**.** Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в околност на точката z_0 с евентуално изключение на самата z_0. Казваме, че $f(z)$ *има граница в* z_0, ако редицата $f(z_n)$ е сходяща всеки път, когато $z_n \to z_0$.

Да означим с ω_0 границата. По дефиниция тогава

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0,$$

или

$$f(z) \to \omega_0, \ z \to z_0.$$

Имайки предвид досегашните разглеждания, да формулираме необходимото и достатъчно условие дадена функция да е сходяща в дадена точка от дефиниционната си област. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува положително число $\delta > 0$, такова че

$$|f(z) - \omega_0| \leq \varepsilon \ \text{ всеки път, когато } \ |z - z_0| < \delta.$$

Пример 2.2. Покажете, че

$$\lim_{z \to i} f(z) = 0, \ f(z) := \frac{z^2+1}{z+i}.$$

Следващата теорема е следствие на Теорема 2.2.

Теорема 2.4. *Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, като и двете функции са дефинирани и непрекъснати в околност на точката $z_0 = (x_0, y_0)$. В такъв случай $f(z) \to \omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$, $z \to z_0$, тогава и само тогава когато*

$$u(x, y) \to \omega_1,\ z \to z_0 \ \text{ и } \ v(x, y) \to \omega_2,\ z \to z_0.$$

Дефиниция 2.8 (Непрекъснатост на функция в дадена точка)**.** Нека $f(z)$ е дефинирана в околност на точката $z = z_0$. Тогава тя е *непрекъсната в* $z = z_0$, ако

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функцията е непрекъсната в множеството A (пишем $f(z) \in C(A)$), ако е непрекъсната във всяка точка от A.

Поради аналогията с реалния анализ, много от доказаните там резултати са валидни и в комплексния анализ.

Теорема 2.5. *Ако $f(z)$, $g(z) \in C(z_0)$, то функциите $f(z) \pm g(z)$ и $f(z)g(z)$ също са непрекъснати. При това, ако $g(z_0) \neq 0$, $f(z)/g(z)$ е непрекъсната.*

Да се върнем към дефиницията за непрекъснатост (Дефиниция 2.8). Положителното число δ зависи, в общия случай, от точката z_0. Това обстоятелство прави разглежданията силно локални, неуниверсални. Интересуваме се от това, дали може да се елиминира тази зависимост. Така стигаме до понятието *равномерна непрекъснатост*.

Дефиниция 2.9. Нека $f(z)$ е дефинирана навсякъде в множеството E. Казваме, че $f(z)$ е *равномерно непрекъсната в* E, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\delta > 0$, такова че

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \ \text{ всеки път, когато } \ |z_1 - z_2| < \delta,\ z_1, z_2 \in E.$$

Достатъчно условие за равномерна сходимост дава класическата теорема на Вайерщрас.[7]

Теорема 2.6 (Вайерщрас)**.** *Ако K е компактно множество в $\mathbb{C}$ и $f(z) \in C(K)$, то $f(z)$ е равномерно непрекъсната в K.*

Дефиниция 2.10. Нека функцията $f(z)$ е непрекъсната в множеството M. Казваме, че $f(z)$ е *непрекъсната плътно до границата ∂M на M*, ако на всяко $\varepsilon > 0$ може да се съпостави число $\delta > 0$, такова че всеки път, когато $z', z'' \in M$, $|z' - z''| < \delta$, то $|f(z') - f(z")| < \varepsilon$.

[7]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Еквивалентна дефиниция е

Дефиниция 2.11. $f(z)$ е *непрекъсната плътно до границата* ∂M *на* M, ако за всяка точка $z_0 \in \partial M$ е вярно $f(z_0) = \lim f(z_n)$ всеки път, когато $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \in M$.

Теорема 2.7 (Вайерщрас)**.** *В условията на Теорема 2.6 съществува точка* $z_0 \in K$ *в която функцията* $|f(z)|$ *достига своя максимум, т.е.*

$$\max_{z\in K} |f(z)| = |f(z_0)|.$$

Доказателствата на двете теореми на Вайерщрас следват същата логика, както в реалния анализ, така че ще ги пропуснем.

В бъдеще ще означаваме с $\|f(z)\|_K$ числото $\max_{z\in K} |f(z)|$. Предоставяме на читателя да докаже, че така дефинираната функция $\|f(z)\|_K$ е норма (виж задача 2.1).

Дефиниция 2.12. Нека K е компактно множество в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z)$ е непрекъсната върху K. Числото $\|f(z)\|_K$ се нарича *Чебишева*[8]*, непрекъсната, max–норма на* $f(z)$ *върху* K.

2.6 Сходимост на редици от функции

Дефиниция 2.13. Нека функциите $\{f_n(z)\}$ са непрекъснати върху множеството U. Казваме, че редицата $\{f_n(z)\}$ клони равномерно към функцията $f(z)$ в U, ако $\|f_n(z) - f(z)\|_U \to 0$ когато $n \to \infty$.[9]

Връзката между равномерната сходимост на редицата от функции $\{f_n\}$ и непрекъснатостта на функцията, към която клони тя, се дава от следната теорема на Вайерщрас.

Теорема 2.8 (Вайерщрас)**.** *Нека* K *е компактно множество и функциите* $f_n(z) \in C(K)$, $n = 1, 2, \ldots$ *Нека редицата* $\{f_n(z)\}$ *клони равномерно върху* K *към функцията* $f(z)$*. При тези предположения и функцията* $f(z)$ *е непрекъсната върху* K*.*

Доказателство. От първата теорема на Вайерщрас знаем, че ако $f(z)$ е непрекъсната върху K, то тя ще е по необходимост и равномерно непрекъсната. Да докажем това твърдение.

[8] Pafnuty Lvovich Chebyshev (Tchebysheff) (1821-1894)

[9] Освен равномерна сходимост се въвежда и поточкова сходимост, именно $f_n(z_0) \to f(z_0)$ във всяка точка z_0 от U. Очевидно от равномерната сходимост следва и поточкова. Обратното твърдение очевидно не е вярно.

Фиксираме произволно положително число ε. Нашата цел е да намерим $\delta > 0$, такова че $|f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$ всеки път, когато $|z - \omega| < \delta$, $z, \omega \in K$.

Наистина, от условията на теоремата

$$\|f_n(z) - f(z)\|_K \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.1}$$

за всички достатъчно големи числа n, да кажем $n \geq n_1$. Избираме произволно m, $m \geq n_1$. По Теорема 2.6 функцията $f_m(z)$ е равномерно непрекъсната върху K. Следователно, може да се намери положително число δ, такова че

$$|f_m(z) - f_m(\omega)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ всеки път, когато } |z - \omega| < \delta. \tag{2.2}$$

Нека сега $|z-\omega| < \delta$. Като приложим последователно (2.1) и (2.2), получаваме

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\omega)| < |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(\omega)| + |f_m(\omega) - f(\omega)| \leq \\ \leq 2\|f_m(z) - f(z)\|_K + |f_m(z) - f_m(\omega)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

С това доказателството е завършено. Q.E.D.

В по-нататъшното изложение ще ползваме термина *равномерна сходимост* в смисъл на Чебишев върху компактни подмножества да дадена област.

Дефиниция 2.14. Нека $D \in \mathbb{C}$ е област и $\{f_n(z)\}$ редица от функции, дефинирани в D. Казваме, че $\{f_n(z)\}$ клони равномерно в смисъл на Чебишев към някаква функция $f(z)$ върху компактни подмножества на D, ако върху всяко компактно множество $M \subset D$ сходимостта е равномерна, т.е.

$$\|f_n(z) - f(z)\|_M \to 0 \text{ когато } n \to \infty.$$

Следвайки дефиницията за фундаментална редица на Коши, можем да дадем друга формулировка на достатъчното условие за равномерна сходимост на редица от функции.

Теорема 2.9. *Нека K е компактно множество в $\mathbb{C}$ и нека е дадена редицата от функции $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) \in C(K)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогава $\{f_n(z)\}$ клони равномерно върху K, тогава и само тогава, когато на всяко ε може да се съпостави номер n_0, такъв че $|f_n(z) - f_m(z)|_K < \varepsilon$ всеки път, когато $n, m \geq n_0$.*

Доказателството предоставяме на читателя.

Ще завършим тази част с представянето на класическият резултат на Арцела.

Дефиниция 2.15. Редицата от функции $\{f_n(z)\}$, $f_n(z)$ дефинирани в множеството E, се нарича *равностепенно непрекъсната*, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, зависещо от ε, но не и от n, такова че всеки път, когато $z', z'' \in E$, $|z' - z''| < \delta$, за всяко n е вярно неравенството

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \varepsilon.$$

Дефиниция 2.16. Редицата от функции $\{f_n(z)\}$, $f_n(z)$ дефинирани в множеството E, се нарича *равностепенно ограничена в* E, ако съществува константа C, такава че $|f_n(z)| \leq C$ за всяко $z \in E$ и всяко $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.10 (Арцела)**.** *Ако редицата от функции $\{f_n(z)\}$ е равномерно ограничена и равностепенно непрекъсната в множеството E, то от нея може да се избере равномерно сходяща подредица.*

2.7 Limit superior и limit inferior

С оглед на нуждите на бъдещите разглеждания ще въведем понятията *limit superior* и *limit inferior*.

Нека $\{a_n\}$ е безкрайна редица от реални числа, която е ограничена. По принципа на Болцано-Вайерщрас, редицата притежава поне една точка на сгъстяване върху реалната ос.

Дефиниция 2.17. Най-дясната точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}$ от реални числа се нарича $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, докато най-лявата — $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Като пример да разгледаме следната редица

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n = 3k, \\ \dfrac{-n}{n+1}, & n = 3k+1, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 3k+2. \end{cases}$$

Очевидно точки на сгъстяване са $-1, 0, 1$, така че

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1, \ \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Следващите оценки са много полезни и лесно се проверяват: ако $\varepsilon > 0$ е фиксирано положително число, то съществуват числа n_1 и n_2 такива, че

$$a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon, \ n \geq n_1 \quad \text{и} \quad a_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon, \ n \geq n_2.$$

Упражнения

Задача 2.1. Нека K е компактно множество в $\mathbb{C}$. Дефинираме оператора

$$L(f) := \|f(z)\|_K,\ f(z) \in C(K).$$

Докажете, че L е норма в $C(K)$, т.е.

1. $L(f) \geq 0$; $L(f) = 0 \Leftrightarrow f(z) \equiv 0$,
2. $L(\alpha f) = |\alpha| L(f)$ за всяко $\alpha \in \mathbb{C}$,
3. $L(f+g) \leq L(f) + L(g)$.

Задача 2.2. Нека $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$. Кои от следващите функции са норми?

1. $N(z) = x$,
2. $N(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
3. $N(z) = |x| + |y|$.

Задача 2.3. Покажете, че функцията $f(z) := \overline{z}$ е непрекъсната навсякъде в $\mathbb{C}$.

Задача 2.4. Да предположим, че функцията $f(z)$ е непрекъсната в точката z_0. Покажете, че такива са и функциите

$$|f(z)|;\ \Re f(z);\ \Im f(z).$$

Задача 2.5. Нека $\{z_n\}$ е безкрайна редица от комплексни числа. Покажете, че

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \Longleftrightarrow |z_n| \to 0.$$

Задача 2.6. Покажете, че

$$z^n \to \begin{cases} 0, & \text{ако } |z| < 1, \\ \infty, & \text{ако } |z| > 1. \end{cases}$$

Задача 2.7. Покажете, че функцията $\operatorname{Arg} z$ е непрекъсната във всяка точка от равнината, която не лежи върху отрицателната реална полуос $z \leq 0$.

Задача 2.8. Ако $\{a_n\}$ е редица от положителни числа, то покажете, че

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Задача 2.9. Ако $\{a_n\}$ е редица от положителни числа, то докажете, че тя е сходяща тогава и само тогава, когато

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

3 Аналитични функции

3.1 Диференцируемост и аналитичност

Дефиниция 3.1. Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в някаква околност на $\mathcal{G}$ на точката z_0. Казваме, че $f(z)$ е *диференцируема в* z_0, ако съществува границата

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

всеки път, когато

$$\Delta z \to 0.$$

Границата (ако съществува) се нарича *производна на функцията* $f(z)$ *в точката* z_0 и се означава с $f'(z_0)$.

Изразът $\dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ се нарича *диференчно частно в точката* z_0.

И така, ако $f(z)$ е диференцируема в точката z_0, то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} := f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0). \tag{3.1}$$

Както виждаме, дефиницията е същата, както в диференциалното смятане на функция на една променлива. И тук лесно се доказват следните твърдения.

Теорема 3.1. *Ако $f(z)$ и $g(z)$ са диференцируеми в z_0, то диференцируеми са и функциите $f(z) \pm g(z)$ и $f(z)g(z)$, като*

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \ \ (f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

По-нататък, ако $g(z_0) \neq 0$, то частното $f(z)/g(z)$ е диференцируема функция и

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(z_0).$$

Ще отбележим още, че (както е добре известно) от диференцируемостта в някоя точка веднага следва и непрекъснатост в същата точка.

3.2 Геометрична интерпретация на производната

Нека $f(z)$ е диференцируема в точката z_0 и стойността на производната е различна от нула ($f'(z_0) \neq 0$). Да положим $\Delta z := z - z_0$. От (3.1) заключаваме, че

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \to |f'(z_0)|.$$

Тъй като $f'(z_0) \neq 0$, то можем да запишем

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right) \longrightarrow \operatorname{Arg} f'(z_0),\ z \to z_0,$$

или еквивалентно

$$\operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) - \operatorname{Arg}(z - z_0) \longrightarrow \operatorname{Arg} f'(z_0),\ z \to z_0.$$

Изразяваме полученото по следния начин

$$\operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) - \operatorname{Arg}(z - z_0) \approx \operatorname{Arg} f'(z_0),$$

когато числото z е достатъчно близко до z_0.

Заключението е, че ако $f'(z_0) \neq 0$, то в “околност” на точката z_0 изображението $f(z)$ “наподобява” линейната трансформация

$$\omega = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

Това изображение е еднозначно. Не е трудно да се убедим, че при него ъглите се запазват както по големина, така и по посока. Такива функции се наричат *конформни*.

Ще изложим идеята на доказателството. Нека гладките криви γ_1 и γ_2 се пресичат в точката z_0. Да означим с θ ориентираният ъгъл (γ_1, γ_2), т.е. ъгълът който допирателната t_{γ_1} към γ_1 сключва в точката z_0 с едноименната допирателна t_{γ_2}. Ъгълът се отчита в посока t_{γ_1} към t_{γ_2}.

Да означим с $\Gamma_i := f(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, и T_1, T_2 тангентите съответно към Γ_1 и Γ_2 през точката $\omega_0 = f(z_0)$, а ъгълът между тях (от Γ_1 към Γ_2) — с ψ. Нека редиците от точки $\{z_n'\} \in \gamma_1$ и $\{z_n''\} \in \gamma_2$ клонят към z_0, $n \to \infty$.

Тогава за достатъчно близки до z_0 стойности на z_n', z_n'' ще имаме

$$\operatorname{Arg}(f(z_n') - f(z_0)) \approx \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}(z_n' - z_0),$$

както и

$$\operatorname{Arg}(f(z_n'') - f(z_0)) \approx \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}(z_n'' - z_0).$$

Очевидно при тези условия векторът $f(z_n') - f(z)$, както и векторът $f(z_n'') - f(z)$ се доближават съответно до тангентите T_1 и T_2. Ориентираният ъгъл между тях ще се определя от

$$\begin{aligned}\psi &= \lim_{n\to\infty}(\operatorname{Arg}(f(z_n') - f(z_0)) - \operatorname{Arg}(f(z_n'') - f(z_0))) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(\operatorname{Arg}(z_n' - z_0) - \operatorname{Arg}(z_n'' - z_0)) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(\arg(z_n' - z_0) - \arg(z_n'' - z_0)) = \theta.\end{aligned}$$

Теорема 3.2. *Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в околност на точката z_0 и диференцируема в z_0. Тогава, ако $f'(z_0) \neq 0$, то ъгълът между всяка двойка гладки криви, пресичащи се в точката z_0, е равен по големина и по посока на ъгълът между техните образи чрез изображението, осъществявано от функцията $f(z)$.*

3.3 Уравнения на Коши-Риман

Нека $\mathcal{D}$ е отворено множество в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z)$ е дефинирана в околност на точката $z_0 \in \mathcal{D}$ и диференцируема в самата точка. В тази околност е валидно представянето

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy, (x,y) \in \mathcal{G}.$$

Полагаме

$$\Delta z := \Delta x + i\Delta y.$$

По дефиниция,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z_0).$$

Нека най-напред $\Delta z \to 0$ хоризонтално, т.е. нека $\Delta y = 0$. Тогава $\Delta z = \Delta x$ и съгласно (3.1)

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Ако обаче $\Delta z \to 0$ вертикално (или $\Delta x = 0$), то след елементарни трансформации ще получим, че

$$f'(z_0) = -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Тъй като десните страни на двете последни равенства се равняват на стойността на производната в точката z_0, то

$$\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= v'_y(x_0, y_0), \\ u'_y(x_0, y_0) &= -v'_x(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Така получените уравнения (3.2) са известните *уравнения на Коши-Риман.*[10]

Теорема 3.3. *Необходимото условие функцията $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ да е диференцируема в точката z_0 е да са изпълнени уравненията на Коши-Риман (3.2) в точката z_0.*

Следователно, ако $f(z)$ е диференцируема навсякъде в множеството $\mathcal{D}$, то уравненията на Коши-Риман се удовлетворяват във всяка точка от $\mathcal{D}$.

Дефиниция 3.2. Функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са *хармонично спрегнати*, ако удовлетворяват уравненията на Коши-Риман.

За да бъдем математически прецизни, ще обърнем внимание върху обстоятелството, че единствено съществуването на частните производни в дадена точка, както и наличието на уравненията на Коши-Риман в нея, не гарантират диференцируемостта на функцията $f(z)$ в същата точка. Необходимо е още и частните производни u_x, u_y, v_x, v_y да са непрекъснати в околност на точката. В това ни убеждава даденият по-долу пример 3.13.

Предстои да докажем достатъчното условие за диференцируемостта на функцията $f(z)$ в точката z_0.

Теорема 3.4. *Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ е дефинирана в околността $\mathcal{U}$ на точката z_0. Да предположим, че функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са комплексно спрегнати, както и че $u, v \in C^2(\mathcal{U})$. Тогава $f(z)$ е диференцируема в z_0.*

Доказателство. Както и преди $\Delta z := \Delta x + i\Delta y$. Да разгледаме частното

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + \\ + i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \mathcal{L}_{1,\Delta z} + i\mathcal{L}_{2,\Delta z} := \mathcal{L}_{\Delta z}.$$

Преобразуваме израза $\mathcal{L}_{1,\Delta z}$ по следния начин:

$$\mathcal{L}_{1,\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Тъй като функциите u'_x и u'_y по условие са непрекъснати в цялата околност $\mathcal{U}$, то можем да приложим теоремата за крайните нараствания, с което ще получим

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = u_x(x_0^*, y_0 + \Delta y)\Delta x.$$

Точката $x_0^* \in [x, x + \Delta x]$ е подходящо избрана. Пак благодарение на непрекъснатостта на частната производна u_x можем да запишем

$$u_x(x_0^*, y_0 + \Delta y) = u_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1,$$

където $\varepsilon_1 \to 0$, $x_0^* \to x_0$ и $\Delta y \to 0$. Обобщавайки, да запишем

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y) = [u_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x.$$

Аналогично за $u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$ ще имаме

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{1,\Delta z} &= \frac{u_x(x_0^*, y_0 + \Delta y)\Delta x + u_y(x_0, \widetilde{y}_0)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{[u_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x + [u_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.\end{aligned}$$

По подобен начин получаваме и за $\mathcal{L}_{2,\Delta}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{2,\Delta z} = \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0 + \Delta y) + v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{v_x(x_0^*, y_0 + \Delta y)\Delta x + v_y(x_0, \widetilde{y}_0)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{[v_x(x_0, y_0) + \varepsilon_3]\Delta x + [v_y(x_0, y_0) + \varepsilon_4]\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Delta z} = \mathcal{L}_{1,\Delta z} + i\mathcal{L}_{2,\Delta z} &= \frac{u_x\Delta x + u_y\Delta y + iv_x\Delta x + iv_y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + i\varepsilon_3\Delta x + i\varepsilon_4\Delta y}{\Delta x + i\Delta y},\end{aligned} \tag{3.3}$$

като всички частни производни са в точката $z_0 = (x_0, y_0)$. Включвайки сега уравненията на Коши-Риман, стигаме до

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Delta z} &= \frac{u_x\Delta x - v_x\Delta y + iv_x\Delta x + iu_x\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= \frac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{v_x(i\Delta x - \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

Преобразуването на първите два израза води до

$$\mathcal{L}_{\Delta z} = \frac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{v_x(i\Delta x + i^2\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} =$$
$$= \frac{u_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + i\frac{v_x(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \longrightarrow u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Не е трудно да се убедим, че третият израз клони към нула. Действително,

$$\left|\frac{\Delta x(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) + \Delta y(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)}{\Delta x + i\Delta y}\right| \leq$$
$$\leq \frac{|\Delta x||\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| + |\Delta y||\varepsilon_2 + i\varepsilon_4|}{|\Delta x + i\Delta y|} \leq |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| + |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4|,$$

тъй като $|\Delta x + \Delta y| \leq |\Delta x| + |\Delta y|$ (Теорема 1.1). С това доказахме, че частното

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

е сходящо всеки път, когато $\Delta z \to 0$ (или че функцията $f(z)$ е диференцируема в точката z_0). При това,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (u_x + iv_x)_{(x_0, y_0)} = (v_y - iu_y)_{(x_0, y_0)}.$$

Отново обръщаме внимание върху значимостта на условието за непрекъснатост на частните производни на компонентите u, v в околност на точката z_0. Q.E.D.

Изложеното до тук мотивира следната дефиниция:

Дефиниция 3.3. Комплекснозначната функция $f(z)$ е *аналитична в точката* z_0, ако съществува околност $\mathcal{U}$ на точката z_0, в която $f(z)$ е диференцируема. (Казано накратко, $f(z)$ е диференцируема в околност на z_0.) В бъдеще ще използваме означението $f(z) \in \mathcal{A}(z_0)$.

Функцията е аналитична в множеството M ($f(z) \in \mathcal{A}(M)$), ако е *аналитична във всяка точка от* M.

Подчертаваме, че аналитичността е характеристика, имаща смисъл в отворени множества, докато диференцируемостта се отнася до една точка. В нашите бъдещи разглеждания ще се придържаме до терминологията "*$f(z)$ е аналитична в дадена точка z_0*", имайки предвид че $f(z)$ е диференцируема в някаква околност на точката z_0.

Дефиниция 3.4. Функцията $f(z)$ е *цяла*, ако е аналитична във всяка точка от комплексната равнина $\mathbb{C}$. Ще ползваме означението $f(z) \in \mathcal{E}$.

Като първо приложение на гореизложената техника ще докажем следното твърдение:

Теорема 3.5. *Нека $\mathcal{U}$ е област и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Тогава, ако $f'(z) = 0$ във всяка точка от $\mathcal{U}$, то $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.*

Преди да изложим доказателството, ще обърнем внимание върху значимостта на изискването за свързаност на множеството $\mathcal{U}$. Ще илюстрираме с пример. Нека

$$f(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ 0, & |z| > 2. \end{cases}$$

Очевидно $f(z)$ е аналитична във всяка точка, в която е дефинирана, както и че $f'(z) = 0$ навсякъде. Но $f(z)$ не е тъждествена константа. Обяснението е, че дефиниционното множество не е област.

Доказателство. От (3.2) и (3.3) получаваме

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Следователно, $f(z)$ е тъждествена константа. Q.E.D.

Следващите твърдения са следствия на уравненията на Коши-Риман.

Теорема 3.6. *Функцията $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ е тъждествена константа тогава и само тогава, когато*

$$\begin{aligned} u(x,y) &\equiv \mathrm{Const} \;\; \textit{в} \;\; \mathcal{U}, \\ v(x,y) &\equiv \mathrm{Const} \;\; \textit{в} \;\; \mathcal{U}, \\ |f(z)| &\equiv \mathrm{Const} \;\; \textit{в} \;\; \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Дефиниция 3.5. Функцията $h(z)$ е *хармонична в областта* $\mathcal{D}$, ако $h(z) \in C^2(\mathcal{D})$ и $\Delta h(z) := h_{x,x}(x,y) + h_{y,y}(x,y) = 0$ за всяко $z = x + iy$ от $\mathcal{D}$. Операторът Δ се нарича *оператор на Лаплас*. Класът на хармоничните в $\mathcal{D}$ функции ще означаваме с $h(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$.

Връщайки се назад към уравненията на Коши-Риман, лесно се убеждаваме във валидността на

Теорема 3.7. *Ако $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $f(z) = u + iv$, $\mathcal{D}$ — отворено множество, то компонентите u и v са хармонични функции.*

Ще приключим настоящата глава със следната теорема:

Теорема 3.8. *Нека D е област в $\mathbb{C}$ и $f \in \mathcal{A}(D)$. Да означим с G образът на областта D при изображението $f(z)$. Тогава множеството G също е област, освен ако $f(z)$ не е тъждествена константа.*

Упражнения

Задача 3.1. Докажете, че функцията $f(z) = 1/\overline{z}$ е навсякъде недиференцируема.

Задача 3.2. Същото за функцията $f(z) = \sqrt{|z^2 + z|}$.

