Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica
Balkanica

New Series Vol. 1, 1987, Fasc. 1

Un théorème de point fixe. Application au problème d'optimisation d'Eršov

G. Isac

Presented by M. Putinar

1. Dans cet ouvrage on montre que certains problèmes de progammation mathématique (linéaires ou non-linéaires) dans des espaces ordonnés se réduisent à l'étude de l'ensemble des points fixes d'un certain opérateur associé. En 1965 E. B. Eršov dans l'ouvrage [4] a considéré le problème d'optimisation suivant.

Soit $E=R^n$ et $K\subset E$ un cône convexe saillant, fermé qui donne sur E une structure d'espace de Riesz et soit "$\leqq$" la relation d'ordre définie par K.

On suppose qu'il est donné une fonction continue monotone croissante $f: K\to E$ (c.-à-d.: $x_1\leqq x_2 \Rightarrow f(x_1)\leqq f(x_2)$), et $\varphi: K\to R$ une fonction monotone croissante. E. B. Eršov a considéré le problème d'optimisation suivant:

(*) $\quad \min\ \{\varphi(x)\,|\,x\in\mathscr{D}\}$ où: $\mathscr{D}=\{x\,|\,x\in K\ \&\ f(x)\leqq x\}$

et il a montré que dans le cas $E=R^n$ si $\mathscr{D}\neq\Phi$, alors $\mathscr{D}$ a un plus petit élément z qui est la solution du problème (*) mais il n'a proposé aucune méthode de calcul pour l'élément z.

En 1968 dans l'ouvrage [1] V. Z. Belenkii a étudié le problème d'Eršov en y associant un problème de point fixe et il a démontré que dans le cas $\mathscr{D}\neq\Phi$ et f continue, la solution du problème d'Eršov peut être calculée par des approximations successives.

On remarque aussi que le problème d'Eršov sur les espaces ordonnés a été aussi considéré par R. Cristescu, en 1976, dans l'ouvrage [3]. Le problème d'Eršov intervient dans les problèmes de planification [4]. On sait que la théorie des catastrophes affirme que les catastrophes dans les systèmes économiques sont causées par l'absence de la continuiré. Mais, dans les problèmes de planification, l'absence de la continuité peut intervenir facilement. Cet aspect du problème justifie l'étude qu'on présente dans cette note. Donc, on étudie le problème d'Eršov dans les espaces vectoriels topologiques ordonnés en supposant f pas nécessairement continue et pas nécessairement monotone croissante.

L'étude qu'on présente utilise un théorème de point fixe pour les opérateurs discontinus Λ-monotones au sens de Politjukov [7]. Un cas particulier de ce théorème a été utilisé dans l'ouvrage [6] dans la comparaison des solutions des équations différentielles dans les espaces de Banach ordonnés.

2. On suppose que $E(\tau)$ est un espace métrisable qui a la topologie τ définie par une famille suffisante de semi-normes $\{\|\ \|_n\}_{n\in N}$, c.-à-d.:

i) $$(\forall x\in E)\ (x\neq 0)\ (\exists n\in N)\ (|x|_n\neq 0)$$

ii) $(\forall n,\ m \in N)\ (\exists r \in N)\ (\forall x \in E)\ (|x|_n,\ |x|_m \leqq |x|_r)$.

On dit que le sous-ensemble $K \subset E$ est un cône convexe saillant si: $c_1)$ $K+K \subset K$; $c_2)$ $(\forall \lambda \in R_+)$ $(\lambda K \subset K)$; $c_3)$ $K \cap (-K) = \{0\}$.

On dit que le cône convexe $K \subset E$ est normal pour la topologie τ s'il existe un système fondamental de τ-voisinages $\mathcal{U}$ de zéro tel que: $(\forall U \in \mathcal{U})(U = (U + K) \cap (U - K))$. Des exemples de cônes normaux se trouvent dans l'ouvrage [5].

On dit que le cône convexe $K \subset E$ est complètement régulier [resp. régulier] si toute suite monotone croissante d'éléments de K qui est topologiquement bornée [resp. bornée par rapport à l'ordre définie par K] est τ-convergente.

Si le cône convexe $K \subset E$ est complet et bien basé [5] alors il est complètement régulier, ou si $K \subset E$ est normal et faiblement complet alors il est aussi complètement régulier [5]. On démontre aussi que si $K \subset E$ est un cône convexe normal et complètement régulier alors il est régulier [5]. Les cônes normaux, complets et faiblement Schwartz sont complètement réguliers [5], [6].

