АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
СКОРОСТЕН ТРАНСПОРТ

Този анализ е за решения, реализирани в transport100_formula.cpp и transport100_vtoro.cpp.

Формули, които ще са ни необходими:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Означения, които ще използваме
$n = b - a + 1$ - дължината на първото трасе
$m = d - c + 1$ - дължината на второто трасе
$k = m + n$ - общата дължина на двете трасета
$b_i = d - (k - i) = d - k + i$
$n_i = a - b_i + 1$
$p = d - k - a + 1$
$c_1 = -2n - 2p - 3$
$c_2 = n^2 - p^2 + 3n + p + 2np + 2$
$t = b - b_i$
Тук са написани всички означения. Когато ги срещнете за пръв път ще бъде обяснено какво представляват и защо са избрани точно по този начин.

Поради условията новото трасе на първия влак да се съдържа в старото, то дължината на новото трасе може да бъде между 1 и n. Поради условието общата дължина на на трасетата да се запази, когато фиксираме дължината на едно от трасетата, дължината на второто се определя еднозначно. Ако дължината на първото трасе означим с i, то дължината на второто ще бъде $k - i$.

Най-важната част за решаването е да определим дали при така избраните дължини, при някой от поставянията на трасетата, те биха се застъпили, което не е позволено. Изчисляваме левия край на второто трасе, при условие че го поставим на възможно най-лявата позиция, така че да изпълнява условието изцяло да покрива старото трасе.

$$b_i = d - (k - i) = d - k + i$$

Ако този край е по надясно от b, то при всички възможни поставяния на трасетата, те не биха се застъпили. Първото трасе можем да поставим по общо $n - i + 1$ начина, а второто по $k - i - m + 1 = n - i + 1$ начина. Така очевидно може да направим $(n - i + 1)^2$ различни конфигурации.

По-интересна е ситуацията, в която $b_i \leq b$. Тогава не можем да изразим възможните конфигурации както преди, тъй като в някой от тях трасетата биха се припокривали. Ще пресметнем в каква част от интервала от a до b можем да разполагаме първото трасе, така че то изобщо да не се припокрива с второто. Това е точно частта от началото, с дължина $n_i = a - b_i + 1$. Тук поради гореописаните съображения може да изразим общия брой конфигурации като $(n_i - i + 1)(n - i + 1)$. Във всички останали ситуации имаме застъпване. Ако трасетата се застъпват само в 1 позиция, то за второто имаме $(n-i+1)-1$ възможни разположения, ако се застъпват в 2 позиции имаме $(n-i+1)-2$ възможни разположения и т.н до $(n-i+1)-(n-n1)$ възможни разположения. Така за случаите, в които има застъпване можем да изразим общия брой конфигурации като

$$\sum_{j=1}^{n-n_i}(n-i+1-j)=\sum_{j=1}^{n-n_i}(n-i+1)-\sum_{j=1}^{n-n_i}j=(n-i+1)(n-n_i)-\frac{(n-n_i)(n-n_i+1)}{2}$$

Така, за конкретна дължина i получаваме съответните възможности за брой конфигурации:
$(n-i+1)^2$, ако трасетата не биха могли да се застъпят, и
$(n_i-i+1)(n-i+1)+(n-i+1)(n-n_i)-\frac{(n-n_i)(n-n_i+1)}{2}$, ако трасетата биха могли да се застъпят.
Решение за 100 точки би било за всяка дължина от 1 до n да изчислим броя конфигурации по горните формули и да съберем резултатите.

По-интересно е да направим решение, което не използва цикли, а е формула. Нека разгледаме по-подробно израза, който получихме за случая с пресичането. Искаме да го преведем във вид на квадратен тричлен относно i. За тази цел трябва променливата да участва явно (което за момента не е така, защото участва в представянето на n_i).
$n_i=b_i-a+1=d-k-a+1+i=d-k-a+1+i=p+i$
Полагаме $p=d-k-a+1$, за да не го пишем навсякъде. Можем да направим това, защото то не зависи от i. Сега го заместваме в израза.