Задача 3.3. Покажете, че функцията $f(z) := |z|^2$ е диференцируема само в началото.

Задача 3.4. Намерете аналитична функция $f(z)$ такава, че

$$\Re f(z) = \begin{cases} e^x \sin y, & f(0) = 1, \\ x^2 - y^2 - x, & f(1) = 0, \\ \ln |z|, & f(0) = 1. \end{cases}$$

Задача 3.5. Използвайте уравненията на Коши-Риман за да покажете, че функциите $\overline{z}$, $\Re z$ и $2y - ix$ са навсякъде недиференцируеми.

Задача 3.6. Покажете, че $f(z) := (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ не е аналитична във всяка комплексна точка.

Задача 3.7. Да предположим, че $\mathcal{D}$ е област и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $\overline{f(z)} \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Докажете, че $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.

Задача 3.8. Докажете, че ако $f(z)$ е аналитична и реалнозначна функция в областта $\mathcal{D}$, то $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.

Задача 3.9. Нека $f(z)$ е аналитична и различна от нула в областта D. Покажете, че тогава $\ln |f(z)| \in \mathcal{H}(D)$.

Задача 3.10. Конструирайте функция $f(z)$, хармонична извън окръжността $C_0(3)$, която да клони към нула върху самата окръжност, но не е тъждествена нула.

Задача 3.11. Покажете, че ако $\varphi(x, y)$ е хармонична, то функцията $\varphi_x - i\varphi_y$ е аналитична. Предполагаме, че φ има непрекъснати частни производни от всеки порядък.

Задача 3.12. Нека функциите u и v са хармонични. Вярно ли е, че

1. сумата $u+v$ е хармонична функция?
2. произведението uv е хармонична функция?

Задача 3.13. Нека

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{x^{4/3}y^{5/3} + ix^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

Покажете, че условията на Коши-Риман са изпълнени в точката $z = 0$, но функцията не е диференцируема там.

Упътване: Разгледайте поведението на $f(z)/\Delta z$ върху реалната и имагинерната ос.

Задача 3.14. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Изразете компонентите u и v в полярни координати (r,θ). Докажете, че уравненията на Коши-Риман ще имат вида

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \; -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Задача 3.15. Проверете правилото на Лопитал: ако $f(z)$, $g(z)$ са аналитични в z_0 и $f(z_0) = g(z_0) = 0$, но $g'(z_0) \neq 0$, то

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Задача 3.16. Покажете, че ако функциите ϕ и ψ са хармонични в областта D, то функциите u и v,

$$\begin{aligned} u &:= \phi_x\phi_y + \psi_x\psi_y, \\ v &:= \frac{1}{2}(\phi_x^2 - \phi_y^2 + \psi_x^2 - \psi_y^2), \end{aligned}$$

удовлетворяват уравненията на Коши-Риман.

Задача 3.17. Нека D и G са области в $\mathbb{C}$. Да предположим, че f и h са две функции, такива че: $f \in \mathcal{A}(D)$, $f'(z) \neq 0$, $z \in D$, $h \in \mathcal{H}(G)$, $f(D) \equiv G$. Нека, освен това, $h[f(z)] \in \mathcal{H}(D)$.

Да се докаже, че при тези предположения всяка функция от вида $h[g(z)]$, като $g \in \mathcal{A}(D)$, $g'(z) \neq 0$, $z \in D$, също ще е хармонична в областта D.

4 Елементарни функции

4.1 Функцията e^z

Ще повторим дефиницията от Глава 1.

Дефиниция 4.1. Ако $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ще се спрем накратко на основните свойства на експоненциалната функция. Преди това ще въведем понятието *еднолистна функция*.

Дефиниция 4.2. Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в множеството G. Казваме, че $f(z)$ е еднолистна в G, ако от $z_1 \neq z_2$, $z_{1,2} \in G$, следва и $f(z_1) \neq f(z_2)$.

По-късно ще докажем, че ако $f(z)$ е диференцируема в точката z_0 и ако $f'(z_0) \neq 0$, то съществува околност на z_0, в която $f(z)$ да е еднолистна. Обратното твърдение обаче не е вярно, например функцията z^2 не е еднолистна във венеца $\{z,\ 1 < |z| < 2\}$, въпреки че е еднолистна във всяка отделна точка.

Свойства.

1. e^z е периодична с период $2\pi i$, т.е.

   $$e^z = e^{z+2\pi i}.$$

   По-нататък,

   $$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. e^z е еднолистна във всяка хоризонтална ивица с широчина не по-голяма от 2π, т.е. в

   $$\{z,\ -\infty < x < \infty,\ y \in [a, a+l],\ a \in \mathbb{R},\ 0 \leq l \leq 2\pi\}.$$

3. e^z е диференцируема навсякъде в $\mathbb{C}$ и

   $$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

4. Изображението, осъществявано от e^z е конформно, тъй като производната е различна от нула навсякъде.

5. e^z изобразява конформно и еднолистно отсечките (C е константа)

$$\{z,\ z = C + iy,\ \alpha \le y \le \beta,\ \beta - \alpha \le 2\pi\} \text{ върху } \{\omega = e^C e^{i\varphi},\ \alpha \le \varphi \le \beta\},$$
$$\{z,\ z = x + iC,\ a \le x \le b\} \text{ върху } \{\omega = e^x e^{iC}\}.$$

От изложеното до тук следва, че e^z изобразява конформно и еднолистно хоризонталната ивица $\{z,\ -\infty < x < \infty,\ y \in [a, a+l],\ a \in \mathbb{R},\ 0 \le l \le 2\pi\}$ в безкрайния ъгъл $\{\theta,\ a < \theta < a + l\}$. В частност, ако $a = 0$ и $l = 2\pi$, то образът на горната ивица е цялата равнина $\overline{\mathbb{C}}$, разрязана по положителната реална полуос $\{x, x \ge 0\}$.

Доказателствата на тези твърдения оставяме на читателя.

4.2 Тригонометрични функции

Дефиниция 4.3. Ако $z \in \mathbb{C}$, то

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Така дефинирани, функциите $\cos z$ и $\sin z$ съвпадат с вече въведените в Глава 1, така че се явяват тяхно аналитично продължение. Очевидно те са цели функции, защото са дефинирани и диференцируеми навсякъде. Действително, за всяко z

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} = -\sin z.$$

По същия начин и

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

Ще изброим някои от известните свойства:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z,\ \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$
$$\cos(z + \pi) = -\cos z,\ \sin(z + \pi) = -\sin z,$$
$$\cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z,$$
$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,\ \sin 2z = 2\sin z\cos z,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1,$$

както и

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Пример 4.1. Докажете, че $\sin z = 0$ тогава и само тогава, когато $z = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Действително, уравнението се свежда до

$$e^{iz} = e^{-iz}.$$

Последното е вярно тогава и само тогава, когато

$$iz = -iz + 2k\pi i,$$

което трябваше да се докаже.

По-нататък, от тъждествата

$$\cos z = \cos(-z),\ \sin z = \sin(\pi - z),$$

следва че функцията $\cos z$ е еднолистна във вертикалната ивица $\{z,\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$, както и във всяка $\{z,\ k\pi/2 \leq x \leq (k+1)\pi/2\}$, $k = \pm 1, \pm 3, \ldots$, докато функцията $\sin z$ — в $\{z,\ 0 \leq x \leq \pi/2\}$, съответно в $\{z,\ k\pi \leq x \leq (k+1/2)\pi\}$, $k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

С помощта на $\cos z$ и $\sin z$ дефинираме

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Както знаем,

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z,\ \frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z,$$
$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z,\ \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z.$$

Комплексните хиперболични функции са обобщение на известните реалнозначни хиперболични функции

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z},\ \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

4.3 Логаритмичната функция

Дефиниция 4.4. Нека $z \neq 0$. Дефинираме функцията $\omega = \log z$ като което и да било решение на уравнението

$$z = e^{\omega}.$$

За да го решим, полагаме

$$z = x + iy,\ \omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Тогава

$$z = x + iy = |z|e^{i \arg z},\ e^{\omega} = e^{\omega_1} e^{i\omega_2}.$$

Виждаме, че

$$\omega_1 = \ln|z|,\ \omega_2 = \arg z + 2k\pi$$

за $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Окончателно получаваме

$$\log z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Първото наше наблюдение е свързано с **многозначността** на логаритмичната функция (на всяко число от дефиниционната област ($z \neq 0$) съответстват повече от едно функционални значения). За да получим еднозначна функция, наричана още *еднозначен клон*, да фиксираме еднозначна дефиниционна област на аргумента, както и да фиксираме параметъра k.

Например, ако оставим аргумента да се мени единствено в интервала $[0, 2\pi)$ ($\arg z \in [0, 2\pi)$) и фиксираме $k = 1$, то фиксираме еднозначния логаритмичен клон $\log z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi i$ с $\arg z \in [0, 2\pi)$. Казваме още, че сме фиксирали еднозначния клон, дефиниран в $\mathbb{C} \setminus \{z = x,\ x \geq 0\}$ с $k = 1$. Така дефинираният клон е еднолистен, т.е. на различни стойности на аргумента съответстват различни функционални стойности.

Забележка 4.1. Както знаем от реалния анализ,

$$e^{\ln x} = x,\ x > 0 \quad \text{и} \quad \ln e^x = x.$$

Да обърнем внимание, че тези тъждества не се запазват при комплексния логаритъм, по-точно,

$$z = e^{\log z},$$

обаче

$$\log e^z = z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$$

По-нататък, от представянето (4.1) имаме

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \tag{4.2}$$

$$\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2. \tag{4.3}$$

Тук трябва да подчертаем, че равенствата (4.2) и (4.3) следва да се интерпретират като тъждества между класове, но не като тъждества в рамките на конкретен еднозначен клон. Например, ако (4.2) и (4.3) се отнасят до конкретни класове, то може да се намери клас, така че да се стигне до тъждество.

Действително, нека $z_1 = z_2 = -1$. Да изберем за стойност на логаритмичната функция в тези точки стойността $-\pi i$, т.е. $\log z_1 = -i\pi$ и $\log z_2 = -i\pi$. Тогава (4.2) ще е изпълнено, ако вземем стойността $-2\pi i$ за $\log(z_1 z_2)$:

$$\log(-1) + \log(-1) = -2\pi i.$$

Кога ще имаме

$$\log[(-1)(-1)] = \log 1 = -2\pi i?$$

Ако изберем например този клон, при който

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \ \arg z \in [-3\pi, -\pi], \ k = 0,$$

или клона с

$$\log z = \ln |z| + i \arg z - 2\pi i, \ \arg z \in [-\pi, \pi], \ k = -1,$$

то въпросът е решен.

Тъждествата (4.2) и (4.3) не са верни, ако разглеждаме фиксирани еднозначни клонове на логаритмичната функция. Да вземем, например, еднозначния клон, при който $\arg z \in [0, 2\pi)$ и $k = 0$. Ако $z_1 = -1$ и $z_2 = 1 - i$, то за стойността на сумата ще имаме

$$\log(-1) + \log(1 - i) = \ln \sqrt{2} + (11/4)\pi i.$$

В същото време

$$\log[(-1)(1 - i)] = \log(i - 1) = \ln \sqrt{2} + (3/4)\pi i \ \neq \ \ln \sqrt{2} + (11/4)\pi i.$$

Дефиниция 4.5. *Главният клон* $\operatorname{Log} z$ на логаритмичната функция е този клон, който се поражда от главната стойност на аргумента $\operatorname{Arg} z$ и за който $k = 0$, т.е.

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

$\operatorname{Log} z$ наследява от $\operatorname{Arg} z$ прекъснатостта върху отрицателната реална ос, при пресичането на която добавя към началната си стойност 2π.

Теорема 4.1. *Функцията* $\operatorname{Log} z$ *е непрекъсната в цялата комплексна равнина, разрязана по отрицателната реална ос.*

Ще покажем сега, че логаритмичната функция е аналитична във всяка точка $z \neq 0$ (диференцируема в околност на всяка точка) с изключение на точките от отрицателната реална ос.

Теорема 4.2. *Функцията* $\operatorname{Log} z$ *е аналитична в* $D^* := \{z,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$ *и*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}.$$

Доказателство. Фиксираме $z_0 \neq 0$ и полагаме

$$\omega := \operatorname{Log} z.$$

Да разгледаме поведението на диференчното частно

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\omega-\omega_0}{z-z_0}.$$

Отчитайки както че $e^{\omega} = z$, така и факта, че експоненциалната функция е навсякъде аналитична, получаваме

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{\omega-\omega_0} = e^{\omega_0} = z_0.$$

Нашата цел е да покажем, че

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\omega-\omega_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{z-z_0}{\omega-\omega_0}}.$$

Последното следва обаче от

$$\frac{\omega-\omega_0}{z-z_0} = \left(\frac{z-z_0}{\omega-\omega_0}\right)^{-1} = \left(\frac{e^{\omega}-e^{\omega_0}}{\omega-\omega_0}\right)^{-1}.$$

Q.E.D.

От Теорема 4.1 стигаме до важното следствие

Следствие 4.1. *Функциите* $\ln|z|$ *и* $\operatorname{Arg} z$ *са хармонични в* D^*.

4.4 Еднозначни клонове на $\log z$

Дефиниция 4.6. Еднозначен клон на логаритъма в дадена област е такава еднозначно дефинирана аналитична функция, че стойностите ѝ съвпадат с една и само с една стойност на $\log z$ в тази област.

Например, главната стойност $\operatorname{Log} z$ е един еднозначен клон. Да означим с $\mathcal{L}_\tau(z)$ еднозначния клон, за който

$$\mathcal{L}_\tau(z) = \ln|z| + i\arg_\tau z,$$

и $\arg_\tau z \in [\tau, \tau+2\pi]$. Лесно се проверява тогава, че $\mathcal{L}_{\tau+2\pi i}(z)$ е всъщност клонът $\mathcal{L}_\tau(z) + 2\pi i$.

Очевидно е, че всеки клон е аналитична функция за всяко $z \neq 0$ и

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_\tau(z) = \frac{1}{z}.$$

4.5 Комплексни степени

Дефиниция 4.7. Нека $\alpha \in \mathbb{C}$ и $z \neq 0$ са комплексни числа. Дефинираме

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}.$$

Използвайки общата дефиниция на $\log z$, получаваме

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z + 2k\pi i)}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{4.4}$$

От дефиницията се вижда, че e^α е многозначна функция, която във всяка област D от вида $\mathbb{C} \setminus \{z, \; \arg z = \theta\} \bigcup \{0\}$ (т.е. цялата равнина $\overline{\mathbb{C}}$, разрязана по лъча с аргумент θ) притежава еднозначен клон.

Свойства.

1. z^α е еднозначна функция, ако $\alpha \in \mathbb{Z}$.

   Доказателство. Наистина, от дефиницията

   $$z^\alpha = |z|^\alpha e^{\alpha i \arg z} e^{\alpha 2k\pi i} = |z|^\alpha e^{\alpha i \operatorname{Arg} z},$$

   тъй като $e^{\alpha 2k\pi i} = 1$.

2. Функцията z^α приема краен брой стойности, ако $\alpha \in \mathbb{Q}$.

   Доказателство. Действително, нека $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 1$. Тогава

   $$z^\alpha = (z^p)^{1/q} = |z|^{p/q} e^{i(\arg z + 2l\pi)p/q}, \; l = 0, 1, \dots, q-1.$$

3. z^α приема безброй много стойности в останалите случаи.

Лесно се проверява, че

Теорема 4.3. *Функцията z^α е навсякъде ($z \neq 0$) диференцируема и*

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1}.$$

Доказателство. Действително,

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \frac{d}{dz} e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \log z} \alpha \frac{d}{dz}(\log z) = \alpha \frac{z^\alpha}{z}.$$

Q.E.D.

Обръщаме внимание на читателя върху факта, че във всяка точка $z \neq 0$ $\dfrac{d}{dz} z^\alpha \neq 0$. Следователно, изображението z^α е конформно за всяко $z \neq 0$.

Забележка 4.2. Нека $\alpha = m \in \mathbb{Z}$. Тогава

$$(e^{i\theta})^m = \cos(m\theta) + i\sin(m\theta).$$

Последното е известната формула на Моавър[11]

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)}.$$

Да се спрем на областите на еднолистност на z^α. Нека z^α е холоморфен клон и z_1, z_2 са две различни числа, но такива, че

$$z_1^\alpha = z_2^\alpha.$$

Напомняйки (4.4), получаваме

$$|z_1| = |z_2| \ \text{ и } \ e^{\alpha i \operatorname{Arg} z_1} = e^{\alpha i \operatorname{Arg} z_2}.$$

От тук получаваме

$$\alpha i \operatorname{Arg} z_1 = \alpha i \operatorname{Arg} z_2 + 2l\pi i$$

за всяко $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Следователно, при горните условия,

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2l\pi/\alpha.$$

Следствие 4.2. *Функцията z^α е аналитична и еднолистна във всяка област $D := \{z, \theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2,\ \theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi/\alpha\}$.*

Пример 4.2. Да се намери образа на $\{\theta,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ чрез изображението $f(z) = z^{1/3}$, ако $f(i) = -i$.

Функцията $f(z)$ допуска избор на еднолистен клон в посочената област. Този клон се определя от дефиницията:

$$f(z) = |z|^{1/3} e^{i/3(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)},\ k = 0, 1, 2$$

При $k = 0$ образът е $\{\theta,\ 0 < \theta < 2\pi/3\}$, при $k = 1, 2$ — съответно $\{\theta,\ 2\pi/3 < \theta < 4\pi/3\}$ и $\{\theta,\ 4\pi/3 < \theta < 2\pi\}$. Трябва да изберем параметъра k по такъв начин, че $f(i) = -i$. Това очевидно се постига, когато $k = 2$, И така, търсеният образ е ъгълът $\{\theta,\ 4\pi/3 < \theta < 2\pi\}$.

[11]De Moivre's formula

4.6 Многозначни аналитични функции

В този параграф ще изложим общата концепция за многозначна аналитична функция, както и за непрекъснатото продължение на холоморфен елемент по даден път.

Досега използвахме израза *непрекъснат еднозначен клон на* $\log z$ формално, за да означим конкретни стойности на многозначната логаритмична функция. Подчертавахме, че клонът е еднозначно дефинирана аналитична функция.

Дефиниция 4.8. $F(z)$ се нарича холоморфен клон на многозначна аналитична функция $f(z)$ в областта D, ако $F(z)$ е еднозначно дефинирана и непрекъсната в D и има следното свойство: за всяко $z \in D$ стойността на $F(z)$ е една и само една от стойностите на функцията $f(z)$.

Например, функцията $\ln|z| + i\arg z + 4\pi i$, където $\arg z$ се променя в интервала $[0, \pi]$, е холоморфен клон на логаритмичната функция, функцията $\sqrt{|z|}e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$ е еднозначен клон на $\sqrt{z}$ в равнината $\mathbb{C}$, разрязана по отрицателната реална полуос и т.н. От друга страна, в областта $\{z,\ 0 < |z| < 1\}$, както и във венеца $\{z,\ 1 < |z| < 2\}$, функцията $\log z$ не допуска избор на еднозначен аналитичен клон, защото не е възможно да ограничим изменението на аргумента в рамките на 2π, т.е. на едно пълно завъртане около началото.

Действително, ако фиксираме $\log(-1)$ с някаква начална стойност, да кажем, $-i\pi$, то след едно пълно завъртане в положителна посока около нулата аргументът ще се измени с 2π, и ще стане $i\pi$, с което ще се наруши непрекъснатостта, т.е. еднозначността на функцията. Ако обаче "изолираме" от двете области началото, например като разрежем по отсечките $[-1, 0]$, респективно по $[-2, -1]$, можем да изберем еднозначен клон.

Без доказателство ще приведем следната фундаментална теорема:

Теорема 4.4 (Теорема за монодромията). *Нека $f(z)$ е многозначна аналитична функция. Тогава във всяка едносвързана област, във всяка точка на която $f(z)$ е дефинирана, може да се избере еднозначен непрекъснат клон на $f(z)$.*[12]

В бъдеще ще използваме и двата термина — аналитична функция и холоморфна функция, имайки винаги предвид еднозначен аналитичен клон.

[12]Областта D в $\mathbb{C}$ е едносвързана, ако всеки затворен контур в D може да се свие до точка, без при това да се напуска областта (виж Раздел 7.2).

Пример 4.3. Да се намери образа на комплексната равнина $\mathbb{C}$, разрязана по оста чрез изображението

$$f(z) := \sqrt{z-1},$$

като еднозначният клон е дефиниран с условието $f(0) = i$.

Решение. Означаваме областта с D. По дефиниция

$$\sqrt{z-1} = e^{\log(z-1)/2} = |z-1|e^{\arg(z-1)/2}e^{k\pi i}.$$

Трябва да изберем аргумента и номера k по такъв начин, че $f(0) = i$. Един възможен избор е

$$0 \leq \arg(z-1) < 2\pi$$

и $k = 0$. Тогава действително

$$f(0) = e^{\ln|1|/2 + i\pi/2 + 0} = i.$$

Сега предстои да продължим елемента, зададен с условието $f(0) = i$, по непрекъснатост до двата "бряга" на оста $\{z,\ z = x,\ x > 1\}$. Да означим "горния" бряг с l^+, а "долния" — с l^-. Фиксираме точка $x \in l^+$. Нека $\gamma \subset D$ е произволна крива с начална точка 0 и крайна точка x. Ще наричаме тази крива "път от нулата до x". Да проследим изменението $\Delta_\gamma \arg(z-1)$ на аргумента на вектора $(z-1)$, когато точката z се движи по този път, започвайки от началото и завършвайки в x. Виждаме, че

$$\Delta_\gamma \arg(z-1) = -\pi.$$

Първоначалната стойност на $\arg(z-1)$ в нулата е равна на π. Крайната стойност на $\arg(z-1)$ след завършване на движението на z по пътя γ се получава, като към началната стойност се добави изменението, т.е.

$$\arg(x-1) = \pi - \pi = 0.$$

С това получаваме

$$f(z)_{l^+} = \sqrt{x-1}.$$

Да се спрем сега на $f(z)_{l^-}$. Нека $x \in l^-$ и τ е път, свързващ 0 с x. Както и преди, пресмятаме

$$\begin{aligned}
&\Delta_\tau \arg(z-1) = \pi,\\
&\arg(x-1)/2 = \pi + \pi = \pi,\\
&f(z)_{l^-} = -\sqrt{x-1}.
\end{aligned}$$

Образът на областта D е горната полуравнина. Q.E.D.

Упражнения

Задача 4.1. Пресметнете $i^i,\ (-1)^{2/3},\ 2^{\pi i},\ (1+i)^{1+i},\ (1+i)^{1-i}$.

Задача 4.2. Намерете главната стойност на

$$4^{1/2},\ i^i,\ (-1)^{2/3},\ (2i)^{\pi i},\ (1+i)^{1+i},\ (1+i)^{1-i}.$$

Задача 4.3. Пресметнете $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikz}$.

Задача 4.4. Запишете в алгебричен вид числата

$$e^{2+\pi i/4},\ \sin(2i),\ \cos(1-i),\ \cosh(\pi i/2).$$

Задача 4.5. Обяснете защо функцията $\Re(\cos z/e^z)$ е хармонична.

Задача 4.6. Обяснете, без да пресмятате, защо функцията $\ln|z|$ е хармонична във всяка област, която не съдържа началото.

Задача 4.7. Еднозначна и еднолистна ли е функцията e^z в кръг с радиус π.

Задача 4.8. Намерете образа на областта $\{z,\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi\}$ при изображението $\omega = e^z$.

Задача 4.9. Намерете образа на областта $\{z,\ 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y\}$ посредством функцията $\tan z$.

Задача 4.10. Намерете стойността на производната на главната стойност на функцията z^{1+i} в точката $z = i$.

Задача 4.11. Покажете, че функцията $\operatorname{Log}(-z)+\pi i$ е еднозначен клон на $\log z$ в равнината, разрязана по отрицателната реална полуос.

Задача 4.12. Покажете, че

$$\operatorname{Log} e^z = z \iff -\pi \le \Im z < \pi.$$

Задача 4.13 (Ефект на Бернули). Открийте грешката в по-долните разсъждения, "доказващи" че $z = -z$, $z \neq 0$:

$$z^2 = (-z)^2 \to \operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(-z) \to \operatorname{Log} z = e^{\operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Log}(-z)} = -z.$$

Задача 4.14. Покажете, че ако $z_1 = i$ и $z_2 = -1 + i$, то

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(i-1).$$

Задача 4.15. Покажете, че за всяко $m \in \mathbb{N}$

$$z^{1/m} = z^{1/m} \exp\left(\frac{i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i}{m}\right),\ k = 0, 1, \dots m-1.$$

Задача 4.16. Намерете решенията на уравнението $\sin z = \cos z$.

Задача 4.17. Вярно ли е, че $1^z = 1$ за всяко $z \in \mathbb{C}$.

Задача 4.18. Докажете, че $1^0 = 1$.

Задача 4.19. Докажете, че $z^0 = 1$ за $z \neq 0$.

Задача 4.20. Покажете, че $\{z,\ -\pi \leq \arg z < \pi\} \equiv \{z,\ \Re z \leq 0,\ \Im z = 0\}$.

Задача 4.21. Намерете еднозначен клон на функцията $f(z) := \sqrt{z^2 - 1}$, който да е аналитичен извън единичния кръг.