Si E (τ) est en plus un espace nucléaire complet ou semi-réflexif alors tout cône normal fermé $K \subset E$ est complètement régulier [5].

Soit maintenant $E(\tau)$ un espace localement convexe, $K \subset E$ un cône convexe saillant et "$\leqq$" la relation d'ordre définie par K.

Soit $A \subset E$ un ensemble et $f: A \to E$ un opérateur (pas nécessairement continu).

Définition 1. *On dit que l'opérateur f est (sm)—compact sur l'ensemble A si et seulement si, toute suite de la forme: $x_0 \geqq f(x_1) \geqq \ldots \geqq f(x_n) \ldots$ où pour tout $n \in N$, $x_n \in A$ contient une sous-suite convergente.*

Exemples. 1) Si $\overline{f(A)}$ est séquentiellement compact, alors l'opérateur $f: A \to E$ est (sm)—compact.

2) Si f est monotone croissant, propre et s'il existe $n \in N$ tel que $\overline{f^n(A)}$ est séquentiellement compact alors f est (sm)-compact.

3) Si $f: A \to A$, $f(A)$ est borné et le cône K est séquentiellement complètement régulier, alors f est (sm)—compact.

Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe ordonné par le cône convexe fermé et saillant $K \subset E$.

Définition 2. *On dit que l'opérateur $f: A \to E$, $A \subset E$ est Λ—monotone croissant si et seulement si, il existe up opérateur $\Lambda: E \to E$ pas nécessairement linéaire et continu tel que:*

1) il existe $(I+\Lambda)^{-1}$

2) $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissant

3) $f+\Lambda$ est monotone croissant sur A. ($x_1, x_2 \in A$ et $x_1 \leqq x_2 \to f(x_1) + \Lambda(x_1) \leqq f(x_2) + \Lambda(x_2)$.).

Remarque. Si E est un espace de Banach et Λ—linéaire et continu, on obtient la notion d'opérateur Λ—monotone, défini par V. P. Politjukov [7].

Théorème 1. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable, ordonné par un cône convexe $K \subset E$ supposé normal, fermé et saillant. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble fermé et $f: A \to E$ un opérateur Λ-monotone croissant.*

Si: *$(I+\Lambda)^{-1}(f+\Lambda)$ set (sm)-compact, $(I+\Lambda)^{-1}(f+\Lambda)(A) \subset A$ et s'il existe un élément $x_0 \in A$ tel que $f(x_0) \leqq x_0$ alors f a un point fixe dans l'ensemble A.*

Démonstration. Puisque l'espace $E(\tau)$ est métrisable on sait que la topologie τ est équivalente avec une topologie définie par une famille croissante dénombrable de semi-normes $\{|\,|_n\}_{n\in N}$.

Nous pouvons supposer que la famille $\{|\,|_n\}_{n\in N}$ vérifie les propriétés i), ii) et comme le cône K est normal nous pouvons supposer aussi que pour tout $n\in N$, la semi-norme $|\,|_n$ est monotone croissante sur le cône K. Dans ce cas, la topologie τ est équivalente avec la topologie définie par la métrique

$$(1) \qquad d(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}: \quad \forall\ x,\ y\in E.$$

On considère l'opérateur: $g=(I+\Lambda)^{-1}\ (f+\Lambda)$ qui est monotone croissant, $g: A\to A$ et l'ensemble: $A_0=\{x\in A\,|\,g(x)\leqq x\}$. Puisque $f(x_0)\leqq x_0$ on obtient que $x_0\in A$ et donc $A_0\neq\Phi$. Pour tout $i\in N$on considère la fonction: $\Phi(.\ ;\ i): A_0\to R$, définie par:

$$(2) \qquad \Phi(u;\ i)=\sup\{d(g^i(v),\ g^i(w))\,|\,v,\ \ w\in A_0, g^i(v)\leqq g^i(w)\leqq u\}.$$

La fonction $\Phi(.;\ i)$ est bien détinie, parce que pour tout $u\in A_0$ on a, $g(u)\leqq u$ d'où $g^i(u)\leqq u$. Soit maintenant la fonction de deux variables $\Phi(u;\ i)$. La fonction $\varphi(u;\ i)$ est décroissante d'après i pour u fixé. En effet, il est suffisant de démontrer que:

$$(3) \qquad \Phi(u;\ i+1)\leqq\Phi(u;\ i) \quad \text{pour tout} \quad i\in N$$

Soit M l'ensemble formé par tous les couples $(v\ ,\ w\ )$ qui intervienent dans le calcul du $\Phi(u;\ i)$ et M_1 l'ensemble de tous les couples $(v_1,\ w_1)$ qui intervient dans le calcul du $\Phi(u;\ i+1)$.