$$\begin{aligned}
&(n_i-i+1)(n-i+1)+(n-i+1)(n-n_i)-\frac{(n-n_i)(n-n_i+1)}{2}=\\
&=(p+i-i+1)(n-i+1)+(n-i+1)(n-p-i)-\frac{(n-p-i)(n-p-i+1)}{2}=\\
&=np-pi+p+n-i+1+n^2-np-ni-ni+pi+i^2+n-p-i-\frac{(n-p-i)(n-p-i+1)}{2}=\\
&=(-2n-2)i+i^2+2n+n^2-1-\frac{n^2-np-ni+n+np+p^2+pi-p-ni+pi+i^2-i}{2}=\\
&=\frac{(-4-4n)i+2i^2+4n+2n^2+2-(n^2-2np+n+p^2-p+(2p-2n-1)i+i^2)}{2}=\\
&=\frac{(-4-4n)i+2i^2+4n+2n^2+2-n^2+2np-n-p^2+p-(2p-2n-1)i-i^2}{2}=\\
&=\frac{(-3-2n-2p)i+i^2+n^2+3n-p^2+p+2np+2}{2}=\\
&=\frac{i^2+(-2n-2p-3)i+n^2-p^2+3n+p+2np+2}{2}=\\
&=\frac{i^2+c_1i+c_2}{2}
\end{aligned}$$

Така успешно достигнахме до желания вид. За по-малко писане полагаме $c_1=-2n-2p-3$ и $c_2=n^2-p^2+3n+p+2np+2$.

Следва да направим наблюдението, че b_i расте с единица на всяка стъпка, т.е. ако $b_i<b$ за някои дължини i, то това биха били i=1,2,....,b-b_i. За останалите i=$b-b_i+1$,...,n имаме $b_i\geq b$. Полагаме $t=b-b_i$ От това, че b_i расте също следва, че ако $b_1<b$, то двете трасета никога не биха могли да се засекат.

Това свежда задачата до два варианта:
1. Ако двете трасета никога не биха могли да се пресекат (т.е. $t\leq 0$), по горе описаните

съображения отговорът ще бъде

$$\begin{aligned} ans &= \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)^2 = \\ &= n^2 + (n-1)^2 + ... + (n-n+1)^2 = \\ &= 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

2. Ако двете трасета биха могли да се пресекат (т.е. t>0), то за дължините, за които трасетата не се припокриват сумираме $(n-i+1)^2$, а за тези, за които се пресичат - $\frac{i^2+c_1i+c_2}{2}$, или математически записано

$$ans = \sum_{i=1}^{t} \frac{i^2+c_1i+c_2}{2} + \sum_{i=t+1}^{n} (n-i+1)^2 \tag{1}$$

Остана само да разгледаме сумите в (1) и да ги опростим.

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^{t} \frac{i^2+c_1i+c_2}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^{t} \frac{i^2}{2} + \sum_{i=1}^{t} \frac{c_1i}{2} + \sum_{i=1}^{t} \frac{c_2}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} i^2 + \frac{c_1}{2}\sum_{i=1}^{t} i + \frac{c_2}{2}t = \\ &= \frac{t(t+1)(2t+1)}{12} + \frac{c_1t(t+1)}{4} + \frac{c_2}{2}t = \\ &= \frac{t(t+1)(2t+1)+3c_1t(t+1)+6c_2t}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{i=t+1}^{n} (n-i+1)^2 = \\ &= (n-t-1+1)^2 + (n-t-2+1)^2 + ... + (n-n+1+1)^2 + (n-n+1)^2 = \\ &= (n-t)^2 + (n-t-1)^2 + ... + 2^2 + 1^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-t} i^2 = \frac{(n-t)(n-t+1)(2n-2t+1)}{6} \end{aligned}$$

И сега като заместим резултатите за s_1 и s_2 в (1) окончателно получаваме

$$\begin{aligned} ans &= \frac{t(t+1)(2t+1)+3c_1t(t+1)+6c_2t}{12} + \frac{(n-t)(n-t+1)(2n-2t+1)}{6} \\ &= \frac{t(t+1)(2t+1)+3c_1t(t+1)+6c_2t+2(n-t)(n-t+1)(2n-2t+1)}{12} \end{aligned}$$

Така сведохме отговора до следното:

$$ans = \begin{cases} \frac{n*(n+1)*(2n+1)}{6}, & t \le 0 \\ \frac{t(t+1)(2t+1)+3c_1t(t+1)+6c_2t+2(n-t)(n-t+1)(2n-2t+1)}{12}, & t > 0 \end{cases}$$

Автор: Николай Цонев