Решение. Полагаме $\omega = f(z)$. Преформулираме проблема в еквивалентния: да намерим функция ω аналитична извън $C_0(1)$ и такава, че

$$\omega^2 = z^2 - 1.$$

Имаме

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}\log(z^2-1)}.$$

Търсим холоморфен клон извън единичния кръг. Нека експериментираме с избрани клонове. Главната стойност на $\operatorname{Log}(z^2 - 1)$ няма да свърши работа, защото по презумпция тя има разрези там, където $z^2 - 1$ приема реални и отрицателни стойности, което означава цялата Oy-ос, както и отсечката $[0, 1]$. Сега да отбележим, че

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z^2(1 - z^{-2})}.$$

Функцията $z\sqrt{(1 - z^{-2})}$ е решение на уравнението за ω. Главната стойност на $\sqrt{(1 - z^{-2})}$ има разрези за z, такива че $(1 - z^{-2})$ е реално и отрицателно, т.е. за $z \in [-1, 1]$. Следователно, функцията $z\sqrt{(1 - z^{-2})}$ удовлетворява исканите условия за аналитичност извън единичния кръг. Q.E.D.

Задача 4.22. Намерете еднозначен клон на $f(z) := \sqrt{z^2 - 1}$, който е холоморфен в единичния кръг.

Задача 4.23. Намерете всички типове области, в които $\sqrt{1 - z^2}$ допуска избор на холоморфен клон.

Задача 4.24. Нека $f(z) := \sqrt{1 - z^2}$ е зададена в цялата равнина, разрязана по отсечката $[-1, 1]$, като еднозначният клон се определя от условието $f(i) > 0$. Продължете по непрекъснатост $f(z)$ и пресметнете $f(0^+)$ и $f(0^-)$.

Задача 4.25. Дайте пример, показващ че главната стойност на $(z_1 z_2)^\alpha$ не е равна произведението на главните стойности $(z_1)^\alpha (z_2)^\alpha$.

Задача 4.26. Покажете, че за $z^{-\alpha} = 1/z^\alpha$, $z \neq 0$, като z^α е главната стойност.

Задача 4.27. Намерете образа на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ при изображението

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1},$$

ако

1. $f(2) > 0$,
2. $f(i) = -\sqrt{2}$.

Задача 4.28. Намерете образа на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ при изображението

$$f(z) = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

където холоморфният клон се определя от условието

1. $f(\infty) = \infty$,
2. $f(\infty) = 0$.

Задача 4.29. Определете образа на ъгъла $\{z, \ \pi/2 < \arg z < \pi\}$ посредством изображението $z^{1/3}$.

Задача 4.30. Намерете конформно изображение на цялата равнина, разрязана по имагинерната ос, върху лявата полуравнина.

5 Конформни изображения

Да напомним определението за конформност (виж Глава 3).

Дефиниция 5.1. Нека функцията $f(z)$ е дефинирана в множеството B, като $f : B \to A$. Казваме, че $f(z)$ е конформна в B, ако изображението запазва ъглите по големина и посока.

Както видяхме в Глава 3, достатъчно условие за конформност на функцията $f(z)$ в множеството B е тя да е аналитична и нейната производна да е различна от нула.

Без да навлизаме в подробност, ще приведем следното твърдение: *необходимото и достатъчно условие една аналитична функция да е еднолистна в дадена точка (т.е. в някаква околност на точката) е нейната производна да е различна от нула в точката (а с това и в някаква нейна околност).* Като сравним с предишния резултат виждаме, че *еднолистността в дадена точка осигурява конформност в същата точка.*

5.1 Линейната трансформация и функцията $1/z$

Дефиниция 5.2. Функцията

$$\omega = \varphi(z) := Az + B,$$

където A и B са фиксирани комплексни числа и $A \neq 0$, се нарича *линейна трансформация*.

Да запишем (5.2) като

$$\omega = \varphi(z) := |A| e^{i \arg A} z + B.$$

Както виждаме, линейната трансформация е композиция на операциите *ротация около нулата с ъгъл, равен на аргумента на коефициента* A,

$$\omega_1 := e^{i \operatorname{Arg} A} z,$$

хомотетия с коефициент $|A|$

$$\omega_2 = |A| \omega_1,$$

и *транслация* в посока на вектора $\overrightarrow{B}$

$$\omega = \omega_3 = \omega_2 + B.$$

Всяка от изброените операции осъществява еднолистно изображение на комплексната равнина в себе си. В частност, тя запазва правите и окръжностите, или, права се изобразява в права, окръжност — в окръжност.

Ще изучим сега свойствата на функцията

$$\omega := \frac{1}{z}.$$

Като начало да отбележи, че тази функция е еднолистна в разширената Гаусова равнина $\overline{\mathbb{C}}$ и я изобразява върху себе си, като $0 \longleftrightarrow \infty$.

Ще покажем, по-нататък, че образът на права в $\mathbb{C}$ е права или окръжност. Наистина, нека най-напред правата l минава през началото. Тогава уравнението ѝ ще има вида:

$$l: \ z = \varrho e^{i\theta}, \ \theta - \text{ъглов коефициент на } l, \ -\infty < a < \infty.$$

Образът на всяка точка от правата е $(1/\varrho)e^{-i\theta}$, което отново е права. Нека сега правата L има уравнението

$$L: \ Ax + By = C, \ C \neq 0, \ |A| + |B| > 0, \ z = x + iy. \tag{5.1}$$

Представяйки $\omega = u + iv$, намираме

$$z = \frac{\overline{\omega}}{|\omega|^2} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

така че

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \ y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Замествайки в (5.1), получаваме

$$A\frac{u}{u^2 + v^2} + B\frac{-v}{u^2 + v^2} = C,$$

или

$$\left| \begin{array}{ll} u^2 + v^2 - \dfrac{A}{C}u + \dfrac{B}{C}v = 0, & C \neq 0, \\ Au - Bv = 0, & C = 0. \end{array} \right.$$

Виждаме, че ако правата L не минава през нулата (т.е. $C \neq 0$), образът ѝ е окръжност, която съдържа нулата. В противен случай ($C = 0$) образът е отново права (както вече доказахме). Ще напомним, че образът на права в $\mathbb{C}$ върху сферата $\mathcal{S}_f$ е окръжност през северния полюс N.

Последните разсъждения мотивират термина “обобщена окръжност” в $\mathbb{C}$ като прообраз на всяка окръжност от сферата $\mathcal{S}_f$ върху разширената Гаусова равнина $\overline{\mathbb{C}}$.

5.2 Трансформация на Мьобиус

Дефиниция 5.3. Трансформацията

$$\omega := \frac{az+b}{cz+d},\ |a|+|c|>0,\ ad-bc\neq 0$$

се нарича *трансформация на Мьобиус*.[13]

Досега разгледаните функции $\omega = Az + B$ и $\omega = 1/z$ са частен случай на трансформацията на Мьобиус. Действително, при $c = 0$ трансформацията е линейна функция. Ако $c \neq 0$, $a = 0$, то получаваме функция от вида $1/z$.

Нека $a, c \neq 0$. Тогава ω може да бъде записана във вида

$$\omega(z) = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{bc-ad}{a(cz+d)}\right),$$

което представлява композиция от линейна функция и функцията $1/z$. Което, от своя страна, показва, че се запазват всички изброени до сега свойства на двете изображение ("обобщена окръжност" $\longrightarrow$ "обобщена окръжност"). Отбелязваме още, че

$$\omega'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Следователно, съгласно Теорема 3.2, изображението е конформно във всяка точка $z \neq -d/c$.

Резюмираме чрез следната

Теорема 5.1. *Трансформацията на Мьобиус* $\omega(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, *е композиция от ротация, хомотетия, транслация и реципрочна функция. Тя е дефинирана навсякъде в* $\overline{\mathbb{C}}$, *изобразява* $\overline{\mathbb{C}}$ *върху себе си, като "обобщена окръжност"* T *отива в "обобщена окръжност". Освен това изображението е конформно за всяко* $z \neq -d/c$.

5.3 Групата на трансформациите на Мьобиус

Нека

$$\omega = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

е трансформация на Мьобиус. Обратната функция $z = f^{-1}(\omega)$ ($f \circ f^{-1} \equiv I$, I — идентитетът) има вида

$$f^{-1}(\omega) = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a},$$

[13]Известна още като дробно-линейна трансформация. August Ferdinand Möbius (1790-1868)

което също е трансформация на Мьобиус. Лесно проверяваме по-нататък, че композицията на две трансформации на Мьобиус също е такава трансформация, по-точно ако $f_i(z) = \dfrac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, $i = 1, 2$, то

$$f_1 \circ f_2(z) := f_1(f_2(z)) = \frac{a_1 f_2(z) + b_1}{c_1 f_2(z) + d_2}$$

е също трансформация на Мьобиус. Освен това, очевидно, $f \circ I(z) = I(z) \circ f(z) \equiv f(z)$. С всичко това доказахме, че множеството на трансформациите на Мьобиус е група по отношение на композицията $\circ$, с единичен елемент идентитета I.

От тази теорема следва

Теорема 5.2. *Две тройки от различни числа* z_1, z_2, z_3, $z_i \neq z_j$, $i, j = 1, 2, 3$, *и* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, $\omega_i \neq \omega_j$, $i, j = 1, 2, 3$, *определят една и само една трансформация на Мьобиус* T *такава, че* $T(z_i) = \omega_i$, $i = 1, 2, 3$.

Доказателство. Преди да пристъпим към доказателството, ще въведем понятието *двойна точка*. Казваме, че точката z_0 е двойна за трансформацията ω, ако

$$\omega(z_0) = z_0. \tag{5.2}$$

Очевидно е, че една трансформация на Мьобиус има не повече от две двойни точки, освен ако не е тъждествена константа. Наистина, ако (5.2) е вярно за три (и повече) различни точки, то квадратното уравнение

$$az + b = cz^2 + dz$$

ще има повече от три корена, следователно $a = d$, $b = c = 0$, или $\omega(z) \equiv CI$, C — константа.

Сега нека $z_i, i = 1, 2, 3$ и $\omega_i, i = 1, 2, 3$ са дадени, $z_i \neq z_j$, $\omega_i \neq \omega_j$, $i, j = 1, 2, 3$. Търсим трансформация $\omega = T(z)$ такава, че

$$T(z_i) = \omega_i. \tag{5.3}$$

Да означим с (z, z_1, z_2, z_3) двойното отношение на точките z, z_i, $i = 1, 2, 3$, т.е.

$$(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

Функцията $T(z)$, $z \in \mathbb{C}$, изобразява еднолистно цялата равнина върху себе си (ако някое z_i е безкрайно, то съответният множител се заменя с единица).

Да обърнем внимание, че последователността на точките z_1, z_2, z_3 е от съществено значение. Тогава търсената трансформация $\omega = T(z)$ се определя от отношението

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Остава да покажем, че $\omega = T(z)$ е единствената трансформация със свойството (5.3). Да допуснем съществуването на друга трансформация S, $S \not\equiv T$, която да удовлетворява (5.3). Тогава композицията $T \circ S^{-1}$ ще има три двойни точки, следователно същата съвпада с идентитета, т.е.

$$T \circ S^{-1} \equiv I.$$

Но тогава

$$T = T \circ S^{-1} \circ S = I \circ S = S,$$

което противоречи на допускането, че $S \not\equiv T$. Q.E.D.

Пример 5.1. Намерете трансформация на Мьобиус $T(z)$, която да изобразява реалната ос $\Re$ върху окръжността $C_0(1)$.

Решение. Избираме три произволни точки върху реалната права, да кажем, $-1, 0, 1$, както и три точки върху окръжността: $-i, 1, i$. Тогава трансформацията $\omega = T(z)$, зададена чрез

$$(z, -1, 0, 1) = (w, -i, 1, i)$$

ще има търсеното свойство. Q.E.D.

Забележка: Намерихме една трансформация, но не и общия вид на всички трансформации с търсените свойства (виж задача 5.6).

Пример 5.2. Нека

$$\omega := \frac{z+1}{z-1}.$$

Намерете образите на $\Re$, $\Im$ и $C_0(1)$ при изображението $\omega = T(z)$.

Решение. Първото наше наблюдение е, че

$$\Re \to \Re.$$

Пресмятаме по-нататък

$$\begin{aligned} T(0) &= -1, \\ T(-1) &= 0, \\ T(1) &= \infty, \\ T(\infty) &= 1, \\ T(i) &= -i. \end{aligned}$$

Следователно образът на имагинерната ос $\Im$ ще е обобщена окръжност през точките $-1, 1, -i$, което е единичната окръжност. Образът на $C_0(1)$ ще е обобщена окръжност през $0, \infty$, която ще е ортогонална на образите на $\Re$ и на $\Im$, в нашия случай — ортогонална на $\Re$ и на $C_0(1)$. Това е, както лесно виждаме, имагинерната ос. Q.E.D.

5.4 Правило на лявата ръка.

Да изберем три точки върху единичната окръжност $C_0(1)$, да кажем -1, $-i$, 1. Те определят посоката $-1 \to -i \to 1 \to -1$ на една обиколка на $C_0(1)$. При тази посока на движение единичният кръг, или вътрешността на окръжността, е от лявата страна ни страна. Ако обаче зададем посоката $-i, -1, 1$, то отляво ще е външността на кръга. Терминологията, която се ползва, е: в първия случай областта $D_0(1)$ е отляво на ориентацията $-1 \to -i \to 1 \to -1$, докато във втория случай отляво на приетата ориентация е $D_0(1)^C$.

Аналогично, горната полуравнина е отляво спрямо посоката, зададена от последователността $-1, 0, 1$ и отдясно спрямо посоката $0, -1, 1$ (посоките се разглеждат върху сферата $\mathcal{S}_f$). Тъй като трансформацията на Мьобиус е конформно изображение, може да се покаже, че тя запазва и ориентацията на граничните криви, а именно:

Теорема 5.3. *Нека G е област в $\mathbb{C}$ с граница $\gamma := \partial G$. Да предположим, че G е отляво по отношение на посоката $z_1 \to z_2 \to z_3$, $z_i \in \gamma$, $i = 1, 2, 3$. Нека $\omega = T(z)$ е трансформация на Мъобиус, която изобразява γ върху Γ и $\Gamma \ni T(z_i) := \omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогава трансформацията T изобразява областта G върху тази област, която е от лявата страна на посоката върху кривата Γ, зададена от последователността $\omega_1 \to \omega_2 \to \omega_3$.*

Пример 5.3. Нека $\omega = T(z)$ е функцията от пример 5.2. Намерете образа на горната полуравнина, на лявата полуравнина и на единичния кръг.

Решение. Както видяхме, трансформацията T осъществява следните изображения:

$$T : \left| \begin{array}{l} \Re \to \Re, \\ \Im \to C_0(1), \\ C_0(1) \to \Im. \end{array} \right.$$

Горната полуравнина е отляво по отношение на посоката $-1 \to 0 \to 1$, така че образът ѝ ще лежи отляво на посоката $0, -1, 1$(т.е. на съответните образи на точките $-1, 0, 1$), което води до долната полуравнина. Аналогични разсъждения водят до извода, че лявата полуравнина се изобразява върху единичния кръг, докато единичният кръг — върху лявата полуравнина. Q.E.D.

5.5 Симетрия и трансформация на Мьобиус

Дефиниция 5.4. Казваме, че двете точки z, $z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ са *симетрични или инверсни спрямо обобщената окръжност* $C_a(r)$, ако

$$z^* = \begin{cases} \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, & z \neq a,\ C = C_a(r), \\ \infty, & z = a,\ C = C_a(r), \\ \mathrm{sym}_l z, & C \equiv l. \end{cases}$$

Очевидно точките z и z^* са инверсни спрямо окръжност и симетрични спрямо права, когато съответно C е окръжност или права. Лесно се проверява, че правата през двете симетрични точки е ортогонална на обобщената окръжност C.

Теорема 5.4. *Нека C е окръжност и $\omega = T(z)$ е трансформация на Мьобиус, и нека точките z, z^* са симетрични спрямо нея. Тогава техните образи $T(z)$ и $T(z^*)$ ще бъдат симетрични спрямо образа $T(C)$ на C.*

Доказателството почива на съответните дефиниции и се оставя на читателя.

Пример 5.4. Намерете всички трансформации на Мьобиус, които изобразяват кръга $D_0(r)$ в себе си.

Решение. Фиксираме произволна точка $a \in D_0(r)$. Симетричната на a спрямо $D_0(r)$ има вида

$$a^* = \frac{r^2}{\overline{a}}. \tag{5.4}$$

Всяка трансформация S от вида

$$S(z) := K\frac{z - a}{z - r^2 a^*},$$

където K е константа, изобразява точките a и a^* b нулата и, респективно, в безкрайността. Поради симетрията образът на окръжността $C_0(r)$ трябва да е такъв, че точките 0 и ∞ да са симетрични спрямо него. Това е окръжност C с център в нулата. Остава да изберем константата K по такъв начин, че

$C \equiv C_0(r)$. За целта взимаме произволна точка от окръжността $z_0 := re^{i\varphi}$ и пресмятаме $S(z_0)$. От (5.4) ще имаме

$$|S(z_0)| = K\frac{re^{i\varphi} - a}{a^* re^{i\varphi} - r^2},$$

или

$$|S(z_0)| = \frac{|K|}{r}\frac{|re^{i\varphi} - a|}{|a^* - re^{i\varphi}|}.$$

Като положим $|S(z_0)| = r$, стигаме до представянето

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - a}{z - r^2 a^*},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Q.E.D.

5.6 Функция на Жуковски

Дефиниция 5.5. Функцията

$$J(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

се нарича *функция на Жуковски.*[14]

Както виждаме, функцията на Жуковски е дефинирана навсякъде в $\overline{\mathbb{C}}$, със стойности в $\overline{\mathbb{C}}$, като полагаме $J(\infty) = 0$ и $J(0) = \infty$. Освен това $J'(z) \neq 0$ за всяко $z \neq 0, \infty$.

Да определим областите на еднолистност. Нека точките $z_1 \neq z_2$ са такива, че $J(z_1) = J(z_2)$. Тогава

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

откъдето веднага виждаме, че

$$z_1 = \frac{1}{z_2}.$$

Да намерим образа на окръжността $C_0(r)$, $r > 1$. Нека $|z_0| = r$, $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Пресмятанията дават

$$J(z_0) = \frac{\cos\varphi}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) + i\frac{\sin\varphi}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

[14] Joukowski transform, Nikolai Yegorovich Zhukovsky (1847-1921)

Лявата страна представлява елипса с фокуси в ± 1 и малка и голяма полуос съответно в $\dfrac{1}{2}\left(r \pm \dfrac{1}{r}\right)$. Ако оставим $r \to 1$, виждаме, че елипсите доближават отсечката $[-1, 1]$ към "горния" и съответно към "долния" бряг на интервала. Точките от вътрешността на единичния кръг имат същото поведение при действието на функцията на Жуковски. Това ни дава право да разглеждаме интервала $[-1, 1]$ като състоящ се от два бряга — горен и долен. Към горния бряг се доближават точките от единичната окръжност с положителни имагинерни части, докато тези с отрицателни имагинерни части доближават долния бряг.

Ще изброим някои свойства на функцията на Жуковски $J(z)$.

Теорема 5.5. *Функцията на Жуковски е еднолистна във вътрешността, съответно във външността на единичния кръг. Единичната окръжност се изобразява върху двата бряга на интервала* $[-1, 1]$.

Да намерим обратната функция $J^{-1}(z)$. Както знаем, функцията $J^(z)$ е еднолистна в областите $D_0(1)$ и $D_0(1)^C$, така че обратната функция ще има еднозначни клонове в същите области. Нека

$$\omega = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Пресмятанията показват, че

$$J^{-1}(\omega) := z = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}.$$

Както виждаме, $J^{-1}(\omega)$ е многозначна аналитична функция и има два непрекъснати клона: единият изобразява равнината, разрязана по интервала $[-1, 1]$ във външността на единичния кръг (при $J^{-1}(\infty) = \infty$), а другият — в неговата вътрешност (при $J^{-1}(\infty) = 0$). Можем да зададем клона и чрез крайно число, например $J^{-1}(2) > 1$ за $(D_0(1))^C$ или $J^{-1}(2) < 1$ за $D_0(1)$.

Упражнения

Задача 5.1. Нека

$$\omega = \frac{1}{z}.$$

Намерете образа на правите $y = kx$ и $y = ax + b$, както и на окръжностите $x^2 + y^2 = ax$ и $x^2 + y^2 = by$.

Задача 5.2. Нека
$$\omega = \frac{z-i}{z+i}.$$
Намерете образа на

1. $C_0(1)$,
2. горната полуравнина,
3. лявата полуравнина.

Задача 5.3. Нека
$$\omega = \frac{z}{z-1}.$$
Намерете образа на безкрайния ъгъл $0 \leq \varphi \leq \pi/4$.

Задача 5.4. Нека
$$\omega = \frac{z-1}{z}.$$
Намерете образа на $\{0 \leq x \leq 1\}$.

Задача 5.5. Нека
$$\omega = \frac{z-1}{z-2}.$$
Намерете образа на $\{0 \leq x \leq 1\}$.

Задача 5.6. Намерете общият вид на трансформация на Мьобиус, изпращаща горната полуравнина в

1. единичния кръг,
2. себе си.

Задача 5.7. Намерете симетричните образи на $|z| = 1/2$, $|z-1| = 1$, $x = 2$ спрямо единичната окръжност.

Задача 5.8. Намерете трансформация на Мьобиус $\omega(z)$, която изобразява горната полуравнина върху единичния кръг по такъв начин, че

1. $\omega(i) = 0$, $\operatorname{Arg}\omega'(i) = -\pi/2$,
2. $\omega(i) = 0$, $\omega(2i) = 1/2$.

Задача 5.9. Намерете еднолистно и конформно изображение на $D := \{z,\ |z| > 1\} \bigcap \{z,\ \Im z < 1\}$ върху горната полуравнина.

Решение. Трансформацията
$$z_1 := \frac{z+i}{z-i}$$
изпраща областта D във вертикалната ивица $\{z,\ 0 < \Re z < 1\}$. Разширяваме ивицата до π, след което извършваме ротация
$$z_2 := \pi e^{\pi/2} z_1.$$
Така получаваме ивицата $\{z,\ 0 < \Im z < \pi\}$. Чрез изображението
$$z_3 := e^{z_2}$$
стигаме до горната полуравнина. Окончателното решение е следната композиция:
$$f(z) = z_3 \circ z_2 \circ z_1(z).$$
Q.E.D.

Задача 5.10. Нека
$$T(z) := \frac{z-1}{z+1}.$$
Намерете образа на областта $G := \{z,\ |z| < 1\} \bigcap \{z,\ |z-1| < 1\}$.

Задача 5.11. Намерете общия вид на трансформация на Мьобиус, която запазва единичния кръг.

Задача 5.12. Намерете конформно изображение на горната полуравнина, разрязана по имагинерната отсечка $[0, i]$, в себе си.

Задача 5.13. Намерете конформно изображение на цялата равнина, разрязана по лъчите $\{z, \Im z = 0, \Re z \geq 1\}$ и $\{z, \Im z = 0, \Re z \leq 11\}$, в горната полуравнина.

Задача 5.14. Областта $\{z,\ |z| \geq 1,\ \Im z > 0\}$, разрязана по лъча $\{z,\ \Re z = 0,\ \Im z \geq 2\}$, да се изобрази в единичния кръг.

Упътване: Приложете трансформацията на Жуковски.

Задача 5.15. Изобразете в горната полуравнина полукръга $D_0(1) \setminus \{z,\ \Im z > 0\}$.

Задача 5.16. Изобразете безкрайния ъгъл $\{z,\ z = \varrho e^{i\theta},\ \pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3,\ 0 < \varrho < \infty\}$ във външността на единичния кръг.

6 Интегриране в комплексната равнина

6.1 Гладка крива в $\mathbb{C}$

Да припомним концепцията за гладка крива.

Дефиниция 6.1. Нека $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ е комплекснозначна функция със следните свойства:

1. Функцията $z(t)$ е еднолистна върху дефиниционния интервал $[\alpha, \beta]$,
2. $z(t) \in C^1([\alpha, \beta])$,
3. $z'(t) \neq 0,\ t \in [\alpha, \beta]$, като $z'(a) := z'(a^+),\ z'(b) := z'(b^-)$.

Кривата γ е образът в комплексната равнина на интервала $[\alpha, \beta]$ при изображението $z(t)$. Ще употребяваме и термина *гладка дъга*.

Дефиниция 6.2. Кривата γ е затворена, ако $z(\alpha) = z(\beta)$. Ако освен това и

$$z'(\alpha) = z'(\beta),$$

то говорим за *крива на Жордан*.[15]

Функцията $z(t)$ се нарича *допустима параметризация на* γ.

Например, комплекснозначната функция

$$z(t) = (1-t)z_0 + tz_1,\ 0 \leq t \leq 1,$$

е една допустима параметризация на интервала $[z_0, z_1]$. Действително, да положим $\Delta := [z_0, z_1]$. Както знаем, $z \in \Delta$ тогава и само тогава, когато векторите $z - z_0$ и $z_1 - z_0$ са колинеарни и отношението $\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ е число между 0 и 1. Следвайки тази мотивация, лесно стигаме до изложеното представяне.