Si $(v_1,\ w_1)\in M_1$ alors $g(v_1)\leqq v_1$, $g(w_1)\leqq w_1$. On pose: $v=g(v_1)$; $w=g(w_1)$. Alors v, $w\in A_0$ parce que:

$$g(v)=g(g(v_1))\leqq g(v_1)=v, \quad g(w)=g(g(w_1))\leqq g(w_1)=w.$$

On a aussi les relation suivantes:

$$g^{i+1}(v_1)=g^i(g(v_1))=g^i(v), \quad g^{i+1}(w_1)=g^i(g(w_1))=g^i(w).$$

Donc, si $(v_1,\ w_1)\in M_1$ alors il existe $(v,\ w)\in M$ tel que: $d(g^{i+1}(v_1),\ g^{i+1}(w_1))=d(g^i(v),\ g^i(w))$ d'où il résulte la relation (3). On peut affirmer donc qu'il existe $\lim_{i\to\infty}\Phi(u;\ i)$ et on peut définir:

$$(4) \qquad \Phi(u)=\lim_{i\to\infty}\Phi(u;\ i);\ \forall u\in A_0.$$

On démontre aussi que l'hypothèse que g est (sm)-compact implique la relation:

$$(5) \qquad \inf_{\substack{u \leqslant y \\ u \in A_0}} \Phi(u) = 0; \ \forall y \in A_0,$$

En effet, on suppose que la relation (5) n'est pas vraie, donc: $(\exists\, y_0 \in A_0)$ $(\exists \beta_0 > 0,\ \beta_0 \in R)$ $(\forall\ u \in A_0,\ u \leqq y)$ $(\forall i \in N)$ $(\Phi(u;\ i) > \beta_0)$. Dans ce cas on peut construire la suite:

$$(6) \qquad y_0 \geqq g^2(v_1) \geqq g^2(w_1) \geqq g^4(v_2) \geqq g^4(w_2) \geqq \ \ldots \ \geqq g^{2s}(v_s) \geqq g^{2s}(w_s) \geqq \ \ldots$$

où $v_s,\ w_s \in A_0$ telle que:

$$(7) \qquad d(g^{2s}(v_s),\ g^{2s}(w_s)) > \beta_0, \quad \forall\ s \in N.$$

La suite (6) n'a pas de sous-suites convergentes.
En effet, nous avons les relations suivantes.

$$(8)\ g^{2s}(v_s) - g^{2(s+k)}(v_{s+k}) \geqq g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s) \geqq 0, \ \forall\ s,\ \forall\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

$$(9) \qquad g^{2s}(w_s) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \geqq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) \geqq 0,$$

$$\forall\ s,\ \forall\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Puisque: $g^{2(s+k)}(v_{s+k}) \leqq g^{2s}(w_s)$ pour tout s et k, et $g^{2s}(w_s) \quad g^{2(s+1)}(v_{s+1})$; $g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \leqq g^{2(s+1)}(w_{s+1})$ pour tout s et $k = 1,\ 2,\ \ldots$ ce que donne:

$$g^{2s}(w_s) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \geqq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+k)}(w_{s+k}) \geqq g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}).$$

Donc, les relations (8) et (9) sont vraies.

Mais la relation (7) implique: $g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s) > 0$ et $g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) > 0$ quel que soit $s \in N$.