Други примери за параметризация:

Пример 6.1.

$$z_1(t) = \cos t + i \sin t,\ t \in [0, 2\pi], \tag{6.1}$$

както и

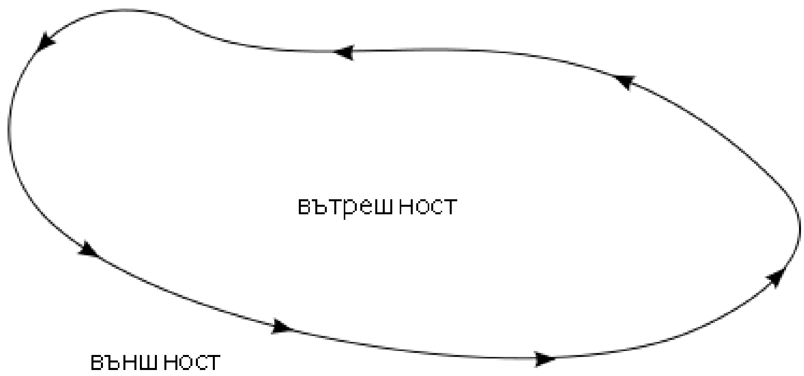
$$z_2(t) = \sin t + i \cos t,\ t \in [0, 2\pi]. \tag{6.2}$$

представят единичния кръг.

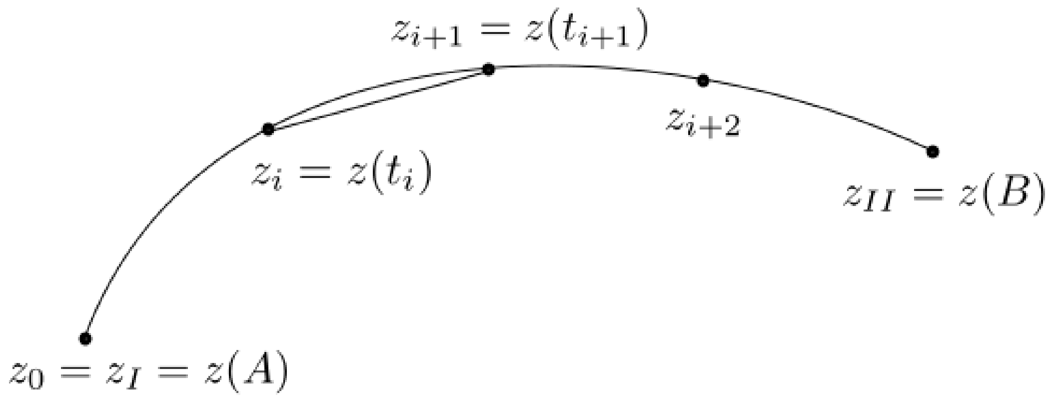
Ще приведем без доказателство класическата теорема на Жордан.

[15] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Теорема на Жордан. *Всяка затворена Жорданова крива разделя равнината на две непресичащи се едносвързани области, наричани вътрешност и външност на кривата.*



Нека γ е гладка крива с краища в точките A и B. Има два начина за ориентиране на кривата, именно: като се движим върху γ в посока от A към B, или, обратно, в посока от B към A. Декларирайки коя е началната точка и коя е крайната, ние въвеждаме посоката върху кривата γ. В бъдеще, знаейки ориентацията на кривата, ще означаваме началната точка с Z_I, а крайната — с Z_{II}.



Дефиниция 6.3. Гладка крива с фиксирана посока се нарича *ориентирана гладка крива*.

В примера (6.1) единичната окръжност е ориентирана по часовниковата стрелка, докато в (6.2) — обратно на часовниковата стрелка. Прието е посоката, обратна на часовниковата стрелка, да бъде *положителна* в универсален смисъл, докато тази по посока на часовниковата стрелка — *отрицателна.* В първия пример означаваме единичната окръжност с $C_0(1)$ (положително ориентирана), докато във втория — с $-C_0(1)$ (отрицателно ориентирана).

В бъдеще ще се нуждаем и от такова прецизиране на ориентацията, което да се свързва с вътрешността на затворената крива.

Дефиниция 6.4. Нека сега γ е затворена ориентирана крива и D е нейната вътрешност. Ако D лежи от лявата страна при движение в посоката на кривата γ, то казваме че γ е *положително ориентирана по отношение на областта* D или че областта D е положително ориентирана спрямо кривата γ. В противен случай тя е *отрицателно ориентирана.*

Да разгледаме венеца $\{z,\ 1 \leq |z| \leq 2\}$. Границата му се състои от окръжностите $\gamma_1 \bigcup \gamma_2$, $\gamma_1 : C_0(2)$, $\gamma_2 := -C_0(1)$. Неговата вътрешност е положително ориентирана спрямо $\gamma_1 := C_0(2)$, както и спрямо $\gamma_2 := -C_0(1)$. В същото време кръгът $D_0(1)$ е отрицателно ориентиран спрямо γ_2.

Дефиниция 6.5. Контурът Γ е или изолирана точка, или крайна последователност $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ от ориентирани гладки криви, такива че краят на γ_k съвпада с началото на γ_{k+1}, $k = 1, \ldots, m-1$.

Например,

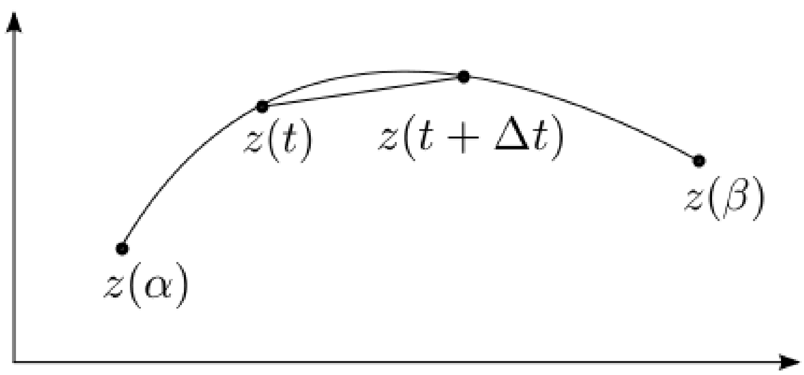
$$z(t) := \begin{cases} \cos t\pi + i \sin t\pi, & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 2 - 2(t-1), & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

е контурът, състоящ се от горната единична полуокръжност и отсечката $[-1, -2]$.

По аналогия с ориентирани криви можем да въведем и ориентирани контури.

Да напомним на края, че дължината $l(\gamma)$ на кривата γ с допустима параметризация $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ се дава от формулата

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta \frac{ds}{dt} dt = \int_\alpha^\beta |z'(t)| dt.$$



Идея за доказателство: Действително, да означим с $s(t)$ дължината на кривата като функция на параметъра t. Ще имаме

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{z(t+\Delta t) - z(t)} \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = 1 \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| .\end{aligned}$$

Дължината на гладката крива се пресмята, като се интегрира изразът

$$\frac{ds(t)}{dt} = s'(t),$$

след като отчетем горната зависимост, окончателно получаваме

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_a^b \frac{ds(t)}{dt} dt = \int_a^b \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

6.2 Интегриране по контури

Дефиниция 6.6. Нека γ е гладка ориентирана крива и

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

е нейна допустима параметризация. Допускаме, че функцията $f(z)$ е дефинирана върху γ, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Нека Z_I и Z_T са началната и съответно крайната точка на γ съгласно декларираната параметризация.

Сега ще дефинираме интеграл върху кривата γ, като следваме познатата конструкция на определен интеграл в смисъл на Риман. Именно: фиксираме естествено число n и разделяме кривата γ на n съставляващи криви, т.е. избираме по произволен начин точките

$$z_0, z_1, \dots, z_n \in \gamma,\ z_0 = Z_I,\ z_n = Z_T,\ z_i = z(t_i),\ i = 0, 1, \dots, n-1,$$

като $t_i < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Фиксираме произволни точки

$$\zeta_{n,i} \in (t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Въвеждаме сега Римановата сума S_n като

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_{n,i})(z_{i+1} - z_i).$$

Дефиниция 6.7. Казваме, че функцията $f(z)$ е интегруема върху γ (по продължение на γ) ако съществува комплексно число $\mathcal{L}$, такова че редицата от сумите S_n да клони към $\mathcal{L}$, когато $n \to \infty$ и $\max\limits_{0 \leq i \leq n-1} |z_i - z_{i+1}| \to 0$. Ако $f(z)$ е интегруема, то полагаме

$$\mathcal{L} := \int_\gamma f(z) dz.$$

Първият естествен въпрос е кога границата $\mathcal{L}$ съществува, т.е. дали функцията е интегруема. Отговор дава класическата теорема на Риман

Теорема 6.1 (Риман)**.** *Всяка непрекъсната върху гладката крива γ функция е интегруема в смисъл на Риман.*

Читателят е запознат с доказателството от лекциите по интегрално смятане на функция на реална променлива. В комплекснозначния случай то следва същата идеология, така че няма да го излагаме.

Следващата теорема е непосредствено следствие от дефиницията на Риманов интеграл. Прецизното доказателство е трудоемко и не съдържа нови идейни моменти в нашите разглеждания, поради което ще го оставим за упражнение на читателя.

Дефиниция 6.8. Нека сега Γ е гладък контур, $\Gamma = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$ и $f \in C(\Gamma)$. Тогава

$$\int_\Gamma f(z) dz := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

От теоремата на Риман веднага следва

Теорема 6.2. *Нека $f(z) \in C(\gamma)$, като γ е ориентирана гладка крива, а $z(t)$ — допустима параметризация, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогава*

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_{[\alpha,\beta]} f[z(t)] z'(t) dt.$$

Или, което е същото,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z) dz &:= \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt = \\ &= \int_\alpha^\beta \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)] dt. \qquad (6.3)\end{aligned}$$

От дефиницията на Риманов интеграл произтичат следните свойства:

1.

$$\int_{\gamma} f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$$

2.

$$\int_{\gamma}(af(z) + bg(z))dz = a\int_{\gamma} f(z)dz + b\int_{\gamma} g(z)dz, \ a, b \in \mathbb{C}$$

Тъй като (6.3) е валидно за всякакви допустими параметризации на кривата γ и тъй като стойността на интеграла от функцията $f(z)$ по продължение на кривата γ е величина, независима от параметризацията, то правим важното заключение

Теорема 6.3. *Нека $z_1(t)$, $t \in [a, b]$ и $z_2(t)$, $t \in [c, d]$ са две допустими параметризации, които имат една и съща посока върху γ. Тогава*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f[z_1(t)]z_1'(t)dt = \int_c^d f[z_2(t)]z_2'(t)dt.$$

6.3 Интеграли по крива

Ще въведем следното означение: ако γ е затворена крива, ориентирана обратно на часовниковата стрелка, и $F(z)$ е интегруема върху γ, то записът

$$\oint_{\gamma} F(z)dz$$

означава, че $F(z)$ се интегрира също в положителна посока върху γ.

Ще започнем с

Дефиниция 6.9. Нека функциите $f(z)$ и $F(z)$ са дефинирани в областта D. Казваме, че $F(z)$ е *примитивна на* $f(z)$ *в* D, ако

$$F'(z) = f(z) \text{ за всяко } z \in D.$$

Да отбележим, че функцията $F(z)$ по необходимост ще е аналитична в областта D (във всяка точка на D). Важно е да се има предвид, че дефиницията не изчерпва въпроса за еднозначността на примитивната, т.е. $F(z)$ може и да не е непрекъсната в областта. Като пример на тази забележка да разгледаме функцията $f(z) = 1/z$ в областта $D_0(1) \setminus \{0\}$. Както знаем, многозначната логаритмична функция е примитивна на функцията $1/z$ за всяко $z \neq 0$. Но логаритмичната функция не е непрекъсната в $D_0(1) \setminus \{0\}$, въпреки че е непрекъсната във всяка точка (т.е. за всяка точка съществува околност, в която функцията е непрекъсната). Действително, при едно пълно завъртане около началото към началната стойност на $\log z$ ще се прибави числото $2\pi i$.

Ако обаче действията се развиват в областта $D_0(1) \setminus [-1, 0]$, то благодарение на теоремата за монодромията можем да изберем еднозначен клон на логаритмичната функция, с което се доказва че съществува непрекъсната примитивна на функцията $1/z$ в областта $D_0(1) \setminus [-1, 0]$.

В следващите разглеждания ще имаме предвид винаги примитивна функция, която е непрекъсната. Според въведената в Глава 4 терминология, това е еквивалентно на изискването примитивната функция да е холоморфен клон в разглежданата област на някаква аналитична функция.

Ще докажем

Теорема 6.4. *Да предположим, че $f(z) \in C[a, b]$, където $[a, b]$ е реален интервал. Нека $F(t)$ е примитивна на $f(z)$. Тогава*

$$\int_{[a,b]} f(z)dz = F(b) - F(a).$$

Доказателство. Използваме представянето $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in [a, b]$, както и $F(t) = U(t) + iV(t)$, $t \in [a, b]$. С оглед на условията ще имаме

$$U'(t) = u(t),\ V'(t) = v(t),\ t \in [a, b].$$

Отчитайки Дефиниция 6.1, можем да запишем

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b [u(t) + iv(t)]dt =$$
$$= \int_a^b [U'(t) + iV'(t)]dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}[u(t) + iv(t)]dt = F(b) - F(a).$$

Q.E.D.

Теорема 6.4 се явява частен случай на основния резултат

Теорема 6.5. *Нека γ е ориентирана гладка крива с начална и крайна точки съответно Z_I и Z_T. Нека, по-нататък, $f(z) \in C(\gamma)$ и $F(z)$ е нейна примитивна върху γ. Тогава*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(Z_T) - F(Z_I).$$

Доказателство. Действително, по дефиниция

$$\frac{d}{dz}F(z) = f(z),$$

което води до

$$\frac{d}{dt}F(z) = f(z)\frac{dz}{dt} = f[z(t)]z'(t).$$

Нека $[a, b]$ е дефиниционният интервал на използваната параметризация $z(t)$. Функцията $f[z(t)]z'(t)$ е дефинирана върху този интервал. При това, функцията $F[z(t)]$ е нейна примитивна (защо?). По Теорема 6.4

$$\int_{[a,b]} f[z(t)]z'(t)dt = F[z(b)] - F[z(a)] = F(Z_T) - F(Z_I).$$

С това доказателството е завършено. Q.E.D.

В бъдеще често ще се възползваме от следната оценка:

Теорема 6.6. *Нека* Γ *е контур и* $f(z) \in C(\Gamma)$. *Тогава*

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \leq \|f(z)\|_\Gamma \, l(\Gamma).$$

Доказателство. Наистина, за Римановите суми имаме

$$|S_n| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(\zeta_{n,i})||z_{i+1} - z_i|,$$

с което

$$|S_n| \leq \|f(z)\|_\Gamma \sum_{i=1}^{n-1} |z_{i+1} - z_i|.$$

Тъй като сумата вдясно клони към дължината на кривата γ, когато $n \to \infty$ и $\max\limits_{0 \leq i \leq n-1} |z_{i+1} - z_i| \to 0$, то нашето твърдение става очевидно. Q.E.D.

Както ще видим по-нататък, тази теорема има много приложения. Като начало, ще докажем

Теорема 6.7. *Нека* γ *е гладка крива и нека редицата от непрекъснати върху кривата функции* $\{f_n(z)\}$ *клони равномерно към функцията* $f(z)$ *в max-нормата върху* γ. *Тогава*

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz.$$

Доказателство. От теоремата на Вайерщрас знаем, че $f(z) \in C(\gamma)$, което гарантира нейната интегруемост (теорема на Риман). Оценяваме разликата

$$\int_\gamma f_n(z) - f(z)dz$$

с помощта на Теорема 6.6. Резултатът е

$$\left|\int_\gamma f_n(z) - f(z)dz\right| \leq \|f_n(z) - f(z)\|_\gamma \, l(\gamma).$$

Нашето твърдение следва от равномерната сходимост на редицата $\{f_n(z)\}$.

Q.E.D.

Упражнения

Задача 6.1. Параметризирайте триъгълника с върхове в точките $(-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, i)$.

Задача 6.2. Използвайки подходяща параметризация, намерете дължината на $[z_1, z_2]$ и на $C_a(\varrho)$.

Упътване: Покажете, че $z \in [z_1, z_2] \iff z = \lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1$.

Задача 6.3. Намерете оценка отгоре на

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz, \ \Gamma = C_0(2).$$

Задача 6.4. Вярно ли е, че

$$\left|\int_\Gamma \frac{dz}{z^2 - i}\right| \leq \frac{3\pi}{4}, \ \Gamma := C_0(3), \ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Задача 6.5. Вярно ли е, че

$$\left|\int_\Gamma \frac{e^{3z}}{1+e^z}dz\right| \leq \frac{2\pi}{e^R - 1},$$

като Γ е отсечката $[R, R + 2\pi i]$.

Задача 6.6. Вярно ли е, че

$$\left|\int_\Gamma e^{\sin z}dz\right| \leq 1,$$

с Γ съвпадащ с отсечката с краища $z = 0$ и $z = i$.

Задача 6.7. Нека $f(z) \in C[a,b]$, $-\infty < a \leq b < \infty$. Докажете, че

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Задача 6.8. Покажете, че

$$\oint_{C_a(r)} \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0, & m \neq 1, \\ 2\pi i, & m = 1. \end{cases}$$

Задача 6.9. Нека γ е ориентирана крива с начална точка $z = a$ и крайна $z = b$. Докажете, като използвате Теорема 6.2 и Теорема 6.4, че

$$\int_\gamma z dz = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Приложете този резултат, за да докажете че за всеки затворен контур е вярно

$$\int_\gamma z dz = 0.$$

Задача 6.10. Нека γ е дъга от единичната окръжност, която лежи в първи квадрант. Докажете, че

$$\left|\int_\gamma \operatorname{Log} z dz\right| \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Задача 6.11. Вярно ли е или не равенството

$$\oint_{C_0(1)} z dz = \oint_{C_0(1)} \frac{dz}{\overline{z}}.$$

Задача 6.12. Нека C е ориентиран квадрат с върхове в точките $0, 1, 1+i, i$. Покажете, че

$$\int_C e^z dz = 0.$$

Задача 6.13. Пресметнете интеграла

$$\int_C \exp{(\overline{z}^2)} dz,$$

като интегрирането се извършва по контура от предишната задача.

7 Интегрална теорема на Коши

7.1 Независимост от пътя на интегриране

Теорема 6.5 може да бъде изказана и по следния начин:

Теорема 7.1. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и нека $f(z) \in C(\mathcal{D})$. Да предположим, че в $\mathcal{D}$ съществува непрекъсната примитивна $F(z)$ на $f(z)$. Нека z_0 и z_T са различни точки в $\mathcal{D}$. В такъв случай интегралът*

$$\int_{z_0}^{z_T} f(z)dz$$

не зависи от пътя на интегриране, или за всеки затворен гладък контур $\gamma \subset \mathcal{D}$, който има за начална точка точката z_0 и за крайна z_T, е вярно равенството

$$\int_{z_0}^{z_T} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = F(z_T) - F(z_0).$$

Теорема 7.1 се нарича *Теорема за независимост от пътя на интегриране.* От нея получаваме очевидното следствие

Следствие 7.1. *В условията на Теорема 7.1, нека γ затворен гладък контур, който лежи в областта $\mathcal{D}$. Тогава*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Основа на бъдещите наши изследвания е следната теорема:

Теорема 7.2. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f(z) \in C(\mathcal{D})$. Тогава са еквивалентни следните твърдения:*

1. *$f(z)$ има непрекъсната примитивна в $\mathcal{D}$,*

2. *$\int_\gamma f(z)dz = 0$ за всеки затворен гладък контур $\gamma \subset \mathcal{D}$.*

3. *Интегралът $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ не зависи от пътя на интегриране, или ако γ_1 и γ_2 са два контура с общо начало и общ край, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Доказателство. Тъй като твърденията 1) $\to$ 2) и 2) $\to$ 3) вече са установени (Теорема 7.1 и Теорема 7.2), ще се спрем на доказателството 3) $\to$ 1).

Избираме произволна точка $z_0 \in \mathcal{D}$ и дефинираме за $z \in \mathcal{D}$ функцията

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Ще покажем, че $F(z)$ е непрекъсната примитивна на $f(z)$ в $\mathcal{D}$. Отбелязваме най-напред, че в условието 3) горният интеграл е еднозначно дефиниран във всяка точка $z \in \mathcal{D}$, така че въпросът за еднозначността, а с това и за непрекъснатостта е решен. Следващата стъпка е установяването на

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \to f(z),\ \Delta z \to 0.$$

Действително,

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z}^{z+\Delta z} f(\omega)d\omega\right),$$

като интегрирането се извършва по отсечка, свързваща двете точки и лежаща изцяло в областта D (или по контур, състоящ се от краен брой отсечки в D).

По Теорема 6.6,

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\omega) - f(z)d\omega\right| \leq$$
$$\leq \|f(\omega) - f(z)\|_{[z,z+\Delta z]} \to 0,\ \Delta z \to 0.$$

Следователно функцията $F(z) := \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ е диференцируема във всяка точка $z \in D$ и освен това $F'(z) = f(z)$. Доказателството е завършено. Q.E.D.

За нуждите на по-нататъшните разглеждания да си припомним концепцията за непрекъснати деформации на криви.

Дефиниция 7.1. Гладката крива γ_1 е непрекъснато деформируема в кривата γ_2, $\gamma_i \subset D$, $i = 1,2$, в областта D, ако съществува функция $z(s,t)$, $(s,t) \in ([0,1] \times [0,1])$, със следните свойства:

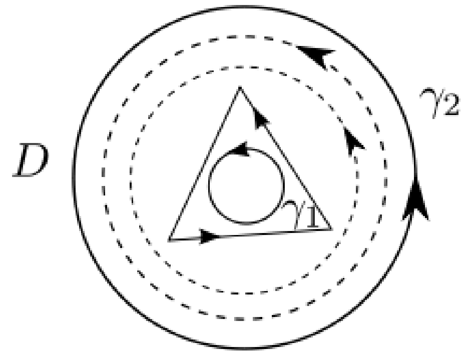
1. $z(s,t) \in C^2([0,1] \times [0,1])$,

2. За всяко фиксирано $s \in [0,1]$ функцията $z(s,t)$ представя гладка крива в D,

3. Функцията $z(0,t)$ е допустима параметризация на кривата γ_1,

4. Функцията $z(1,t)$ е допустима параметризация на кривата γ_2.

Казваме още, че кривите γ_1 са γ_2 *хомотопни в* D.



Например, функцията

$$z(s,t) := (1+s)e^{2\pi i t},\ 0 \le s,t \le 1$$

осъществява непрекъсната деформация на кръга $C_0(1)$ в кръга $C_0(2)$.

7.2 Теорема за инвариантната деформация

Да напомним дефиницията на *едносвързана област*.

Дефиниция 7.2. Ако областта D в $\mathbb{C}$ има свойството всяка затворена крива да може да бъде свита хомотопно в D до вътрешна точка за D, то тя се нарича *едносвързана*.

Например, кръгът $D_a(r)$, $r > 0$ е едносвързана област, докато областта $D_a(r) \setminus \{0\}$, $r > 0$ — не е.

Еквивалентна дефиниция на едносвързаност е

Дефиниция 7.3. Област $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана, ако вътрешността на всеки затворен контур в D е подмножество на D.

Сега вече можем да докажем *Теоремата за инвариантност на непрекъснатата деформация*.

Теорема 7.3. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Ако γ_1 и γ_2 са две непрекъснато деформируеми една в друга затворени криви в $\mathcal{D}$, то*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Доказателство. Фиксираме $s \in [0,1]$ и полагаме $\gamma(s) := z(s,t)$, $t \in [0,1]$. Ще покажем, че интегралът $I(s) := \displaystyle\int_{\gamma(s)} f(z)dz$ е тъждествена константа. Наистина,

$$\int_{\gamma(s)} f(z)dz = \int_{\gamma(s)} f[z(s,t)]\frac{\partial}{\partial t}z(s,t)dt.$$

Да пресметнем производната $I'(s)$. Имаме

$$\begin{aligned} I'(s) &= \int_{\gamma(s)} \frac{\partial}{\partial s}\left[f[z(s,t)]\frac{\partial}{\partial t}z(s,t)\right] = \\ &= \int_{\gamma(s)} \left[\frac{\partial}{\partial t}f[z(s,t)]\frac{\partial}{\partial s}z(s,t)\frac{\partial}{\partial t}z(s,t) + f[z(s,t)]\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}z(s,t)\right]dt. \end{aligned}$$

От друга страна, изразът в скобите е всъщност

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f[z(s,t)]\frac{\partial}{\partial s}z(s,t)\right].$$

По теоремата на Вайерщрас

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}z(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}z(s,t),$$

така че за $I'(s)$ получаваме

$$\frac{d}{ds}I(s) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[f[z(s,t)]\frac{\partial}{\partial s}z(s,t)\right]dt =$$
$$= f[z(s,1)]\frac{\partial}{\partial t}z(s,1) - f[z(s,0)]\frac{\partial}{\partial t}z(s,0).$$

Но тъй като кривите $\gamma(s)$, $s \in [0,1]$ са затворени, то $z(s,0) = z(s,1)$, както и $\frac{\partial}{\partial t}z(s,1) = \frac{\partial}{\partial t}z(s,0)$. Следователно, $I'(s) = 0$ и

$$I(s) = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Q.E.D.

Следствие на Теорема 7.3 е известната *интегрална теорема на Коши.*

Теорема 7.4 (Интегрална теорема на Коши)**.** *Нека D е едносвързана област и нека $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Тогава върху всеки затворен контур* Γ, *съдържащ се в D, е валидно равенството*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Доказателство. Доказателството следва от обстоятелството, че всяка затворена крива в областта D може да се свие непрекъснато до точка, вътрешна за областта. Действително, по дефиниция вътрешността на Γ лежи в областта D. Фиксираме точка z_0, вътрешна за Γ. По Теорема 7.3

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

за всяка хомотопна на нея крива γ в областта. Свивайки γ до точката z_0, стигаме до твърдението. Q.E.D.