Puisque la famille de semi-normes $\{\,\|_n\}_{n \in N}$ vérifie la propriété i) et pour chaque $n \in N$ la semi-norme $\|_n$ est monotone croissante sur le cône K il résulte qu'il existe $n_1,\ n_2 \in N$ pour chaque $s \in N$ tels que

$$|\, g^{2s}(v_s) - g^{2(s+k)}(v_{s+k}) |_{n_1} \geqq |\, g^{2s}(v_s) - g^{2s}(w_s) |_{n_1} > 0; \ \forall\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

et

$$|\, g^{2s}(w_s) - g^{2(s+1)}(w_{s+k}) |_{n_2} \geqq |\, g^{2(s+1)}(v_{s+1}) - g^{2(s+1)}(w_{s+1}) |_{n_2} > 0: \ \forall\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Comme chaque sous-suite de la suite (6) contient ou une infinité de termes de la forme $g^{2s_k}(v_{s_k})$ ou une infinité de termes de la forme $g^{2s_k}(w_{s_k})$ où $\{s_k\}$ est une sous-suite de N il résulte que chaque sous-suite de la suite (6) n'est pas une suite de Cauchy, donc n'est pas convergente. Ici nous observons aussi que les sous-suites $\{g^{2s_k}(v_{s_k})\}$, $\{g^{2s_k}(w_{s_k})\}$ à cause de la relation (7) ne sont pas constantes.

Donc nous avons obtenu que la suite (6), n'a pas de sous-suites convergentes. Mais cette affirmation est en contradiction avec l'hypothèse que g est un opérateur (sm)-compact parce que $g^{2s-1}(v_s)$, $g^{2s-1}(w_s) \in A_0$ quel que soit $s \in N$.

On peut donc maintenant affirmer que la relation (5) est vraie. Utilisant la relation (5), l'élément $x_0 \in A_0$, la monotonie de g et le fait que f est (sm)-compact on peut construire une suite de la forme:

$$x_0 \geqq g(x_1) \geqq g^2(x_2) \geqq \ldots g^n(x_n) \geqq \ldots \tag{10}$$

qui a les propriétés suivantes:

$$\Phi(g^i(x_i)) < \frac{1}{i}; \quad x_i \in A_0; \quad i = 1, \ 2, \ . \ . \ . \tag{11}$$

(12) $\quad g^n(x_n)_{n \in N}$ est convergente vers un élément $y \in A$.

Pour obtenir la suite (10) on utilise aussi le fait que Φ vérifie la propriété:

$$u_1 \leqq u_2 = > \Phi(u_1) \leqq \Phi(u_2). \tag{13}$$

La relation: $g^i(x_i) \geqq y$ implique, $g^{i+1}(x_i) \geqq g(y)$ et comme $x_i \geqq g(x_i)$ implique $g^i(x_i) \geqq g^{i+1}(x_i)$ on obtient que $g^i(x_i) \geqq g(y)$ pour tout $i \in N$ ce qui donne $y \geqq g(y)$ c'est-à-dire, $y \in A_0$.

On observe que pour tout i et m on a:

$$g^i(x_i) \geqq g^{i+m}(x_{i+m}) \geqq y \geqq g(y) \geqq g^{i+m}(y).$$

De la relation (11) on obtient:

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \ d(g^{i+m}(x_{i+m}), \ g^{i+m}(y)) \leqq \frac{1}{i} < \frac{1}{i-1}; \quad i = 2, \ 3, \ . \ . \ . \tag{14}$$

Donc il existe m tel que: $d(g^{i+m}(x_{i+m}), \ g^{i+m}(y)) < \dfrac{1}{i-1}$.

Tenant compte de la définition de la distance d, on obtient pour n la relation

$$2^{-n} \frac{|g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n}{1 + |g^{i+m}(x_{i+m}) - g^{i+m}(y)|_n} < \frac{1}{i-1}$$

et d'après un calcul élémentaire on obtient pour tout n tel que $i - 1 > 2^n$

$$|g^{i+m}(x_{i+m})-g^{i+m}(y)|_n<\frac{2^n}{i-1-2^n};\quad i=2,\ 3,\ \ldots$$

Pour n donné, on prend i tel que $i-1>2^n$; alors il existe m tel que

$$(15)\qquad |g^{i+m}(x_{i+m})-g^{i+m}(y)|_n<\frac{2^n}{i-1-2^n}.$$

Puisque: $0\leqq y-g(y)\leqq g^{i+m}(x_{i+m})-g^{i+m}(y)$ et les semi-normes $\{|\ |_n\}_{n\in N}$ sont monotones croissantes sur le cône K, on obtient que pour n donné et $i\to\infty$ ($i-1>2^n$) si on retient l'indice m pour lequel on a la relation (15), on a

$$0\leqq|y-g(y)|_n\leqq|g^{i+m}(x_{i+m})-g^{i+m}(y)|_n\leqq\frac{2^n}{i-1-2^n}.$$