Преди да преминем към следващия резултат, да въведем класа $C(\overline{\mathcal{D}})$

Дефиниция 7.4. Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$, $\partial\mathcal{D} = \Gamma$ и $f(z)$ — функция, зададена върху $\overline{\mathcal{D}}$. Казваме, че $f(z) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, ако за всяка точка $z_0 \in \Gamma$

$$f(z_0) = \lim f(z_n) \ \text{ всеки път, когато } \ z_n \to z_0 \ \text{ и } \ \{z_n\} \subset \mathcal{D}.$$

Използва се и терминът *функцията $f(z)$ е непрекъсната плътно до границата* Γ *на областта $\mathcal{D}$.*

Очевидно класът $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{D}})$ се съдържа в класа $C(\overline{\mathcal{D}})$. Действително, ясно е включването $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{D})$. Нека сега $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{D}})$. По дефиниция 3.3 за аналитични функции, функцията $f(z)$ ще е аналитична в подходяща околност $U(z)$ на всяка точка z от границата Γ. Очевидно $\bigcup_{z\in\Gamma} U(z) \supset \Gamma$. Тъй като кривата Γ е компактно множество в $\mathbb{C}$, то от обединението $\bigcup_{z\in\Gamma} U(z)$ можем да изберем крайно подпокритие $W := \bigcup_{i=1}^{M} U(z_i)$ на Γ. В W функцията $f(z)$ ще е аналитична, или още $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D} \bigcup W)$. Тогава $f(z) \in C(\mathcal{D} \bigcup W)$. И тъй като $C(\mathcal{D} \bigcup W) \supset \overline{\mathcal{D}}$, то $f(z) \in C(\overline{\mathcal{D}})$.

Показахме още, че ако $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{\mathcal{D}})$, то съществува отворено множество $G \supset \mathcal{D}$, $G = \bigcup_{i=1}^{M} U(z_i) \bigcup \mathcal{D}$, такова че $f(z) \in \mathcal{A}(G)$.

Да се върнем към тематиката на Коши. Ще докажем

Теорема 7.5. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$, $\Gamma := \partial(\mathcal{D})$ и нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогава*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказателство. Без да нарушаваме общността на разглежданията, можем да предположим че контурът Γ се състои от гладки компоненти. Ще разгледаме първо случая, когато областта $\mathcal{D}$ е едносвързана. Фиксираме контур Ω във вътрешността на $\mathcal{D}$ и хомотопен с Γ. Според интегралната теорема на Коши

$$\int_{\Omega} f(z)dz = 0.$$

Оставяме сега Ω да приближава хомотопно Γ. Тогава

$$\int_{\Omega} f(z)dz \to \int_{\Gamma} f(z)dz,$$

поради непрекъснатостта на $f(z)$ в затворената обвивка $\overline{\mathcal{D}}$. Нашето твърдение е доказано за случая на едносвързани области. Общият случай лесно се свежда до разгледания. За яснота да приемем, че областта $\mathcal{D}$ е двусвързана. Нека Γ се състои от две гладки криви $-\Gamma_1$ и Γ_2, като $-\Gamma_1$ е вътрешната крива, а Γ_2 — външната. Отбелязваме че кривата Γ_2 е положително ориентирана, докато $-\Gamma_1$ — отрицателно. Фиксираме произволни точки $z_1 \in \Gamma_1$ и $z_2 \in \Gamma_2$

и ги свързваме чрез крива ν, лежаща изцяло в областта $\mathcal{D}$.

Правейки разрез по ν, ние въвеждаме помощна област Γ с граница кривата $-\Gamma_1$, долния бряг ν^- на ν, Γ_2 и горния бряг ν^+ на ν. Тази област е положително ориентирана спрямо посочения контур и е едносвързана. Според вече доказаното

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz + \int_{\nu^-} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\nu^+} f(z)dz = 0.$$

Като отчетем равенството

$$\int_{\nu^-} f(z)dz = -\int_{\nu^+} f(z)dz,$$

виждаме че

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz = 0.$$

Твърдението следва от представянето

$$\Gamma = \Gamma_2 \bigcup (-\Gamma_1).$$

Q.E.D.

Теоремата на Коши изразява връзката между едносвързаността на област и съществуването на непрекъсната примитивна. По-точно, валидна е

Теорема 7.6. *Нека областта $\mathcal{D}$ в $\mathbb{C}$ е едносвързана и нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Тогава $f(z)$ притежава непрекъсната примитивна в областта, всеки контурен интеграл не зависи от пътя на интегриране и интегралът върху затворен контур, принадлежащ на областта, е равен на нула.*

Доказателството следва от Теорема 7.3.

7.3 Интегрална формула на Коши

Теорема 7.7. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$, $\Gamma := \partial\mathcal{D}$ и нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогава, за всяка точка $a \in \mathcal{D}$ е валидно представянето*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{7.1}$$

Доказателство. Фиксираме положително число r такова, че $\overline{D_a(r)} \subset \mathcal{D}$ и $f \in \mathcal{A}(\overline{D_a(r)})$. Да разгледаме

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta.$$

Оставяйки сега $r \to 0$, получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = f(a).$$

За да завършим доказателството, използваме Теорема 7.5 по отношение на функцията $f(z)/(z-a)$ и областта $\mathcal{D} \setminus \overline{D_a(r)}$. Q.E.D.

Друг начин да се получат резултати, свързани със съществуването на непрекъсната примитивна в областта на разглеждания, е чрез извличане на информация от интеграли по контури, лежащи изцяло в областта. Според Теорема 6.2 съществуването на непрекъсната примитивна е еквивалентно на анулирането на всеки интеграл по вътрешна крива. Ще представим теоремата на Морера, която можем да разглеждаме като обратно твърдение на интегралната теорема на Коши.

Теорема 7.8 (Морера)**.** *Ако функцията $f(z)$ е непрекъсната в областта D и е такава, че*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

за всеки затворен контур $\gamma \subset D$, то $f(z)$ е аналитична в D.

От интегралната теорема на Коши следва *теоремата за средните стойности на хармоничните функции.*

Теорема 7.9. *Нека $h(z)$ е хармонична в кръга $D_a(R)$, $R>0$. Тогава*

$$h(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}h(a+Re^{i\theta})d\theta.$$

Доказателство. Доказателството почива на следното твърдение (виж задача 7.7): ако $h\in\mathcal{H}(D)$, D — едносвързана, то съществува $f\in\mathcal{A}(D)$, такава че $\Re f=h(z)$, $z\in D$.

Нека $f(z)\in\mathcal{A}(D_a(R))$ е такава, че $h(z):=\Re f(z)$. Да означим имагинерната компонента чрез $k(z)$:

$$f(z)=h(z)+ik(z),\ z\in K_a(R).$$

Ползвайки (7.1) получаваме

$$h(a)+ik(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(R)}\frac{h(\zeta)+ik(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta.$$

От тук

$$h(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{h(a+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta.$$

След извършване на необходимите пресмятания, стигаме до твърдението. Q.E.D.

Упражнения

Задача 7.1. Коя от следните области е едносвързана?

1. $\{z,\ |\Im z|<1\}$,
2. $\{z,\ 1<|z|<2\}$,
3. $\{z,\ |z|<1\}$,
4. $\{z,\ |z|>1\}$,
5. $\{z,\ |z|<1\}\setminus\{z,\ 0<\Re z<1\}$.

Задача 7.2. Покажете, че

$$\int_{C_0(\varrho)}\frac{dz}{(z-a)}=\begin{cases}0, & |a|>\varrho\\ 2\pi i, & |a|<\varrho.\end{cases}$$

Задача 7.3. Пресметнете

1. $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{1+z^2} dz$, като $\mathcal{S}$ е отсечката $[1, 1+i]$.

2. $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ за всеки контур в дясната полуравнина през точките $z = -3i$ и $z = 3i$.

3. $\displaystyle\int_{\Gamma} \sqrt{z}\, dz$ за главната част на $\sqrt{z}$ по контура, изобразен по-долу.

Задача 7.4. Покажете, че ако функцията $f(z)$ има вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{z^k} + g(z),$$

където $g(z)$ е аналитична функция в кръга $D_0(1)$ и непрекъсната върху $C_0(1)$, то

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i A_1.$$

Упътване: Както знаем по дефиниция

$$\oint_{|z|=1} := \int_{C_0(1)},$$

като интегрирането по $C_0(1)$ се извършва в посока, обратна на часовниковата стрелка.

Задача 7.5. Нека P е полином от степен ≥ 2, и нека всички негови нули лежат в кръга $\mathcal{D}_0(R)$, $R > 0$. Покажете, че

$$\oint_{|z|=R} \frac{1}{P(z)} dz = 0.$$

Упътване: Приложете Теорема 7.5 по отношение на венеца $\{z,\ R < |z| < R + r\}$ и оставете r да расте неограничено.

Задача 7.6. Пресметнете

1. $$\int \frac{\cos z}{z^2+1}dz$$
   върху правоъгълника с върхове в $1, 2i, -1, 1+i$,

2. $$\oint_{C_0(1)} \frac{\sin z}{z-\pi/2}dz,$$

3. $$\int_{C_0(1)} \frac{z+i}{z^3+2z^2}dz.$$

Задача 7.7. Нека D е едносвързана област в $\mathbb{C}$ и функцията $h(z)$ е хармонична в D. Тогава съществува функция $f(z)$ аналитична в D, такава че $\Re f(z) = h(z)$, $z \in D$.

Задача 7.8. Използвайте интегралната формула на Коши, за да докажете че, ако $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_a(r)})$, $r > 0$, то

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta$$

и

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Задача 7.9. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_0(1)})$. Покажете че, ако $|f(z)| \leq M$ за $|z| = 1$, то $|f(0)| \leq M$ и $|f'(0)| \leq M$. Каква ще бъде оценката за $|f^{(n)}(0)|$? Покажете че

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!M.$$

Покажете още, че ако $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_a(r)})$, $r > 0$, то

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n}\|f(z)\|_{\overline{D_a(r)}}.$$

Задача 7.10. Дадена е едносвързана област D, $\Gamma := \partial D$ и нека $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Покажете, че за всяко $z_0 \in D$ е валидна формулата

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz.$$

Задача 7.11. По-долу е изложено доказателството на твърдението: *ако* $f(z)$ *е холоморфна функция в областта* D*, която не се анулира в* D*, то може да се намери аналитичен и еднозначно дефиниран клон на логаритмичната функция* $\log z$ *в областта.* Проверете всяка отделна стъпка в доказателството.

1. $f'(z)/f(z) \in \mathcal{A}(D)$.
2. $f'(z)/f(z)$ има непрекъсната примитивна в D, да я наречем $H(z)$.
3. Функцията $f(z)e^{-H(z)}$ е тъждествена константа в D, така че $f(z) = ce^{H(z)}$.
4. Ако a е стойността на $\log c$, то функцията $H(z) + a$ е еднозначен и непрекъснат клон на $\log f(z)$ в D.

Задача 7.12. Пресметнете

$$\int_\Gamma \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)} dz,$$

където контурът Γ, по който се интегрира, е "цифрата осем" с център, разположен в началото, и съдържаща точките ± 1 в двете си вътрешности. Посоката е обратна на часовниковата стрелка.

Задача 7.13. Нека

$$I(z) := \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}.$$

Докажете, че $I(z) = 0$, като следвате разсъжденията

1. $I_R(z) := \oint_{|z|=R} \dfrac{dz}{z^2(z-1)^2}$,

2. $|I_R(z)| \leq \dfrac{2\pi}{R(R-1)^2}, \; R > 2,$

3. $\lim\limits_{R\to\infty} I_R(z) = 0.$

8 Следствия на интегралната теорема на Коши

8.1 Принцип за максимума на модула на аналитичните функции

Ако $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, то, както знаем от класическия резултат на Вайерщрас, функцията $|f(z)|$ достига своята максимална стойност в затворената обвивка $\overline{\mathcal{D}}$ на $\mathcal{D}$. Къде са разположени точките на абсолютния максимум? В случая на аналитични функции отговора предоставя следната теорема, известна като *принцип за максимума на аналитичните функции*.

Теорема 8.1. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогава $|f(z)|$ достига максималната си стойност $\overline{\mathcal{D}}$ в точка от границата $\partial\mathcal{D}$, ако $f(z)$ не е тъждествена константа.*

Доказателство. Ако $f(z) \equiv \mathrm{Const}$, то твърдението е тривиално. Поради това ще предполагаме, че $f(z) \not\equiv \mathrm{Const}$. Да допуснем, че теоремата не е вярна. Фиксираме точката z_0 по такъв начин, че

$$\max_{z \in \overline{\mathcal{D}}} |f(z)| := |f(z_0)|.$$

Съгласно направеното допускане, такава съществува.

Ако z_0 е точка от границата, то няма какво да доказваме. Затова нека предположим, че тя е вътрешна точка. По формулата на Коши тогава

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z_0}(\varrho)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \tag{8.1}$$

където числото ϱ е достатъчно малко. Тъй като $f(z) \not\equiv \mathrm{Const}$, то съществува дъга γ в $C_{z_0}(\varrho)$ с положителна дължина $l(\gamma)$, където има строго неравенство, т.е.

$$|f(z)| < |f(z_0)|, \quad \text{когато} \quad z \in \gamma.$$

Тогава съществува положително число δ, такова че да е вярно неравенството

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| - \delta, \ \delta > 0, \ z \in \gamma.$$

Ще оценим сега (8.1) с помощта на неравенството

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(|f(z_0)| - \delta) l(\gamma)}{\varrho} + |f(z_0)| \frac{2\pi\varrho - l(\gamma)}{2\pi\varrho}.$$

Тъй като $\delta > 0$ и $l(\gamma) > 0$, то след елементарни преобразования ще получим

$$|f(z_0)| < |f(z_0)|.$$

Полученото противоречие се дължи на допускането, че $z_0 \in \mathcal{D}$. С това теоремата е доказана. Q.E.D.

8.2 Теорема на Лиувил

Друго важно следствие на формулата на Коши е, че всяка аналитична функция е безброй много пъти диференцируема.

Теорема 8.2. *Нека $\mathcal{D}$ е област и $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. Нека $a \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ е произволна точка. Тогава $f(z)$ е безброй много пъти диференцируема в $z = a$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ е валидна формулата*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_{z_0}(\varrho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \tag{8.2}$$

където радиусът ϱ е достатъчно малък.

Доказателство. Ще докажем твърдението най-напред за $n = 1$. По формулата на Коши

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(\varrho)} \frac{f(z)}{(z-a)} dz,$$

ϱ такова, че $f \in \mathcal{A}(\overline{D_a(r)})$. Образуваме диференчното частно

$$\frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}$$

и разглеждаме неговото поведение, когато $\Delta a \to 0$.

Имаме

$$\begin{aligned} \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta a} \oint_{C_a(\varrho)} \left(\frac{f(z)}{z - a\Delta a} - \frac{f(z)}{z-a} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(\varrho)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-a-\Delta a)} dz. \end{aligned}$$

При $\Delta a \to 0$ получаваме

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a} = \oint_{C_a(\varrho)} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Това равенство осигурява съществуването на първата производна в $z = a$ и доказва с (8.2) за $n = 1$.

Общият случай се доказва чрез математическа индукция. Доказателството се оставя на читателя. Q.E.D.

Следствие на Теорема 8.2 е *теоремата на Лиувил*.[16]

[16] Joseph Liouville (1809-1882)

Теорема 8.3 (Лиувил)**.** *Нека $f(z)$ е цяла функция. Да допуснем, че е ограничена в $\mathbb{C}$. Тогава $f(z) \equiv \mathrm{Const}$.*

Доказателство. Фиксираме произволна точка $a \in \mathbb{C}$ и число $n \in \mathbb{N}$. Отчитайки (8.2), пишем

$$f^{(n)}(a) = n! \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Тъй като $f(z) \in \mathcal{E}$, то в последния интеграл числото r също може да бъде произволно. Прилагайки Теорема 6.6, виждаме, че

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \frac{M}{r^n}.$$

Като оставим сега $r \to \infty$, ще получим

$$f^{(n)}(a) = 0.$$

Следователно, всяка производна в точката $z = a$ се анулира. Да обърнем внимание върху обстоятелството, че точката $z = a$ е произволно избрана. Очевидно е тогава, че $f(z) \equiv \mathrm{Const}$. Q.E.D.

8.3 Лема на Шварц

Следващият резултат е известен като *лемата на Шварц.*

Теорема 8.4 (Лема на Шварц)**.** *Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_0(1)})$, като $f(0) = 0$ и $\|f(z)\|_{\overline{D_0(1)}} := M$. Тогава за всяко $z \in \overline{D_0(1)}$ е валидно неравенството*

$$|f(z)| \leq M|z|. \tag{8.3}$$

Ако за някакво z_0, $|z_0| < 1$ е изпълнено

$$|f(z_0)| = M|z_0|,$$

то $f(z) \equiv Mze^{i\alpha}$ с $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказателство. Да въведем функцията $g(z) := f(z)/z$. От условията на теоремата следва, че $g(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_0(1)})$, като $\|g(z)\|_{\overline{D_0(1)}} = M$. Принципът за максимума на аналитични функции води до неравенството

$$|g(z)| \leq \|g(z)\|_{\overline{D_0(1)}} = M.$$

От тук веднага следва оценката (8.3). От друга страна, ако

$$|g(z_0)| = M$$

за някое $z_0 \in D_0(1)$, то по необходимост $g \equiv \mathrm{Const} = Me^{i\alpha}$ за някакво α. Връщайки се обратно към представянето на g, получаваме

$$f(z) = zMe^{i\alpha}.$$

Q.E.D.

Теорема 8.5. *Нека $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$, $\{f_n(z)\} \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$, и нека редицата от функции $\{f_n(z)\}$ клони към функцията $f(z)$ равномерно върху компактни подмножества на $\mathcal{D}$. Тогава $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$.*

Доказателство. Нека K е произволно компактно подмножество на $\mathcal{D}$. От Теорема 2.8 следва, че $f(z) \in C(K)$. Тъй като компактното множество K е произволно, то очевидно $f(z) \in C(\mathcal{D})$.

Фиксираме сега произволна затворена гладка крива γ в $\mathcal{D}$. Теоремата на Коши осигурява равенствата

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0,\ n = 1, 2, \dots$$

От друга страна, поради равномерната сходимост на редицата $\{f_n(z)\}$ върху γ, сходимостта върху съответните контурни интеграли се запазва (виж Теорема 6.7), т.е.

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz.$$

С това и

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

върху всеки контур в $\mathcal{D}$. Остава сега да приложим теоремата на Морера, според която $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$. С това доказателството е завършено. Q.E.D.

8.4 Хармонични функции

Забележка 8.1. Използвайки теоремата за средните стойности на хармоничните функции, можем по аналогичен начин да установим валидността на *принципа за максимум на хармоничните функции.* Нещо повече, в сила е и *принципът за минимума на хармоничните функции.* Последното твърдение се получава след наблюдението, че ако $h \in \mathcal{H}(D)$, то и $-h \in \mathcal{H}(D)$.

Теорема 8.6. *Нека D е област в $\mathbb{C}$ и $h(z) \in \mathcal{H}(D)$. Тогава функцията $h(z)$ достига максималната си и минимална стойност в точки, лежащи върху границата ∂D на областта D, освен ако не е тъждествена константа.*

Доказателството оставяме на читателя.

От Теоремите 8.2, 8.5 и 6.2 следва

Теорема 8.7. *Нека D е област в $\mathbb{C}$. Да предположим, че редицата от аналитични в D функции $\{f_n(z)\}$ клони равномерно при $n \to \infty$ към функцията $f(z)$ върху компактни подмножества на D. Тогава $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и за всяко $m \in \mathbb{N}$ редицата от m-тите производни също клони към $f^{(m)}(z)$ равномерно върху компактни множества в D.*

Принципът за максимума не е достатъчно прецизен при провеждането на по-детайлни изследвания. Това обуславя необходимостта от въвеждане на по-силен резултат, какъвто се явява *формулата на Йенсен.*

8.5 Формула на Йенсен

Теорема 8.8 (Формула на Йенсен[17]). *Нека $f(z) \in \mathcal{A}(D_0(R))$ и нека точките $z_1, \ldots, z_n$ са нули на функцията $f(z)$ в $D_0(R)$.*[18] *Тогава е валидна формулата*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|d\theta = \ln|f(0)| - \sum_{i=1}^{n} \frac{R}{|z_i|}.$$

Доказателство. Да започнем с припомнянето на познатата зависимост (виж Глава 1): ако a е число, $a \neq 0$, то

$$\left| R\frac{z-a}{z\overline{a}-R^2} \right| = 1 \tag{8.4}$$

всеки път, когато $|a| < R$ и $|z| = R$.

Разглеждаме сега помощната функция

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{\omega_1(z)\cdots\omega_n(z)},$$

където

$$\omega_i(z) := R\frac{z-z_i}{z\overline{z_i}-R^2}.$$

Позовавайки се на (8.4), проверяваме че

$$|f_1(Re^{i\theta})| = |f(Re^{i\theta})|. \tag{8.5}$$

[17] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925)

[18] Нулите се броят със своите кратности.

Очевидно $f_1(z) \in \mathcal{A}(D_0(R))$, освен това по конструкция тази функция не се анулира в кръга $D_0(R)$. Следователно $\ln|(f_1(z)| \in \mathcal{H}(D_0(R))$. Прилагайки теоремата за средните стойности на хармоничните функции, получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_1(Re^{i\theta})| = f_1(0). \tag{8.6}$$

От (8.5) имаме

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_1(Re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|. \tag{8.7}$$

От друга страна,

$$\ln|f_1(0)| = \ln|f(0)| - \sum_{i=1}^{n} \ln\frac{R}{|z_i|}.$$

От тук веднага следва търсеното равенство, след като вземем под внимание (8.6) и (8.7). Q.E.D.

Упражнения

Задача 8.1. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$, като $f(z) \neq 0$, $z \in \overline{\mathcal{D}}$. Докажете, че $\min\limits_{z\in\overline{\mathcal{D}}} |f(z)|$ се достига в точка от границата на областта $\mathcal{D}$, освен ако $f(z) \equiv$ Const.

Задача 8.2. Като ползвате принципа за максимума на аналитичните функции, докажете, че всеки полином, който не е константа, има поне една нула в комплексната равнина $\mathbb{C}$. След това докажете, че броят на нулите е равен на степента на полинома.

Задача 8.3. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(D_0(1))$ и $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$. Докажете неравенството

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)},\ r > 1.$$

Задача 8.4. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(D_0(r))$ е ограничена в кръга $D_o(r)$ отгоре от числото M. Докажете, че

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{(r-|z|)^n},\ |z| < r.$$

Задача 8.5. Нека $f(z) \in \mathcal{E}$ и $\Re f(z)$ са ограничени в $\mathbb{C}$. Докажете, че $f(z) \equiv$ Const.

Упътване: Приложете теоремата на Лиувил за функцията $e^{f(z)}$.

Задача 8.6. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$, $\mathcal{D}$ — област, като $|f(z)| \equiv \mathrm{Const}$ за $z \in \partial\mathcal{D}$. Докажете, че съществува поне една вътрешна точка в областта $\mathcal{D}$ такава че $f(z_0) = 0$.

Задача 8.7. Дадена е областта $\mathcal{D}$. Нека функциите $f(z), g(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D}) \bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Да предположим, че за всяка точка $z \in \mathcal{D}$ е изпълнено неравенството $g(z) \neq 0$. Докажете, че ако $|f(z)| \leq |g(z)|$ за всяко $z \in \partial\mathcal{D}$, то неравенството се запазва и в $\mathcal{D}$.

Решение. Полагаме $F := f/g$. От $|g(z)| > 0$, $z \in \partial D$ следва, че $F \in \mathcal{A}(D)$. При това, $\|F\|_{\overline{D}} \leq 1$. Твърдението следва от принципа за максимума на аналитичните функции. Q.E.D.

Задача 8.8. Ако $p(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i$ е полином, такъв че $\|p(z)\|_{|z|\leq 1} \leq M$, то докажете, че за неговите коефициенти са валидни оценките $|a_i| \leq M$.

Задача 8.9. Докажете, че ако $P(z)$ е полином от степен n и $P(\alpha) = 0$, то $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$, като $Q(z)$ е полином от степен $n-1$.

Упътване: Възползвайте се от равенството $P(z) = P(z) - P(\alpha)$, и след това от разлагането

$$z^k - \alpha^k = (z-\alpha)\sum_{l=1}^{n-1} z^{n-1-l}\alpha^l.$$

Задача 8.10. Като приложение на горната задача докажете, че всеки полином от степен n има точно n корена (с отчитане на техните кратности).

Задача 8.11. Пресметнете $\|(z+1/2)(z-1)\|_{|z|\leq 1}$.

Задача 8.12. Покажете, че $\|az^n + b\|_{|z|\leq 1} = |a| + |b|$.

Решение. Без да нарушаваме общността ще считаме, че $a = 1$.

$$\|z^n + b\|^2_{|z|\leq 1} = \|z^n + b\|^2_{|z|=1} = (z^n + b)(\overline{z}^n + \overline{b}) = 1 + |b|^2 + 2\Re(z^n\overline{b})$$

Изразът вдясно достига своя максимум, когато $z = \sqrt{\frac{b}{|b|^2}}$, който е $1 + 1 + |b|^2 + 2|b|$. Q.E.D.