Alors quand $i\to\infty$ on obtient: $|y-g(y)|_n=0$ et si on fait le même raisonnement pour chaque $n\in N$ on a: $(\forall\ n\in N)\ (|y-g(y)|_n=0)$ et comme la famille de semi-normes $\{|\ |_n\}_{n\in N}$ vérifie la relation i) il résulte que $y-g(y)=0$ et y est un point fixe pour g dans l'ensemble A. Mais ça donne: $(I+\Lambda)^{-1}(f+\Lambda)(y)=y$ d'où $f(y)=y$ et le théorème est démontré.

Remarque. Si $f: A\to E$ est un opérateur monotone croissant, alors il est Λ-monotone où $\Lambda=0$ (l'opérateur nul).

Corollaire 1. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable ordonné par un cône normal fermé et saillant K, $A\subset E$ un ensemble fermé faiblement séquentiellement compact et $f: A\to E$ un opérateur Λ-monotone croissant (pas nécessairement continu).*

Si $(I+\Lambda)^{-1}(f+\Lambda)(A)\subset A$ et s'il existe $x_0\in A$ tel que $f(x_0)\leqq x_0$ alors f a un point fixe dans l'ensemble A.

Démonstration. Il est suffisant de prouver que $g=(I+\Lambda)^{-1}(f+\Lambda)$ est (sm)-compact. En effet, pour toute suite de la forme:

$$(*)\qquad x_0\geqq g(x_1)\geqq g(x_2)\geqq\ \ldots\ \geqq g(x_n)\geqq\ \ldots$$

il existe une sous-suite $\{g(x_{n_k})\}$ faiblement convergente et comme le cône K est normal il résulte que la suite $\{g(x_{n_k})\}$ est τ-convergente vers la même limite. [5].

Corollaire 2. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable ordonné par un cône normal, fermé et saillant.*

On suppose que le cône K est séquentiellement complètement régulier.

Soit f: $K\to K$ un opérateur Λ-monotone croissant et forcé ($f(0)>0$). Si $(I+\Lambda)^{-1}\ (f+\Lambda)\ (K)\subset K$ et s'il existe $x_0\in K$ tel que $f(x_0)\leqq x_0$ alors f a un point fixe $x^*\in K$, $x^*\neq 0$.

3. Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable ordonné par un cône convexe fermé, normal saillant et régulier. On suppose aussi que l'espace ordonné (E, K) est un espace de Riesz. Soit $f: K \to E$ un opérateur (pas nécessairement continu) et $\rho: K \to R$ une fonction monotone croissante. On considère le problème d'optimisation:

$$(*): \qquad \min_{x \in \mathcal{D}} \rho(x); \quad \text{où } \mathcal{D} = \{x \in K \mid f(x) \leqq x\}.$$

On considère l'opérateur:

$$F(x) = [f(x)]_+ = \sup(0, f(x)), \quad \forall x \in K.$$

Théorème 2. *Si F est continu et Λ-monotone croissant où Λ et $(I+\Lambda)^{-1}$ sont continus et $(I+\Lambda)^{-1}$ $(F+\Lambda)$ $(K) \subset K$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1) $\mathcal{D} = \{x \in K \mid f(x) \leqq x\}$ *est non-vide*

2) $\mathcal{N} = \{x \in K \mid F(x) = x\}$ *est non-vide*

3) *Il existe la limite de la suite $\{x_n\}$ où: $x_0 = 0$, $x_{n+1} + \Lambda(x_{n+1}) = F(x_n) + \Lambda(x_n)$ et si $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ alors $x_* \in \mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ et x_* est le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{D}$.*

Demonstration. (2)$\Rightarrow$(1). En effet, si $\mathcal{N} \neq \Phi$ alors il existe $x_0 \in \mathcal{N}$ et donc $F(x_0) = x_0$. Comme $F(x_0) = \sup\, [0, f(x_0)]$ on obtient que $f(x_0) \leqq x_0$ d'où on a $\mathcal{D} \neq \Phi$.

(3)$\Rightarrow$(2). Utilisant la continuité on peut passer à la limite dans la relation:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = (I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)\ (x_n): n = 1,\ 2,\ \ldots$$

et on obtient que: $x_* = (I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(x_*)$ d'où: $F(x_*) = x_*$ et donc $\mathcal{N} \neq \Phi$.