Задача 8.13. Нека D е област и $f(z)$ — полином, който не се анулира върху границата ∂D. Покажете, че броят на нулите на $f(z)$ в областта D се дава от интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Упътване: Започнете с установяването на равенството

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k},$$

където z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, са нулите в областта D. Обърнете внимание, че нулите могат да бъдат и многократни.

9 Развитие на аналитичните функции в степенни редове

9.1 Степенни редове

В тази глава ще въведем основни резултати относно степенните редове. Ще припомним най-напред основните свойства на безкрайните редове.

Дефиниция 9.1. Нека $\{a_n\}$ е безкрайна редица от комплексни числа. Въвеждаме *безкрайния ред* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ по следния начин:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Редът е *сходящ*, ако редицата $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ е сходяща, когато $N \to \infty$, в противен случай редът е *разходящ*.

Крайната сума S_N се нарича *N-та парциална сума*, а a_n — общ член на реда.

Очевидно е, че първият индекс, от който започва сумирането, не влияе върху сходимостта на реда, а само върху неговата числена стойност. С други думи: *редът* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ и всеки ред* $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$.

Базисен резултат е следната

Теорема 9.1. *Нека редът* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходящ. Тогава*

$$a_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Твърдението следва от дефиницията, както и от представянето

$$a_N = S_N - S_{N-1}.$$

Общоизвестен факт е, че Теорема 9.1 осигурява само необходимо условие, но не и достатъчно. Хармоничният ред, например, е разходящ,[19] докато в същото време общият му член клони към нулата.

Ще приведем едно необходимо и достатъчно условие за сходимостта на редове, известно като условие на Коши:

Теорема 9.2 (Коши)**.** *Безкрайният ред* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *е сходящ тогава и само тогава, когато на всяко положително число* ε *може да се съпостави естествено число* m*, такова че за всяко положително число* k

$$\left|\sum_{n=m}^{m+k} a_n\right| < \varepsilon.$$

Доказателството следва от дефиницията за сходимост на безкраен ред и от общата теория на Коши за сходящи редици. За справки — Теорема 2.1.

Дефиниция 9.2. Степенен ред е формалният ред

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ z \in \mathbb{C}, \ a, c_i, i = 0, 1, \ldots, \ -\text{фиксирани.}$$

Тук n-тата парциална сума $S_n(z)$ е крайната сума от първите $n+1$ члена. Казваме, че степенният ред е *сходящ в точката* $z_0 \in \mathbb{C}$, ако редицата от комплексни числа $\{S_n(z_0)\}$ е сходяща при $n \to \infty$. В противен случай степенният ред е *разходящ в точката* $z = z_0$.

Прилагайки Теорема 9.2, заключаваме, че ако редът е сходящ в точката $z_0 \in \mathbb{C}$, то

$$c_n (z_0 - a)^n \to 0, \ n \to \infty.$$

В бъдеще ще използваме означенията

$$S(z) < \infty, \text{когато редът е сходящ в точката } z,$$
$$S(z) = \infty, \text{когато редът е разходящ в } z.$$

[19]Следва от представянето

$$S_{n+m} - S_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n+k},$$

и неравенствата

$$1 + \frac{m-1}{n+1} = \frac{m+n}{n+1} \geq S_{n+m} - S_n \geq \frac{n+m}{n+m} = 1.$$

Очевидно разликата $S_{n+m} - S_n$ не може да става произволно малка — сравни Теорема 2.1.

Обръщаме внимание върху факта, че парциалната сума е полином, така че безкрайният степенен ред

$$S_k(z) := \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} c_n (z-a)^n,$$

е граница на аналитични функции, така че всички резултати от Глава 2 са приложими.

Дефиниция 9.3. Степенният ред

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

е *абсолютно сходящ*, ако е сходящ редът с неотрицателни членове

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n.$$

Редът е *равномерно сходящ* върху компактното множество E, ако редицата от парциалните суми S_n, $n \to \infty$, е равномерно сходяща върху E в метриката на Чебишев. Редът е равномерно сходящ в областта D, ако е равномерно сходящ върху компактните подмножества на D.

Ще приведем някои добре познати резултати.

Теорема 9.3. *Нека редът* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *е абсолютно сходящ в точката* z_0. *Тогава той е сходящ в регулярен смисъл в същата точка.*

Доказателство. Доказателството се позовава върху теоремата на Коши (Теорема 2.3).

Фиксираме произволно положително число ε. По условие, редът е абсолютно сходящ в точката z_0. Според фундаменталната теорема на Коши съществува естествено число k_0, такова че

$$\left| \sum_{n=0}^{k+m} |c_n||z_0-a|^n - \sum_{n=0}^{k} |c_n||z_0-a|^n \right| \le \varepsilon,$$

всеки път, когато $k \ge k_0$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогава

$$\sum_{k+1}^{k+m} |c_n||z_0-a|^n \le \varepsilon.$$

От друга страна, от неравенството на триъгълника имаме

$$|S_{k+m}(z_0) - S_k(z_0)| = \left|\sum_{k+1}^{k+m} c_n(z_0 - a)^n\right| \leq \sum_{k+1}^{k+m} |c_n||z_0 - a|^n.$$

Твърдението следва от фундаменталната теорема на Коши. Q.E.D.

Теорема 9.4 (Абел[20]). *Нека степенният ред*

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

е сходящ в точката z_0. Тогава $S(z)$ е абсолютно сходящ във всяка точка z, такава че $|z - a| < |z_0 - a|$, и равномерно сходящ във всеки кръг $D_a(r)$ с $0 < r < |z_0 - a|$.

Доказателство. Ще докажем най-напред сходимостта във всяка точка от кръга $D_a(|z_0 - a|)$. Нека z е произволна точка, такава че $|z - a| < |z_0 - a|$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. По предишната теорема,

$$|c_n(z-a)^n| \leq \varepsilon$$

за всяко $n \geq n_0$. По-нататък,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}|z_0-a|^n \leq \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0} |c_n|\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}|z_0-a|^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |c_n||z_0-a|^n\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \leq \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_0} |c_n|\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}|z_0-a|^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}.
\end{aligned}$$

Да разгледаме втората сума

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \varepsilon\frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n}.$$

Сравнявайки членовете на двата реда с неотрицателни коефициенти,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |c_n||z-a|^n \leq \varepsilon \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n},$$

[20] Niels Henrik Abel (1802-1829)

виждаме, че редът $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |c_n||z-a|^n$ е също сходящ (напомняме, че $|z-a| < |z_0-a|$). Но тогава, по предишната теорема, сходящ ще бъде и редът $\sum_{n_0+1}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Оставащата част $\sum_{n=0}^{n_0} c_n(z-a)^n$ е полином, така че той не оказва влияние върху процеса на сходимост на степенния ред.

Така стигаме до извода, че степенният ред е абсолютно, а следователно, и регулярно сходящ във всяка точка z във вътрешността на кръг с център в $z = a$ и радиус, равен на разстоянието между точките a и z_0.

Да вземем сега $r < |z_0 - a|$. Степенният ред е сходящ във всяка точка върху окръжността $C_a(r)$, така че, според принципа за максимум на аналитичните функции, той ще е сходящ и във вътрешността. С това се доказва, че сходимостта е равномерна. Q.E.D.

От теоремата на Абел получаваме важното

Следствие 9.1. *Ако редът* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *е разходящ в точката* z_0*, то той е разходящ във всяка точка* z*, за която* $|z-a| > |z_0-a|$.

Доказателство. Действително, ако $|z-a| > |z_0-a|$ и ако редът е сходящ в точката z, то, благодарение на теоремата на Абел, той ще е сходящ и в точката z_0. Но това противоречи на условието. Q.E.D.

Виждаме, че областите на сходимост са кръгови. Очевидно съществува поне една точка, в която редът е сходящ — това е самата точка a. Ако това е единствената точка, в която редът е сходящ, то говорим за *формален* степенен ред. За нас, естествено, е интересен въпросът има ли други точки на сходимост и кои са областите, където редът е сходящ. Така достигаме до дефиницията за *радиус на сходимост*.

Дефиниция 9.4. Нека $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ е степенен ред. Въвеждаме

$$R := \sup\{\varrho,\ S(z) < \infty,\ |z-a| < \varrho\}.$$

Числото R се нарича *радиус на сходимост* на степенния ред.

Да отбележим, че радиусът на сходимост R е неотрицателно число. $R = 0$ тогава и само тогава, когато редът има формален характер. В противен случай R е положителен. Визирайки теоремата на Абел, заключаваме, че редът е сходящ във вътрешността на кръга $D_a(R)$ и разходящ извън него.

Теорема 9.5 (Формула на Коши-Адамар)**.**

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Доказателство. Ако $R = 0$, то няма какво да доказваме. Затова да предположим, че R е положителен. Фиксираме $0 < \varrho < R$. Ще покажем, че редът е сходящ върху кръга $D_a(\varrho)$.

Избираме положително число ε по такъв начин, че $\varrho+\varepsilon < R$. От дефиницията на R следва, за всяко достатъчно голямо число n ($n > n_0$), неравенството

$$|c_n| \leq \frac{1}{(R-\varepsilon)^n}.$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right\|_{C_a(\varrho)} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-a|^n = \\
&= \sum_{n=0}^{n=n_0-1} |c_n||z-a|^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n||z-a|^n < \\
&< \sum_{n=0}^{n=n_0-1} |c_n||z-a|^n + \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R-\varepsilon}\right)^n.
\end{aligned}$$

Виждаме, че

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |c_n||z-a|^n \ll \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R-\varepsilon}\right)^n.$$

Благодарение на избора на числото ε, дясната страна е сходяща геометрична прогресия. Следователно, редът $S(z)$ е абсолютно сходящ и, поради това, сходящ и в регулярния смисъл. Q.E.D.

Забележка 9.1. Поведението на степенния ред върху окръжността на сходимост $C_a(R)$ не подлежи на общи разглеждания. Действително, геометричната прогресия $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (която е абсолютно и равномерно сходяща в единичния кръг) е разходяща във всяка точка от единичната окръжност. Редът

$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, който има същия радиус на сходимост, е сходящ в точката -1 и разходящ във останалите точки от единичната окръжност.

Теорема 9.6. *Нека редът* $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *има положителен радиус на сходимост* R. *Тогава той е равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на кръга* $D_a(R)$ *и абсолютно сходящ за всяка точка* $z \in D_a(R)$.

Доказателство. Фиксираме $\varrho < R$. По предишната теорема,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\varrho^n < \infty.$$

За разликата $S_{n+m} - S_n$ имаме

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\overline{D_a(\varrho)}} = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k(z-a)^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |c_k|\varrho^k.$$

Прилагайки теоремата на Коши, получаваме за достатъчно големи n

$$\|S_{n+m} - S_n\|_{\overline{D_a(\varrho)}} = o(1),$$

което и осигурява равномерната сходимост върху $\overline{D_a(\varrho)}$. Q.E.D.

9.2 Теорема на Тейлър и следствия

Теорема 9.7 (Тейлър)**.** *Нека* $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D_a(\varrho)})$, $\varrho > 0$, $a \in \mathbb{C}$. *Тогава* $f(z)$ *се развива в степенен ред на Тейлър*[21]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

същият е равномерно сходящ във вътрешността на кръга $D_a(\varrho)$. *За коефициентите* c_n *е валидна формулата*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a(\varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

[21] Ако $a = 0$, то редът се нарича ред на Маклорен. Colin MacLaurin (1698-1746), Brook Taylor (1685-1731)

Доказателство. От интегралната теорема на Коши имаме за точки z, такива че $|z-a| < |\zeta - a|$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\varrho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,\ \ z \in D_a(\varrho).$$

Следователно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\varrho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta.$$

Прилагайки стандартни преобразования, стигаме до представянето

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\varrho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Q.E.D.

Да обсъдим въпроса за големината на радиуса на сходимост на горния ред. Оставяме на читателя да съобрази, че $R = |a - \alpha|$, α — най-близката до a точка на неаналитичност на $f(z)$.

Забележка 9.2. Очевидно е вярна формулата

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Като пример да развием функцията $\mathrm{Log}(z+1)$ в ред на Маклорен.

Решение. Като начало да припомним, че

$$\mathrm{Log}(z+1) = \ln|z+1| + i\,\mathrm{Arg}(z+1),$$

където $\mathrm{Arg}(z+1) \in [-\pi, \pi)$. Диференцирайки, получаваме

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z+1) = \frac{1}{z+1}.$$

Дясната страна има за $|z| < 1$ развитието

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^{n+1}}{n+1}.$$

От последното представяне следва, че

$$\mathrm{Log}(z+1) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} \equiv C,$$

където C е константа. За да я определим, пресмятаме стойността на разликата в някоя точка от вътрешността на единичния кръг, например в точката нула. Ще имаме

$$C = \operatorname{Log} 1 - 0 = 0,$$

откъдето веднага заключаваме, че

$$\operatorname{Log}(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}.$$

Q.E.D.

Пример 9.1. Развийте функцията $\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ в ред на Тейлър около $z = 1$.

Решение. Тъй като

$$\frac{d^j}{dz^j} \operatorname{Log} z = (-1)^{j+1} (j-1)!\, z^{-j}, \ j = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= 0 + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{2!(z-1)^3}{3!} - \frac{3!(z-1)^4}{4!} + \cdots = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} (z-1)^j. \end{aligned}$$

Редът е равномерно сходящ върху всеки кръг $D_1(r)$ с $r < 1$. Q.E.D.

Теорема 9.8. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в точката $z = a$*[22] *и нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Тогава*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n (z-a)^{n-1}.$$

Доказателство. Действително, както знаем от Глава 8, функцията $f'(z)$ също е аналитична в точката $z = a$. Прилагайки Теорема 9.7, получаваме

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f'(z)]^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

Използвайки по-нататък равенството

$$[f'(z)]^{(n)}(a) = [f(z)]^{(n+1)}(a),$$

стигаме до изказаното твърдение. Q.E.D.

[22] Т.е. е аналитична в някакъв кръг $D_a(r)$, $r > 0$.

Теорема 9.9. *Нека функциите $f(z)$ и $g(z)$ са аналитични в точката $z = a$, като*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-a)^n, \;\; g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n (z-a)^n.$$

Да означим с $R(f)$, $R(g)$ съответните радиуси на сходимост на двата Тейлърови реда. Тогава функциите $f(z) \pm g(z)$ и $f(z)g(z)$ са също аналитични в $z = a$ и

$$\begin{aligned} R(f \pm g) &\geq \min[R(f), R(g)], \\ R(fg) &\geq \min[R(f), R(g)]. \end{aligned}$$

Тейлъровите развития имат съответно вида

$$\begin{aligned} f(z) \pm g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \pm g_n)(z-a)^n, \\ f(z)g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \;\; c_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}. \end{aligned}$$

Доказателството предоставяме на читателя.

Ще приключим тази глава с разглеждания, свързани с непрекъснатостта на степенния ред на Тейлър в точки от окръжността $C_a(R)$, R — радиусът на сходимост. Естествено, въпросът има смисъл само когато радиусът на сходимост R е положително и крайно число. Ще докажем следната теорема на Абел.

Теорема 9.10 (Абел)**.** *Нека степенният ред $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-a)^n$ има краен и положителен радиус на сходимост. Да предположим, че редът е сходящ в точката $z = z_0$, като $z_0 \in C_a(R)$. Тогава*

$$f(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z_0 - a)^n$$

когато $z \to z_0$ със стойности върху отсечката $[a, z_0]$.

Доказателство. Без да нарушаваме общността на разглежданията, да приемем, че $a = 0$ и че точката z_0 съвпада с единицата. Полагаме

$$f(1) := s.$$

Тъй като $f(z)$ е сходяща в единицата, то по условието на теоремата

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \longrightarrow s,\ n \to \infty.$$

Въвеждаме числата

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$$

и записваме f_n като

$$f_n = s_n - s_{n-1}.$$

Използвайки това представяне, можем да запишем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s_{n-1})z^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} z^n.$$

Трансформация на индексите води до представянето

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{n+1} = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

Да разгледаме сега поведението на разликата $f(z) - s$ когато $n \to \infty$ и $z \in [0,1]$. Благодарение на последното,

$$f(z) - s = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n - s(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(s_n - s)z^n. \tag{9.1}$$

Нека сега ε е произволно фиксирано положително число, такова че

$$|s_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

стига $n \geq N$. Както и преди, $z \in [0,1]$. Тогава

$$|z-1| = 1 - z.$$

Взимайки предвид, че $z \in [0,1)$, можем да оценим (9.1) по следния начин:

$$|f(z) - s| \leq (1-z)\sum_{n=0}^{N} |s_n - s| z^n + (1-z)\sum_{n=N+1}^{\infty} z^n \leq$$

$$\leq (1-z)\sum_{n=0}^{N} |s_n - s| z^n + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.2}$$

От друга страна,

$$\sum_{n=0}^{N} |s_n - s| z^n \leq \sum_{n=0}^{N} |s_n - s|,$$

като при това лявата страна не зависи от числото z. Да положим

$$A := \sum_{n=0}^{N} |s_n - s|.$$

Тъй като $z \to 1$, то можем да предположим, че $(1-z) \leq \varepsilon/(2A)$. Тогава, съгласно (9.2) и позовавайки се на последното неравенство, получаваме

$$|f(z) - s| \leq \varepsilon.$$

Последната оценка е валидна за всяко $z \in [0, 1)$ което е достатъчно близо до единицата. Q.E.D.

Ще завършим разглежданията, свързани с непрекъснатостта върху границата на кръга на сходимост с известната теорема на Таубер, чието доказателство няма да излагаме.

Теорема 9.11 (Таубер[23]). *Нека степенният ред* $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *има краен и положителен радиус на сходимост, и нека функцията* $f(z)$ *клони към комплексното число* A*, когато* $z \to z_0$, $|z| < 1$. *Нека освен това*[24]

$$f_n = O(n).$$

Тогава $f(z)$ *е сходяща в точката* $z = z_0$ *и* $f(z_0) = A$.

9.3 Безкрайната точка

Дефиниция 9.5. Ще казваме, че функцията $f(z)$, дефинирана в $z = \infty$, е *аналитична* в $z = \infty$, ако функцията

$$g(\zeta) := f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

е аналитична в $\zeta = 0$.

[23] Alfred Tauber (1866-1942)

[24] $\dfrac{|f_n|}{n} \leq C$, $n \to \infty$, C — константа.

Теорема 9.12. *Нека $f(z)$ е аналитична в безкрайността. Тогава тя се развива в ред на Тейлър около $z = \infty$, имащ вида*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Редът е сходящ във всяка точка z, $|z| > \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$ и е равномерно сходящ във външността на всеки кръг $D_0(R)$ с радиус $R > \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}$.

Проверката на валидността на тази теорема оставяме на читателя.

Упражнения

Задача 9.1. Докажете, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$.

Решение. Нека $\{a_n\}$ е сходяща редица, $a_n \to a$, $n \to \infty$. За да бъде сходящ безкрайният ред $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$, трябва да е сходяща редицата от парциални суми S_N, като

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n-1}).$$

Простото пресмятане показва, че

$$S_N = a_N - a_0.$$

Поради сходимостта на редицата $\{a_n\}$, сходяща ще бъде и редицата S_N, или

$$S_N \to a.$$

Доказателството на обратното твърдение оставяме на читателя. Q.E.D.

Задача 9.2. Даден е степенният ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, за който $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to a$. Докажете, че $R = a^{-1}$.

Задача 9.3. Намерете радиуса на сходимост на редовете за $0 < q < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{2n},\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n z^{2n}$$

Упътване: Приложете формулата на Стирлинг[25] $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

Задача 9.4. Намерете Тейлъровия ред на $f(z) := z^2 \cos \dfrac{1}{z-1}$ в $z = 0$.

Задача 9.5. Намерете Тейлъровия ред на $f(z) = 1/(z-2)$ в $z = \infty$.

Задача 9.6. Намерете Тейлъровия ред на $f(z) = z/(\sin z)$ в $z = 0$.

Задача 9.7. Покажете, че

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Упътване: Приложете теоремата на Абел.

Задача 9.8. Покажете, че ако функцията $f(z)$ е аналитична в $z = \infty$, то нейното развитие

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

е равномерно сходящо извън някакъв кръг. Определете радиуса на този кръг.

Задача 9.9. Докажете, че безкрайният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ, ако $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ е сходящ, а редицата $\{b_n\}$ е реална, монотонна и ограничена (критерий на Абел).

Задача 9.10. Нека $c_n \leq c_{n-1}$, $c_n \to 0$ и $|z| = 1$. Докажете, че безкрайният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ е сходящ.

Задача 9.11. Дайте пример на степенен ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, който е

1. сходящ във всяка точка от кръга $C_0(R)$, като R е радиусът на сходимост,
2. разходящ във всяка точка от $C_0(R)$,
3. сходящ навсякъде с изключение на краен брой точки $z_1, \dots, z_N$, $|z_i| = R$, $i = 1, \dots, N$.

Упътване: Приложете предишните задачи 9.9 и 9.10.

[25] James Stirling (1692-1770)

10 Нули и особености на аналитичните функции

10.1 Ред на Лоран

Да напомним в началото на тази глава, че функцията $f(z)$ е аналитична (холоморфна[26]) в точката $z = a$, ако съществува околност U на точката a, във всяка точка на която функцията $f(z)$ е диференцируема. На базата на тази дефиниция, стигаме до новото понятие *особеност на функция в точка.*

Дефиниция 10.1. Ако точката $z = a$ е такава, че $f(z)$ не е аналитична в нито една нейна околност, то тази точка е *особена точка* на $f(z)$, или, $f(z)$ *има особеност в* $z = a$.

Например функциите $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ и $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ имат особености в нулата, $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ — в единицата.

Дефиниция 10.2. Нека $f(z)$ има особеност в точката $z = a$. Ако съществува околност U на a, в която $f(z)$ няма други особености освен в $z = a$, т.е. е аналитична в $U - a$, то говорим за *изолирана особеност.*

В предишния пример функциите $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ и $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ имат изолирани особености в нулата и единицата, съответно, докато $z = 0$ е особеност, но не изолирана, за $f(z) = 1/\sin\dfrac{1}{z}$.

Теорема 10.1. *Нека функцията $f(z)$ има изолирана особеност в точката $z = a$, т.е. $f(z)$ е аналитична във венеца $A := \{0 < |z - a| < R\}$. Тогава $f(z)$ може да бъде представена във вида*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{10.1}$$

като двата безкрайни реда $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ са равномерно сходящи във всеки вътрешен венец $\{0 < r_1 \le |z-a| \le r_2 < R\}$. За коефициентите c_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, важи представянето

$$c_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{j+1}} d\zeta,\ \ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

[26]Холоморфната функция е еднозначен клон на аналитична функция. За да не усложняваме разсъжденията, ще считаме, че разглежданите аналитични функции са еднозначни, т.е. холоморфни.

където $C_a(r)$ е която и да било окръжност с център в точката a и с радиус r, $r < R$.[27]

Безкрайният ред (10.1) се нарича *ред на Лоран*[28], сумите $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ — *главна част на реда на Лоран*, съответно $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ — *холоморфна компонента.*

Доказателство. Нека $z \in A$. Фиксираме числата r_1, r_2, такива че $\{0 < r_1 \leq |z-a| \leq r_2 < R\}$. Полагаме $C_i := C_a(r_i)$, $i = 1, 2$. От интегралната теорема на Коши знаем, че

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Записваме знаменателя във вида

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)}.$$

Върху окръжността C_2 са валидни неравенствата $|\zeta - a| > |z - a|$, $\zeta \in C_2$. Прилагайки разсъжденията от предишната глава, да запишем първия интеграл като сума

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

От интегралната теорема на Коши следват по-нататък равенствата

$$\oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

за всяко $0 < r < R$. Така получаваме холоморфната компонента на реда на Лоран. Извършвайки аналогични разсъждения за втората компонента, основани на неравенствата $|\zeta - a| < |z - a|$, $\zeta \in C_1$, получаваме и главната част на (10.1). Q.E.D.

[27] Да напомним, че $\oint_{C = C_a(\varrho)}$ означава интегриране по окръжността $C = C_a(\varrho)$, $\varrho < R$, в положителна посока, т.е. посока обратна на часовниковата стрелка.

[28] Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

Пример 10.1. Намерете разлагането в ред на Лоран около нулата на функцията $e^{1/z}$.

Решение. Както знаем,

$$e^{\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!}.$$

Това разлагане в безкраен ред е сходящо за всяко комплексно число ω. Да положим сега $\omega = 1/z$, $z \neq 0$. Резултатът е

$$e^{1/z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n n!},$$

което е и търсеното разлагане. Q.E.D.

Пример 10.2. Намерете развитието в ред на Лоран на функцията $f(z) = 1/(z^2 - z)$

1. около нулата,

2. във външността на единичния кръг.

Решение. Записваме функцията като

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z},$$

след което разглеждаме двете съставящи. Имаме

1.
$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \Longrightarrow f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n},\ |z| < 1,$$

2.
$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \Longrightarrow f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

Друго решение на (2). Както виждаме, така дефинираната функция $f(z)$ е аналитична извън единичния кръг. Полагаме $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta)$, "новата" функция $f(1/\zeta) \in \mathcal{A}(D_0(1)$ и има представянето

$$f(1/\zeta) = \frac{\zeta^2}{1-\zeta}.$$

От друга страна,

$$f(1/\zeta) = \frac{\zeta^2}{1-\zeta} = \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots ,$$

откъдето окончателно получаваме, след преминаване обратно към променливата z,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

Q.E.D.

По-нататък ще се спрем на класификацията на изолираните особености.

Дефиниция 10.3. Нека функцията $f(z)$ има изолирана особеност точката $z = a$ и нека (10.1) е нейното развитие в ред на Лоран около тази точка. Казваме, че особеността е,

1. *отстранима*, ако $c_{-j} = 0$, за всяко $j \in \mathbb{N}$,

2. *полюс от кратност* m, ако $c_{-j} = 0$ за всяко $j > m$, $j, m \in \mathbb{N}$ и $c_{-m} \neq 0$,

3. *съществена*, ако $c_{-j} \neq 0$ за $j \in \Lambda$, където $\Lambda := \{n_j\}$ е безкрайна редица от естествени числа, $n_n < n_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$

Полюс от кратност 1 се нарича *прост полюс*. Ако $f(z)$ има отстранима особеност в $z = a$, то Лорановото ѝ развитие във венеца A има вида

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i.$$

Пример 10.3.

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!},\ a = 0,$$

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n)!},\ a = 0.$$

Теорема 10.2. *Нека $f(z)$ има отстранима особеност в точката $z = a$. Тогава*

1. *$f(z)$ е ограничена в подходяща околност на $z = a$,*

2. *съществува границата $\lim\limits_{z \to a} f(z)$,*

3. *$f(z)$ може да се додефинира като аналитична функция в $z = a$.*

Доказателството оставяме на читателя.

Следващата теорема също се доказва с елементарни разсъждения:

Теорема 10.3. *Нека $f(z)$ има полюс в точката $z = a$ от кратност m. Тогава $|(z-a)^n f(z)| \to \infty$ всеки път, когато $n < m$, а функцията $(z-a)^m f(z)$ има отстранима особеност в същата точка. В частност, $|f(z)| \to \infty$ когато $z \to a$.*

От дефиницията за полюс заключаваме

Теорема 10.4. *Функцията $f(z)$ има полюс в $z = a$ от кратност m тогава и само тогава, когато съществува функция $F(z)$, аналитична в достатъчно малка околност на $z = a$, $F(a) \neq 0$, и навсякъде в тази околност е валидно представянето*

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}.$$

10.2 Нули на аналитични функции

Нека $f(z)$ е функция, аналитична в точката $z = a$. Както вече знаем, тя се разлага в достатъчно малък кръг $D_a(r)$ в ред на Тейлър

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{10.2}$$

като коефициентите c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, се определят от формулата

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}^{n+1} d\zeta.$$

Ще напомним, че радиусът на сходимост R на реда (10.2) е равен в точност на разстоянието от точката a до най-близката особеност на функцията $f(z)$.

Нека сега функцията се анулира в точката a. Тогава $c_0 = f(a) = 0$ и редът (10.2) приема вида

$$f(z) = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} := (z-a)\varphi_1(z).$$

Редът $\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1}$ има същият радиус на сходимост, както и (10.2). По-нататък, възможно е и редът $\varphi_1(z)$ също да има нула в същата точка $z = a$. Тогава и коефициентът c_1 ще се анулира ($c_1 = 0$), и редът $f(z)$ добива вида

$$f(z) = (z-a)^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-2} := (z-a)^2 \varphi_2(z).$$

Така този процес ще продължи докато стигнем до някое $c_m \neq 0$. Възможно е, разбира се, всички коефициенти c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, да са равни на нула. Тогава редът (10.2) е тъждествена нула, или, $f(z) \equiv 0$ (поне) в кръга $D_a(r)$. Следната дефиниция обобщава нашите разсъждения:

Дефиниция 10.4. Казваме, че функцията $f(z)$ има нула в точката *от кратност* m, ако съществува функция $\varphi(z)$, холоморфна и различна от нула в околност на точката $z = a$, такава че да е вярно представянето

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z).$$

Нулата е проста, ако $m = 1$.

Обръщаме внимание на читателя върху обстоятелството, че нулите на функцията са "изолирани" една от друга. Ще докажем следната теорема:

Теорема 10.5. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в околност $\mathcal{U}$ на точката $z = a$. Да допуснем, че съществува безкрайна редица от точки $\{z_n\}$ клонящи към числото a чрез стойности, различни от a, такива че $f(z_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ При тези предположения $f(z) \equiv 0$.*

Доказателство. Да предположим, че при дадените условия $f(z) \not\equiv 0$. Нека функцията има развитието (10.2). Условието $z_n \to a$ гарантира $f(a) = 0$. Действително, по условие $f(z_n) = 0$. От съображения за непрекъснатост следва, че $f(a) = 0$, непрекъснатостта на функцията произтича, очевидно, от аналитичността.

От направеното допускане следва, че нулата на функцията $f(z)$ в точката a ще има крайна кратност (в противен случай, както видяхме, $f(z)$ е тъждествена нула). Нека означим с m кратността в точката a. Казано по друг начин, първият коефициент в развитието (10.2), различен от нула, е коефициентът c_m. Тогава, по дефиниция,

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

като функцията $\varphi(z)$ е аналитична и различна от нула в някаква кръгова околност $D_a(r)$ на a. Без да нарушаваме общността на разсъжденията, ще считаме, че $D_a(r) \subset \mathcal{U}$. Имаме, по-нататък,

$$\varphi(z) \neq 0, \text{ за всички } z \in D_a(r). \tag{10.3}$$

По дефиниция обаче

$$f(z_n) = (z_n - a)^m \varphi(z_n) = 0,$$

което, обединено с условието, че $z_n \neq a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, води до заключението, че

$$\varphi(z_n) = 0.$$

Но тъй като и функцията φ е аналитична в точката a, то ще имаме $\varphi(a) = 0$, или $c_m = 0$. Последното обаче е в противоречие с условието (10.3). Следователно, $f(z) \equiv 0$. Q.E.D.

От Теорема 10.5 следва

Теорема 10.6. *Ако $\mathcal{D}$ е област в $\mathbb{C}$ и $f(z), g(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ са две функции, такива че $f(z_n) = g(z_n)$ за някаква безкрайна редица $\{z_n\}$, от числа клонящи към точка z_0, лежаща в областта $\mathcal{D}$, то $f(z) \equiv g(z)$.*

Теорема 10.6 е известна като *принцип за единственост на аналитичните функции*.

Дефиниция 10.5. Казваме, че функцията $f(z)$ е *m-мероморфна в областта* D ($f \in \mathcal{M}_m(D)$), ако е аналитична навсякъде в D с изключение на най-много на m полюса в D (полюсите се отчитат с техните кратности). Функцията $f(z)$ е *мероморфна* в D, ако във всяка подобласт на D има не повече от краен брой полюси.

Така например, функциите $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2-1}$, $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2}$, $f(z) = z\dfrac{z\overline{z}_n - 1}{z - z_n}$, като в последния случай $z_n \to 1$, са съответно от класовете $\mathcal{M}_2(D_0(2))$, $\mathcal{M}_2(D_0(1))$ и $\mathcal{M}(D_0(1))$.

10.3 Връзка между полюси на мероморфни функции и нули на аналитични функции

Следващата теорема показва връзката между характерните точки полюс и нула.

Теорема 10.7. *Функцията $f(z)$ има нула от кратност m в точката $z = a$ тогава и само тогава, когато функцията $1/f(z)$ има полюс в същата точка от същата кратност.*

Доказателството следва веднага от развитието на функциите в ред на Тейлър и на Лоран.

Естествено звучене придобива въпросът за верността на Теорема 10.3, когато функцията $f(z)$ има изолирана съществена особеност. Отговорът е отрицателен и се дава от известната теорема на Пикар.[29]

Теорема 10.8 (Пикар). *Нека функцията $f(z)$ има изолирана съществена особеност в точката $z = a$. Тогава във всяка околност на $z = a$ функцията $f(z)$ приема всяка комплексна стойност, с изключение най-много на една.*

Доказателството няма да излагаме тук. Ще илюстрираме теоремата на Пикар със следния пример.

Пример 10.4. Проверете верността на теоремата на Пикар за функцията $f(z) = e^{1/z}$ в околност на нулата.

Решение. Очевидно особеността в нулата е изолирана и съществена. Нека $c \neq 0$ е произволно фиксирано комплексно число. Ще покажем, че уравнението $e^{1/z} = c$ има безбройно много решения във всяка околност на нулата. Действително, нека $|z| < \varepsilon$. Уравнението е еквивалентно на

$$\log c = \frac{1}{z}.$$

Както знаем от дефиницията за логаритмичната функция

$$\frac{1}{z} = \ln|c| + i \operatorname{Arg} c + 2k\pi i := \omega_k, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Когато $|k|$ е достатъчно голямо, то $\log z > 1/\varepsilon$ и $z = 1/\omega_k$. Q.E.D.

Пример 10.5. Да се класифицират нулите и полюсите на функцията $f(z) = \sin(1 - z^{-1})$.

Решение. Нулите на разглежданата функция са сред корените на уравнението

$$1 - z^{-1} = k\pi, \;\; k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или $z = 1/(1 - k\pi)$. По-нататък, точката $z = 0$ е изолирана особеност. Като точката на сгъстяване на нули на функцията, обаче, тя не може да бъде друга особеност, освен съществена. Q.E.D.

Следната теорема е обобщение на изложените твърдения:

[29] Charles Émile Picard (1856-1941)

Теорема 10.9. *Ако функцията $f(z)$ има изолирана особеност в $z = a$, то са еквивалентни следните твърдения:*

1. *Особеността е отстранима $\iff |f(z)|$ е ограничена в околност на $z = a \iff$ съществува граница $\lim f(z)$ когато $z \to a \iff f(z)$ може да бъде продължена аналитично в $z = a$,*

2. *Особеността е полюс от кратност m, $m \in \mathbb{N} \iff |f(z)| \to \infty$ когато $z \to a \iff f(z) = g(z)(z-a)^{-m}$, $g \in \mathcal{A}(a)$, $g(a) \neq 0$,*

3. *Особеността е съществена $\iff |f(z)|$ е неограничена в околност на $z = a \iff f(z)$ приема всяко комплексно значение с изключение най-много на едно.*

10.4 Принцип на симетрията на Риман-Шварц

Теорема 10.10. *Нека D е област в $\mathbb{C}$ такава, че границата ѝ ∂D съдържа интервала $\Upsilon := [a, b]$, лежащ върху реалната ос, $-\infty < a < b < \infty$. Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта D и непрекъсната плътно до интервала Υ (т.е. ако $x \in \Upsilon$, то $f(x) = \lim f(z_n)$ всеки път, когато $z_n \to x$, $\{z_n\} \in D$) и такава, че $\Im f(x) = 0$, $x \in \Upsilon$. Означаваме с D_S областта, симетрична на D спрямо реалната ос и въвеждаме функцията*

$$F(z) := \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ f(x), & x \in \Upsilon, \\ \overline{f}(\overline{z}), & z \in D_S. \end{cases}$$

Тогава така дефинираната функция $F(z)$ е аналитична в областта $D^* := D \bigcup \Upsilon \bigcup D_S$.

Казваме още, че функцията $F(z)$ е *аналитично продължение на функцията $f(z)$ в областта D^*.*

Доказателство. Ще покажем, най-напред, че функцията $F(z)$ е аналитична в областта D_S. Действително, нека $z_0 \in D_S$. Да разгледаме поведението на диференчното частно в точката z_0. Имаме последователно

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{f}(\overline{z}_0 + \overline{\Delta z}) - \overline{f}(\overline{z}_0)}{\Delta z} =$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{f}(\overline{z}_0 + \overline{\Delta z}) - \overline{f}(\overline{z}_0)}{\overline{\Delta} z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - f(\overline{z})}{\overline{\Delta z}} \right)} = \overline{f'(\overline{z}_0)}.$$

По-нататък ще установим, че функцията $F(z)$ е аналитична в областта D^*. За целта ще използваме теоремата на Морера.

Интегралът върху всяка затворена крива, лежаща в D или в D_S, очевидно се анулира, поради аналитичността на функцията $F(z)$ във всяка от тези области. Затова да разгледаме затворен контур, който пресича реалния интервал Υ.

Да вземем най-напред затворен контур γ, който да е симетричен спрямо интервала Υ. Означаваме с Υ' и Υ'' частите в D и в D_S, съответно. Тогава

$$\oint_{\Upsilon} F(z)dz = \int_{\Upsilon'} F(z)dz + \int_{\Upsilon''} F(z)dz = \int_{\Upsilon'} f(z)dz + \int_{\Upsilon''} \overline{f}(\overline{z})dz.$$

Смяната на променливите във втория интеграл води до

$$\int_{\Upsilon''} \overline{f}(\overline{z})dz = -\int_{\Upsilon'} f(z)dz,$$

което, обединено с горното окончателно осигурява

$$\oint_{\Upsilon} F(z)dz = 0.$$

Общият случай, когато затворената крива пресича интервала Υ, се свежда с помощта на интегралната теорема на Коши до предишния. Q.E.D.

Упражнения

Задача 10.1. Докажете Теорема 9.6.

Задача 10.2. Намерете развитието в ред на Лоран на функцията

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$$

1. около нулата,

2. във венеца $2 < |z| < 4$,

3. във външността на кръга $D_0(4)$.

Упътване: Запишете $f(z)$ във вида

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-4} - \frac{1}{z-2}\right)$$

и приложете принципа на развитие в степенен ред.

Отговор:

1. $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^k$,

2. $\displaystyle -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}} - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^k$,

3. $\displaystyle -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k}{z^{k+1}}$.

Задача 10.3. Нека $f(z)$ има нула от кратност m в точката $z = a$. Докажете, че $f'(z)$ има нула от кратност $m-1$. Има ли аналог това твърдение, когато $f(z)$ има полюси?

Задача 10.4. Нека $f(z)$ има полюс от кратност m в $z = a$. Докажете, че $f'(z)/f(z)$ има прост полюс в същата точка.

Задача 10.5. Класифицирайте особеностите на функциите

$$z^3 e^{1/z},\ \frac{1}{e^z - 1},\ \frac{z^3+1}{z^2(z+1)}.$$

Задача 10.6. Конструирайте функция, имаща нула от кратност 2 в точката $z = 0$, полюс от кратност 3 в точката $z = 1$, изолирана съществена особеност в точката $z = -1$, и е аналитична и различна от нула във всички останали точки от равнината.

Решение.

$$f(z) = \frac{z^2 e^{1/(z+1)}}{(z-1)^3} g(z),$$

където $g(z)$ е цяла функция, различна от нула в $0, \pm 1, 2$. Q.E.D.

Задача 10.7. Покажете, че ако функцията $f(z)$ има съществена особеност в $z = a$, то това се отнася и до функцията $e^{f(z)}$.

Задача 10.8. Проверете валидността на теоремата на Пикар за функцията $f(z) = \cos(1/z)$ в околност на нулата.

Задача 10.9. Кое от изложените по-долу твърдения е вярно?

1. Функциите $f(z), g(z)$ имат едновременно полюси в точката $z = a$ от една и съща кратност $\Longleftrightarrow$ сумата $f(z) + g(z)$ има полюс от същата кратност,
2. $f(z)$ има полюс, а $g(z)$ — съществена особеност в $z = a \Longrightarrow f(z) + g(z)$ има съществена особеност в $z = a$,
3. $f(z)$ има полюс в $z = a$, $g(z)$ — съществена особеност $\Longrightarrow f(z)g(z)$ има съществена особеност в $z = a$,
4. $f(z)$ има полюс от кратност m в $z = a \Longrightarrow f(z^2)$ има полюс от кратност $2m$,
5. $f(z)$ има нула от кратност m в $z = a$, $g(z)$ — полюс от кратност $n \leq m$ $\Longrightarrow f(z)g(z)$ има отстранима особеност в $z = a$.

Упътване: Използвайте развитието на разглежданите функции в ред на Лоран около точката $z = a$, както и теореми 10.3, 10.4 и 10.7.

Отговори: не, да, да, да, да.

Задача 10.10. Покажете, че ако функцията $f(z)$ е аналитична върху и извън гладката затворена крива Γ и има нула от кратност ≥ 2 в $z = \infty$, то

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Какво може да се каже за интеграла, ако $f(z)$ има проста нула в ∞?

Задача 10.11. Докажете, че ако $f(z)$ има полюс от кратност m в точката $z = a$, то $f'(z)$ има полюс от кратност $m + 1$.

Задача 10.12. Нека $f(z)$ е цяла функция. Да положим

$$M(r) := \|f(z)\|_{C_0(r)},\ r > 0.$$

Докажете, че ако $f(z)$ е цяла трансцедентна функция, то

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty.$$

Упътване: Допуснете противното и използвайте теоремата на Лиувил.

Задача 10.13. Нека $f(z)$ е аналитична функция върху интервала $I := [-1, 1]$, като приема само реални стойности ($\Im f(z) = 0$ всеки път, когато $z \in I$). Нека, по-нататък, $f(z)$ изобразява I върху дъга от единичната окръжност (или $|f(I)| = 1$). Да се докаже, че при тези предположения $f \equiv Const$.

Упътване: Използвайте принципа за симетрия и теоремата за единственост на аналитичните функции.

11 Теория на резидуумите

11.1 Теорема за резидуумите

Нека Γ е гладка затворена крива и функцията $f(z)$ е аналитична навсякъде в областта D, ограничена от кривата Γ, с изключение на точката $z = a$, $a \in D$, и непрекъсната плътно до кривата Γ.[30] При тези предположения, функцията $f(z)$ се разлага в равномерно сходящ, в подходящ кръг, ред на Лоран

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{11.1}$$

Дефиниция 11.1. Коефициентът c_{-1} в Лорановото развитие (11.1) на функцията $f(z)$, около изолираната особеност $z = a$, се нарича *резидуум на* $f(z)$ *в точката* $z = a$ и се означава с $\operatorname{Res}(f(z); a)$ или $\operatorname{Res} f(a)$.

Да разгледаме интеграла

$$\oint_\Gamma f(z)dz.$$

По дефиниция кривата Γ е положително ориентирана, по отношение на своята вътрешност. По интегралната теорема на Коши

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \oint_C f(z)dz,$$

където C е кръг с център в $z = a$ и с достатъчно малък радиус (или такъв радиус, че кръгът да лежи изцяло в областта). Замествайки с (11.1) в дясната страна, стигаме до представянето

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Резюмираме:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z); a). \tag{11.2}$$

Нека сега $f(z)$ има краен брой изолирани особености $a_1, \dots, a_k$ в областта $\mathcal{D}$. Да означим граничния контур с Γ. Нека, по-нататък, C_i, $i = 1, \dots, k$, са взаимно непресичащи се окръжности с центрове съответно в точките a_i,

[30] Т.е. за всяка точка $z_0 \in \Gamma$, имаме $f(z_0) = \lim f(z_n)$, $z_n \to z_0$, $\{z_n\} \subset D$. Да напомним, че такива функции се наричат непрекъснати плътно до границата на областта.

$i = 1, \ldots, k$, и лежащи изцяло в областта $\mathcal{D}$. Прилагайки отново интегралната теорема на Коши получаваме

$$\oint_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} f(z)dz.$$

Използвайки (11.2), стигаме до равенството

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z); a_i).$$

Обобщавайки, формулираме т.н. *теорема за резидуумите*:

Теорема 11.1. *Нека $f(z)$ е холоморфна в $\mathcal{D}$ с изключение на краен брой изолирани особености $a_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \ldots, k$, $\Gamma := \partial\mathcal{D}$. Нека, по-нататък, $f(z)$ е непрекъсната плътно до границата Γ. Тогава*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f(z); a_i).$$

11.2 Пресмятане на резидуумите

В общия случай няма универсален път за пресмятане на резидуумите на дадена функция. В определени случаи обаче, когато особеностите са полюси, тяхното пресмятане почива върху елементарни разглеждания.

Теорема 11.2. *Нека функцията $f(z)$ има полюс от кратност m в точката $z = a$. Тогава*

$$\operatorname{Res}(f(z); a) = \lim_{z\to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\frac{(z-a)^m f(z)}{(m-1)!} \right].$$

Доказателство. Действително, развитието (11.1) на функцията в ред на Лоран около точката $z = a$ ще има вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Умножавайки двете страни с $(z-a)^m$ и диференцирайки $m-1$ пъти, намираме

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!\, c_{-1} + m!\, c_0(z-a) + \\ + \frac{(m+1)!}{2} c_1 (z-a)^2 + \frac{(m+2)!}{3!} c_2 (z-a)^3 + \cdots,$$

откъдето, след като заместим z с a, веднага стигаме до горното представяне, т.е.

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!\,c_{-1},$$

което представлява и търсеното равенство. Q.E.D.

Всъщност, ние доказахме следната теорема

Теорема 11.3. *Нека $f(z)$ има m-кратен полюс в точката $z = a$ и нека $F(z) = (z-a)^m f(z)$, като $F(z)$ е аналитична в подходяща околност на $z = a$ и $F(a) \neq 0$ (виж Теорема 10.4). Тогава*

$$\mathrm{Res}(f(z); a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a} F^{(m-1)}(a).$$

Пример 11.1. Пресметнете резидуумите на функцията

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}.$$

Решение. Особеностите на горната функция лежат в нулите на знаменателя — това са точките $z = 0$, $z = \pi$. И така,

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\right] = -\frac{3}{\pi^6},$$

докато

$$\mathrm{Res}(f, \pi) = \frac{1}{2}\lim_{z\to\pi}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos z}{z^2}\right] = 4!(\pi)^{-4} - (\pi)^{-2}.$$

Q.E.D.

11.3 Приложение на теоремата за резидуумите

Теоремата за резидуумите има изключително много приложения. Ще се спрем най-напред върху тези от тях, които водят до качествено нови резултати в теорията на аналитичните функции.

Нека функцията $f(z)$ е аналитична в отворения кръг $D_a(r)$, с изключение на точката $z = a$, в която има полюс от кратност m. Тогава, както знаем, в достатъчно малка околност $D_a(r)$ на $z = a$ функцията $f(z)$ се представя във вида

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^m}, \tag{11.3}$$

като функцията $F(z)$ е аналитична и отлична от нула в $D_a(r)$. Без да нарушаваме общността на разглежданията предполагаме, че $F(z) \neq 0$ навсякъде върху $\overline{D_a(r)}$. Тогава функцията $f'(z)/f(z)$ ще бъде аналитична в $D_a(r)$, с изключение на точката $z = a$, в която ще има прост полюс. Действително, последното следва от представянето (11.3) и директно пресмятане, т.е.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{m}{z-a}.$$

От друга страна, функцията $F'(z)/F(z)$ ще е аналитична в $D_a(r)$, тъй като $F \in \mathcal{A}(D_a(r))$ и $F \neq 0$ в $\overline{D_a(r)}$. Прилагайки сега интегралната теорема на Коши, както и теоремата за резидуумите, получаваме

$$\oint_{C_a(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2m\pi i.$$

Да се спрем сега на случая, когато $f(z)$ има нула в точката $z = b$. Избираме толкова голяма кръгова околност $D_b(r)$ на $z = b$, че $f(z)$ да е аналитична там и точката $z = b$ да е единствената нула в кръга. Да означим с n кратността на тази нула. Знаем, че функцията $f(z)$ може да бъде представена (в $D_b(r)$) във вида

$$f(z) = \Phi(z)(z-b)^n,$$

където $\Phi(z) \in \mathcal{A}(D_b(r))$. Очевидно можем да считаме, без да нарушаваме общността на разглежданията, че $\Phi(z)$ е различна от нула в упоменатата околност. Повтаряйки предишните разсъждения, виждаме, че функцията $f'(z)/f(z)$ има прост полюс в $z = b$ и

$$\oint_{C_b r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2n\pi i.$$

Така стигаме до следната теорема, известна в анализа като “принцип на аргумента”.

Теорема 11.4. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта $\mathcal{D}$ с изключение на краен брой точки a_i, $i = 1, \ldots, p$, в които има полюси от кратности съответно m_i, $i = 1, \ldots, p$. Нека $f(z)$ е непрекъсната плътно до границата $\Gamma := \partial\mathcal{D}$ и нека в точките $b_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, \ldots, q$, има нули от кратности съответно n_j, $j = 1, \ldots, q$. Тогава е валидно представянето*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{q} n_j - \sum_{i=1}^{p} m_i.$$

Като пример, да пресметнем интеграла

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz,\ f(z) := \frac{z^2}{z^3-8},$$

където контурът Γ е правоъгълникът със страни $\{z,\ -1/2 \le \Re z \le 2 + 1/2,\ \Im z = -1/2\}$, $\{z,\ \Re z = -1/2,\ -1/2 \le \Im z \le 1\}$, $\{z,\ \Re z = 2+1/2,\ -1/2 \le \Im \le 1\}$ и $\{z,\ -1/2 \le \Re z \le 2 + 1/2,\ \Im z = 1\}$. Прилагайки принципа за аргумента, получаваме $I = 1$.

Важно следствие от принципа за аргумента е теоремата на Хурвиц.

Теорема 11.5 (Хурвиц[31]). *Нека $\{f_n(z)\}$ е безкрайна редица от функции, аналитични в областта $\mathcal{D}$ и клонящи равномерно върху компактни подмножества към функцията $f(z)$. Тогава, за достатъчно големи числа n, всяка функция $f_n(z)$ има толкова нули в областта[32], колкото и граничната функция $f(z)$.*

Доказателство. Да означим границата на областта $\mathcal{D}$ с Γ. Без да ограничаваме общността ще считаме, че $f(z) \neq 0$ върху Γ. Тогава всяка $f_n(z)$ ще бъде също различна от нула върху Γ, стига числото n да е достатъчно голямо. От равномерната сходимост на редицата $f_n(z)$ към $f(z)$ имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

По Теорема 11.4, дясната страна е равна на броя на нулите на $f(z)$ в $\mathcal{D}$, а лявата — на $f_n(z)$. Тъй като това са цели числа, то твърдението е очевидно. Q.E.D.

Да отбележим, че

$$\oint_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_\Gamma \frac{df(z)}{f(z)}dz = \oint_\Gamma d\log f(z).$$

Така полученият интеграл се нарича *логаритмичен индикатор*. Нека фиксираният клон на логаритъма е неговата главна стойност $\mathrm{Log}\, f(z) = \ln|f(z)| + i\,\mathrm{Arg}\, f(z)$. Тъй като кривата Γ е затворена, то $\oint_\Gamma d\log f(z)$ ще се равнява на изменението на аргумента $\mathrm{Arg}\, f(z)$, когато точката z обхожда кривата Γ. С

[31] Adolf Hurwitz (1859-1919)

[32] Нулите се броят заедно с техните кратности.

други думи, интегралът е разликата между началната и крайната стойност на $\operatorname{Arg} f(z)$ при движението на $f(z)$ върху Γ,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)} = \Delta_{z\in\Gamma}\operatorname{Arg} f(z).$$

Последното равенство дава името на принципа на аргумента.

След прилагането на проста геометрична интерпретация на принципа на аргумента получаваме теоремата на Руше.

Теорема 11.6 (Руше[33]). *Нека $\mathcal{D}$ е област с граница Γ и нека функциите $f(z)$ и $F(z)$ са от класа $\mathcal{A}(\mathcal{D})\bigcap C(\overline{\mathcal{D}})$. Да допуснем, че*

$$0 < |f(z)| < |F(z)|,\ z \in \Gamma.$$

Тогава броят на нулите на функцията $F(z) + f(z)$ в областта $\mathcal{D}$ е равен на броя на нулите на $F(z)$ в $\mathcal{D}$.

Упражнения

Задача 11.1. Докажете Теорема 11.6.

Задача 11.2. Като използвате теоремата на Руше, докажете че всеки полином от степен n има точно n нули в комплексната равнина $\mathbb{C}$ (нулите се броят със своите кратности).

Задача 11.3. Покажете, че функцията $f(z) := e^z + 3z + 1$ има точно една нула в лявата полуравнина.

Упътване: Определете най-напред броя на нулите в областта $\{z,\ |z| < R,\ \Re z < 0\}$, като сравните функциите e^z и $3z+1$, и приложите теоремата на Руше. След това оставете числото R да расте неограничено.

[33] Eugène Rouché (1832-1910)

Задача 11.4. Без да пресмятате, намерете стойността на интеграла

$$\oint_{C_0(2)} \frac{e^z - 1}{z^2(z+1)(z-3)} dz.$$

Задача 11.5. Докажете, че функцията $f(z) := z^4 + 4z^2 - 1$ има точно две нули в $D_0(1)$.

Решение. Върху $C_0(1)$ имаме

$$|z^4| = 1,\ |4z^2 - 1| \geq 3.$$

Тогава $|z^4| < |4z^2 - 1|$ всеки път, когато $|z| = 1$. По теоремата на Руше, $f(z)$ ще има толкова нули в единичния кръг, колкото $4z^2 - 1$, т.е. две. Q.E.D.

Задача 11.6. Докажете, че функцията $f(z) := ze^{\lambda - z} - 1$, $\lambda > 1$, λ — реално число, има точно една нула в кръга $D_0(1)$ и че тази нула е положително реално число.

Решение. Първата част на твърдението следва от теоремата на Руше.

Що се отнася до втората част, ще покажем че $f(z)$ има поне една реална нула в интервала $[-1, 1]$. Действително, функцията е намаляваща върху интервала. Тъй ката в крайните точки ± 1 приема стойности с различни знаци, то тя има поне една нула в отворения интервал $(-1, 1)$. Твърдението следва от факта, че в единичния кръг функцията има само една нула. Q.E.D.

Задача 11.7. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(D_0(1)) \bigcap C(\overline{D_0(1)})$ е такава, че $|f(z)| < 1$ всеки път, когато $|z| = 1$.

1. Покажете, че уравнението $f(z) = z$ има точно едно решение в кръга $D_0(1)$.

2. Нека $|z_0| \leq 1$ е произволно фиксирана точка. Докажете, че редицата $\{z_n\}$, дефинирана чрез рекурентната зависимост

   $$z_n := f(z_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

   клони към неподвижната точка $\overline{z}$ на функцията, т.е. тази, за която $\overline{z} = f(\overline{z})$.

Задача 11.8. Нека $f(z) \in \mathcal{A}(D_0(\varrho)) \bigcap C(\overline{D_0(\varrho)})$ е такава, че $f(z) \neq \omega_0$, $z \in C_0(\varrho)$. Обяснете защо стойността на интеграла

$$\oint_{C_0(\varrho)} \frac{f'(z)}{f(z) - \omega_0} dz$$

е равна на броя на нулите на уравнението $f(z) = \omega_0$ във вътрешността на кръга $D_0(\varrho)$.

Задача 11.9. Нека D е област в $\mathbb{C}$ и функцията $f(z) \in \mathcal{A}(D) \bigcap C(\overline{D})$ е различна от нула в $\overline{D}$. Нека редицата от функциите $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) \in \mathcal{M}(D)$, клони равномерно към $f(z)$ върху ∂D. Докажете, че при тези предположения всяка функция $f_n(z)$, за n достатъчно голямо, има толкова полюси в областта D, колкото и нули.

Упътване: Използвайте принципа за аргумента, както и сходимостта на редицата $\{f_n(z)\}$ върху ∂D към $f(z)$.

12 Приложение на теоремата за резидуумите при пресмятане на интеграли

12.1 Директно пресмятане

Пресметнете интеграла

$$I := \oint_{C_0(2)} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz.$$

Подинтегралната функция има три прости полюса в равнината $\mathbb{C}$, като само два от тях лежат в кръга $D_0(2)$. По теоремата за резидуумите тогава

$$I = 2\pi i [\mathrm{Res}(0) + \mathrm{Res}(1)].$$

Пресмятанията показват, че

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{1}{3},$$
$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \frac{1}{2}.$$

И така получаваме

$$I(z) = \frac{5\pi i}{3}.$$

12.2 Тригонометрични интеграли

Целта ни в този параграф е пресмятането на интеграли от вида

$$I(z) = \int_0^{2\pi} U(\cos\theta, \sin\theta) d\theta,$$

където U е рационална функция с реалнозначни коефициенти. Този вид интеграли се свеждат, с помощта на представянията

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow z = e^{i\theta} \quad \text{и} \quad dz = ie^{i\theta} d\theta,$$

както и на формулите на Ойлер

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i},$$

до интеграли от комплекснозначни функции върху единичната окръжност.

Пример 12.1. Пресметнете

$$I(\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos\theta}.$$

Решение. Започваме с

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{ie^{i\theta}(2 - \cos\theta)}.$$

Следвайки описания по-горе път, след като положим $z := e^{-i\theta}$, стигаме до

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{2 - \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} \frac{d\theta}{ie^{i\theta}} = 2i \oint_{C_0(1)} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Решаваме интегралът с помощта на теоремата за резидуумите. Получаваме

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Q.E.D.

12.3 Несобствени интеграли върху $(-\infty, \infty)$

С оглед на по-нататъшните разглеждания ще въведем понятието *главна стойност на Коши* на интеграл.

Дефиниция 12.1. Нека $f(z)$ е функция, непрекъсната в $(-\infty, \infty)$. Полагаме

$$\mathrm{p.\,v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx,$$

p.v. се нарича главна стойност на Коши.

Забележка 12.1. В общия случай съществуването на главната стойност

$$\mathrm{p.\,v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

не осигурява сходимостта на несобствения интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Като пример за това да посочим функцията $f(x) = x$. Наистина, по дефиниция

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N xdx + \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^0 xdx = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2}{2} - \lim_{M\to\infty} \frac{M^2}{2},$$

което в общия случай не е сходящо, когато $N, M \to \infty$. Въпреки това, $\displaystyle\int_{-r}^{r} xdx = \frac{1}{2}(r^2 - r^2) = 0$, с което е решен въпроса за съществуването на главната стойност $\mathrm{p.\,v.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2dx$.

Пример 12.2. Пресметнете

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx.$$

Решение. Да въведем контура $\Gamma_R := [-R, r] \bigcup C_0^+(R)$, с $C_0^+(R)$ означаваме горната полуокръжност с център в нулата и радиус R. Разглеждаме интеграла

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+4} dz.$$

За достатъчно големи R имаме, по теоремата за резидуумите,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+4} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(\sqrt{2} e^{\pi i/4}) + \operatorname{Res}(\sqrt{2} e^{3\pi i/4}) = \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{4.4^{3/4} e^{3\pi i/4}} + \frac{1}{4.4^{3/4} e^{9\pi i/4}} \right) = \\
&= \frac{\pi}{2.4^{3/4}} (e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}) = \pi \cos \pi 4^{3/4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

От друга страна,

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+4} dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^4+4} dz + \int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4} dz = \frac{\pi}{4}.$$

Оценяваме

$$\int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4} dz$$

чрез Теорема 6.6 и получаваме

$$\left| \int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4} dz \right| \le \frac{\pi R}{R^4 - 4}.$$

От тук се вижда, че дясната страна клони към 0 когато $R \to \infty$, или

$$\int_{C_0^+(R)} \frac{1}{z^4+4} dz = o(1), \ r \to \infty.$$

Следователно

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Q.E.D.

Забележка 12.2. Използвахме добре познатата оценка

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq l(\gamma)\,\|f(z)\|_\gamma, \tag{12.1}$$

където $l(\gamma)$ означава дължината на кривата γ.

Преди да продължим, ще покажем ефективността на последната оценка при интегриране на рационални функции. Ще покажем

Лема 12.1. *Нека $r(z) = p(z)/q(z)$ е рационална функция, такава че степента на числителя е поне с 2 по-малка от тази на знаменателя (т.е. $\deg p(z) \leq \deg q(z) - 2$). Тогава*

$$I_R(z) := \int_{C_a^+(R)} r(z)dz \to 0,\ R \to \infty.$$

Доказателство. Действително, съгласно (12.1),

$$\begin{aligned}|I_R(z)| &= \left|\int_{C_a^+(R)} r(z)dz\right| = \left|\int_{C_a^+(R)} \frac{p(z)}{q(z)}dz\right| \leq \\ &\leq C_1\int_{C_a^+(R)} \frac{|R^n|}{|R^{n+2}|}|dz| = 2\pi R\frac{R^n}{R^m} \leq C_2\frac{1}{R^{m-n-1}} = o(1),\ r \to \infty,\end{aligned}$$

където $n := \deg p(z)$, $m := \deg q(z)$, а C_1, C_2 — положителни константи, независещи от R. Q.E.D.

Лема 12.1 работи само в случаите, когато $\deg p(z) \leq \deg q(z) - 2$. Да илюстрираме това със следния пример

$$I_R(z) = \int_{C_0(R)} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz.$$

Прилагането на Лема 12.1 ще доведе до оценката (12.1)

$$|I_R(z)| \leq 2\pi R\frac{R}{R^2-1} = \frac{R^2}{R^2-1} \neq O(1),$$

която очевидно не е ефективна, защото не клони към нула. В подобни случаи се налага използването на по-прецизни разглеждания, каквото е лемата на Жордан.

Лема 12.2 (Жордан)**.** *Нека $f(z) \in C[a,b]$, $[a,b] \subset \Re$, и нека $|f(t)| \leq M(t)$, $M(t)$ — интегруема функция върху $[a,b]$. Тогава*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b M(t)dt.$$

Ще илюстрираме значимостта на лемата на Жордан със следния пример.

Пример 12.3. Пресметнете

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx.$$

Решение. Въвеждаме функцията

$$f(z) := \frac{ze^{iz}}{z^2+1}$$

и контура $\Gamma_R := [-R, r] \bigcup C_0^+(R)$, ориентиран така, че полуокръжността $C_0^+(R)$ е в положителна посока. Имаме по-нататък

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_0^+(R)} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz := \\ := \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx + I_R' = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Пресмятанията показват, че

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2e}. \tag{12.3}$$

Да се спрем на I_R' в (12.2). Лема 12.1 би довела до

$$|I_R'| \le C \frac{R^2}{R^2-1}$$

което нищо не дава. Затова прилагаме лемата на Жордан. За целта параметризираме полукръга $C_0^+(R)$:

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),\ \theta \in [0, \pi],$$

и намираме за $z \in C^+(R)$

$$f(Re^{i\theta}) = \frac{Re^{i\theta} e^{i(R\cos\theta + Ri\sin\theta)}}{R^2 e^{2i\theta}+1},$$

така че

$$\left| \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz \right| =\le R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1}.$$

Като приложим лемата на Жордан, ще получим оценката

$$|I_R'| \le \int_0^{\pi} R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta.$$

Как да оценим последния интеграл? Грубата оценка е

$$\int_0^\pi R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R^2}{R^2-1} d\theta,$$

която очевидно не върши работа. Нека тогава да се възползваме от това, че

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \longrightarrow 1, \ \theta \to 0.$$

Фиксираме произволно число δ, $0 < \delta < 1$. От сходимостта следва, че за достатъчно малки стойности на θ ($\theta \leq \theta_0$)

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geq 1 - \delta.$$

Да отбележим, че

$$\int_0^\pi R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta.$$

Ще оценим последния интеграл. Записваме го във вида

$$\int_0^{\pi/2} R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta = \frac{R^2}{R^2-1}\left(\int_0^{\theta_0} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta\right).$$

Получаваме

$$\begin{aligned}
|I'_R(z)| &\leq 2\int_{\theta=0}^{\theta_0} R^2 \frac{e^{-R\theta(1-\delta)}}{R^2-1} d\theta + 2\int_{\theta=\theta_0}^{\pi/2} R^2 \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-1} d\theta = \\
&= 2\frac{R^2}{R^2-1}\frac{1-e^{-R\theta_0(1-\delta)}}{R(1-\delta)} + 2\int_{\theta=\theta_0}^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \longrightarrow 0, \ R \to \infty.
\end{aligned}$$

От (12.3), както и от последното равенство получаваме

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{\pi i}{2}.$$

Q.E.D.

Пример 12.4. Пресметнете

$$I := \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2-1} dx.$$

Решение. Избираме r_1, r_2, R по такъв начин, че

$$-R < -1 - r_1 < -1 + r_1 < 1 - r_2 < 1 + r_2 < R.$$

Въвеждаме контура $\Gamma_{r_1,r_2,R}$, състоящ се от отсечките $[-R, -1 - r_1]$, $[-1 - r_1, -1+r_2]$, $[1+r_2, R]$ и от лежащите в горната полуравнина полуокръжности $C^+_{-1}(r_1)$, $C^+_1(r_2)$, $C^+_0(R)$, ориентирани в посока, положителна спрямо областта. Областта е ограничена от посочения контур и функцията $\dfrac{ze^{i2z}}{z^2-1}$.

Разглеждаме сега интеграла

$$I_{r_1,r_2,R}(z) := \int_{\Gamma_{r_1,r_2,R}} \frac{ze^{i2z}}{z^2-1} dz.$$

От теоремата на Коши

$$I_{r_1,r_2,R}(z) = 0. \tag{12.4}$$

Прилагайки лемата на Жордан, получаваме

$$\int_{C_0(R)} \frac{ze^{i2z}}{z^2-1} dz \longrightarrow 0,\ R \to \infty. \tag{12.5}$$

За да видим какво е поведението на

$$I_1 := \int_{C_{-1}(r_1)} \frac{ze^{i2z}}{z^2-1} dz,$$

когато $r_1 \to 0$, представяме интеграла по следния начин:

$$\frac{1}{z+1} \frac{ze^{i2z}}{z-1} = \frac{1}{z+1} \left(-e^{-2i} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z+1)^k \right).$$

Не е трудно да се убедим, че

$$\lim_{r_1 \to 0} I_1 = \frac{-i\pi e^{-2i}}{2},$$

както и че

$$\lim_{r_2\to 0} I_2 = \frac{-i\pi e^{2i}}{2},\ I_2 := \int_{C_2(r_2)} \frac{ze^{i2z}}{z^2-1}dz.$$

Обединявайки последните равенства, виждаме че

$$I_1 + I_2 \longrightarrow \frac{-i\pi}{2}(e^{2i}+e^{-2i}),\ r_1, r_2 \to 0.$$

Последното води, в комбинация с (12.4) и (12.5) до

$$\mathrm{p.\,v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2-1}dx = -i\pi\cos 2.$$

Q.E.D.

12.4 Пресмятане на интеграли от многозначни функции

Да пресметнем интеграла

Пример 12.5.

$$I(z) := \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)},$$

като функцията $\sqrt{x}$ е избрана по такъв начин, че $\sqrt{1} = 1$.

Решение. Една от компонентите на подинтегралната функция е функцията $\sqrt{x}$, която е многозначна. Да припомним, че по дефиниция

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}.$$

Многозначността на $\sqrt{z}$ се обуславя от многозначността на логаритмичната функция $\log z$. (По-точно, както знаем, $\sqrt{z}$ е двузначна — виж Параграф 4.5.) Както знаем по-нататък (виж Параграф 4.3, 4.4), общата формула за логаритмичната функция се дава от израза

$$\log z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,\ z \neq 0,$$

където $\arg z$ е която и да било стойност на аргумента, а k — цяло число. Нашата цел ще бъде да изберем подходящ еднозначен клон на логаритмичната функция, с други думи, подходящо множество, в което да варира аргументът на променливата z, както и подходящ параметър k.

Фиксираме клона по следния начин:

$$\log z := \ln|z| + i\arg z,$$

като $\arg z \in [0, 2\pi)$. При този избор променливата z ще варира в цялата равнина, срязана по положителната част на реалната права, което съответства на $0 \leq \arg z < 2\pi$. При този избор на еднозначния клон на логаритъма, свеждаме разглежданията до следния еднозначен клон на функцията $\sqrt{z}$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{(i/2)\arg z}, \ 0 \leq \arg z < 2\pi, \ z \neq 0. \tag{12.6}$$

Въвеждаме сега функцията

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z+4)}$$

и разглеждаме интеграла

$$I_{r,R}(z) := \int_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz, \ r < 4 < R,$$

върху контура $\Gamma_{r,R}$, състоящ се от кръга $C_0(R)$, ориентиран в положителна посока, с начало R и край $Re^{2\pi i}$; горния бряг на отсечката $[R, r]$, ориентирана от R към r; кръга $C_0(r)$, ориентиран в отрицателна посока, от $re^{2\pi i}$ до r; и отново отсечката $[r, R]$, от r до R. Да означим долния бряг $[R, r]$ с l^- и $[r, R]$ с l^+. За интеграла получаваме представянето

$$I_{r,R}(z) = \oint_{C_0(R)} f(z)dz + \int_{l^-} f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz + \int_{l^+} f(z)dz. \tag{12.7}$$

Функцията $f(z)$ е мероморфна в областта, ограничена от посочения контур $\Gamma_{r,R}$ (който е, съгласно нашият избор, положително ориентиран спрямо областта). По теоремата за резидуумите

$$I_{r,R}(z) = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -4) = \pi, \tag{12.8}$$

тъй като $\mathrm{Res}(f,-4) = 1/\sqrt{-4} = 1/(2e^{i\pi/2}) = -i/2$. Да оценим най-напред интегралите върху двете окръжности $C_0(R)$ и $C_0(r)$. По познат начин стигаме до

$$\left|\oint_{C_0(R)} f(z)dz\right| \le 2\pi R\|f(z)\|_{C_0(R)} \le 2\pi\frac{R}{\sqrt{R}(R-4)} \longrightarrow 0,\ R\to\infty, \tag{12.9}$$

както и

$$\left|\oint_{C_0(r)} f(z)dz\right| \le 2\pi r\|f(z)\|_{C_0(r)} \le 2\pi\frac{r}{\sqrt{r}(r-4)} \longrightarrow 0,\ r\to\infty. \tag{12.10}$$

Получаваме по-нататък, отчитайки (12.6),

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & z\in l^+,\\ \sqrt{x}e^{2\pi i/2} = -\sqrt{x}, & z\in l^-. \end{cases}$$

Следователно,

$$\begin{aligned} &\int_{l^-} f(z)dz - \int_{l^+} f(z)dz = \int_R^r f(z)dz + \int_r^R f(z)dz = \\ &= \int_R^r \frac{1}{-\sqrt{x}(x+4)}dx + \int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx = 2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx. \end{aligned}$$

Замествайки този резултат в (12.7) и използвайки (12.8) виждаме, че

$$2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx + \oint_{C_0(R)} f(z)dz - \oint_{C_0(r)} f(z)dz = \pi.$$

Оставяме сега $r\to 0$ и $R\to\infty$. От (12.9) и (12.10) получаваме окончателно

$$2\int_r^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}dx \longrightarrow I,\ r\to 0,\ R\to\infty$$

и

$$I(z) = \frac{\pi}{2}.$$

Q.E.D.

Упражнения

Задача 12.1. Пресметнете

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,\ 0<a<1.$$

Упътване: Разгледайте функцията $f(z) := e^{az}/(1+e^z)$ върху контура Γ_R, състоящ се от отсечките $[-R, R]$, $[R, R+2\pi i]$, $[R+2\pi i, -R+2\pi i]$ и вертикалната отсечка $[-R+2i\pi, -R]$ (контурът Γ_R е положително ориентиран спрямо вътрешността на правоъгълника).

Задача 12.2. Пресметнете

1. $$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2},$$

2. $$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1} dx,$$

3. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}, \ n \in \mathbb{N},$$

4. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \ n \in \mathbb{N},$$

5. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/3}(x+2)^2(x^2+1)},$$

6. $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Задача 12.3. Като използвате теоремата за резидуумите, докажете че

1. $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\cos\theta+5} = \frac{2\pi}{3},$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{2},$$

3.

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6},$$

4.

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6},$$

5.

$$\text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx = -\frac{\pi}{27},$$

6.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

7.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{1/4}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sin\frac{\pi}{8},$$

8.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Упътване: Интегрирайте по долния контур.

Литература

1. Т. Аргирова, Т. Генчев, *Дробно-линейна трансформация*, Изд. Наука и изкуство, 1974
2. Т. Аргирова, Т. Генчев, *Сборник задачи по теория на аналитичните функции*, Изд. Наука и изкуство, 1967
3. Т. Аргирова, *Теория на аналитичните функции*, Изд. Наука и изкуство, 1988
4. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Изд. Наука, Москва, 1966
5. М. А. Евграфов, *Сборник задач теории аналитических функций*, Изд. Наука, Москва, 1966
6. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Изд. Наука, Москва, 1966
7. А. М. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, Изд. Наука, Москва, 1960
8. T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge, University Press, 1988
9. E. B. Saff, A. D. Snider, *Fundaments of Complex Analysis for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993.

Означения

$\mathbb{N}$ — множеството на естествените числа ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$)
$\mathbb{Z}$ — множеството на целите числа
$\mathbb{Q}$ — множеството на рационалните числа
$\mathbb{I}$ — множеството на ирационалните числа
$\mathbb{R}$ — множеството на реалните числа
$\mathbb{C}$ — множеството на комплексните числа (комплексна равнина)
$\overline{\mathbb{C}}$ — множеството на комплексните числа с безкрайно отдалечената точка (разширена комплексна равнина)

∞ — безкрайно отдалечената точка
$C < \infty$ — числото C е крайно
∂G — граница на множеството G
$\overline{G} := G \bigcup \partial G$ — затворена обвивка на G
$G^C := \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ — допълнение на G спрямо разширената комплексна равнина
$C_a(r) := \{z,\ |z-a| = r\}$, $r > 0$
$D_a(r) := \{z,\ |z-a| < r\}$, $r > 0$
$\|f(z)\|_A := \max\limits_{z \in A} |f(z)|$, $f(z) \in C(A)$, $A \subset \mathbb{C}$ — Чебишева норма

$\mathcal{A}(G)$ — аналитични в множеството G функции
$\mathcal{E}$ — цели функции (аналитични в $\mathbb{C}$)
$C(G)$ — непрекъснати в множеството G функции
$C^k(G)$ — функции, притежаващи непрекъснати производни до ред k включително
$\mathcal{M}(G)$ — мероморфни в множеството G функции
$\mathcal{M}_m(G)$ — функции, мероморфни в множеството G и имащи не повече от m полюса в G
$\mathcal{H}(G)$ — хармонични в множеството G функции

$\arg z$ — аргумент на комплексно число
$\log z$ — логаритмична функция
$\operatorname{Arg} z$ — главна стойност на аргумента на комплексното число
$\operatorname{Log} z$ — главен клон на логаритмичната функция
$\log_\tau z = \ln|z| + i \arg z$, $\arg z \in [\tau, 2\pi + \tau)$

Γ — затворена крива
$l(\Gamma)$ — дължина на крива

$\oint_{\Gamma}$ — еднократно интегриране в положителна посока върху кривата, със съвпадаща начална и крайна точка

$\Longleftrightarrow$ — тогава и само тогава
$A \Longrightarrow B$ — от твърдението A следва твърдението B
$\limsup a_n$ — точна горна граница на редицата от реални числа $\{a_n\}$
$\liminf a_n$ — точна долна граница на редицата от реални числа $\{a_n\}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \ll \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ — $u_n \leq v_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$
$f(z) = o(g(z)),\ z \to z_0$ — $\dfrac{f(z)}{g(z)} \to 0,\ z \to z_0$
$f(z) = 0(g(z)),\ z \to z_0$ — $\dfrac{f(z)}{g(z)} \leq C < \infty,\ z \to z_0,\ z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$

Азбучен указател