(1)$\Rightarrow$(3). On suppose donc $\mathcal{D} \neq \Phi$ et soit $y \in \mathcal{D}$.

Alors $f(y) \leqq y$ et F étant Λ-monotone croissant, on obtient $F(y) + \Lambda(y) \leqq y + \Lambda(y)$ d'où, $(I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(y) \leqq y$. On a aussi,

$$0 \leqq (I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(0) \text{ et donc, } 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq \ldots \leqq y.$$

Le cône K étant régulier, il existe $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ et utilisant la continuité on a: $x_* = (I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(x_*)$ d'où, $F(x_*) = x_*$ et donc $x_* \in \mathcal{N}$ (c'est-à-dire $\mathcal{N} \neq \Phi$). Il est évident que $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$. On observe maintenant que $x_* \leqq y$ pour tout $y \in \mathcal{D}$ ce qui donne que x_* est le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{D}$.

Remarque. Si $\mathcal{D} \neq \Phi$ alors l'élément x_* obtenu par laffirmation (3) est la solution du problème $(*)$.

On considère maintenant le cas discontinu.

Théorème 3. *Soit $E(\tau)$ un espace localement convexe métrisable ordonné par un cône convexe $K \subset E$ supposé fermé, saillant, normal et qui donne sur E une structure d'espace de Riesz. Si F est Λ-monotone croissant, $(I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)$ est (sm)-compact et $(I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(K) \subset K$ alors les affirmations suivantes sont équivalentes.*

(1) $\mathcal{D} = \{x \in K \mid f(x) \leqq x\}$ *est non-vide*

(2) $\mathcal{N} = \{x \mid x \in K,\ F(x) = x\}$ *est non-vide.*

Démonstration. (1)$\Rightarrow$(2) On suppose que $\mathscr{D} \neq \Phi$; donc il existe $y \in \mathscr{D}$ tel que $f(y) \leqq y$ d'ou on a que $F(y) \leqq y$. Soit $g(x) = (I+\Lambda)^{-1}(F+\Lambda)(x)$ et $A = [0,y] = \{x \mid 0 \leqq x \leqq y\}$. Le cône K étant fermé il résulte que A est fermé. F étant Λ-monotone croissant on a que $g(A) \subset A$ et g étant (sm)-compact commé $g(y) \leqq y$ on peut utiliser le théorème 1 et on obtient qu'il existe $x_* \in A$ tel que $g(x_*) = x_*$ d'où $F(x_*) = x_*$ et donc $\mathscr{N} \neq \Phi$

(2)$\Rightarrow$(1) Si $\mathscr{N} \neq \Phi$ il existe $x_* \in \mathscr{N}$ tel que $F(x_*) = x_*$ et la définition de F implique $f(x_*) \leqq x_*$ c'est-à-dire $\mathscr{D} \neq \Phi$.

Le resultat suivant est un théorème de localisation de la solution du problème (*).

Théorème 4. *Si les hypothèses du théorème* 3 *sont vérifiées si* $\mathscr{D} \neq \Phi$ *alors* $\neq \Phi$ *et* x_* *est le plus petit élément de l'ensemble* $\mathscr{D}$ *si et seulement si* x_* *est le plus petit élément de l'ensemble* $\mathscr{N}$. (*Dans ce cas* x_* *est la solution du problème* (*).)

Démonstration. Si $\mathscr{D} \neq \Phi$ alors le théorème 3 implique que $\mathscr{N} \neq \Phi$, et la définition de l'opérateur F implique que $\mathscr{N} \subset \mathscr{D}$.

Soit x_* le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{D}$. On a alors $F(x_*) \leqq x_*$ et on peut appliquer le théorème 1 à l'opérateur $g = (I+\Lambda)^{-1}$ $(F+\Lambda)$ et à l'ensemble fermé $A = [0, x_*]$ d'où il résulte qu'il existe $\tilde{x}$ tel que $F(\tilde{x}) = \tilde{x} \leqq x_*$, $\tilde{x} \in \mathscr{D}$ et donc $x_* = \tilde{x} \in \mathscr{N} \subset \mathscr{D}$ d'où il résulte que x_* est le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{N}$.

Soit maintenant x_* le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{N}$. On suppose que x_* n'est pas le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{D}$. Donc, on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathscr{D}$ tel que, a) ou bien $x_0 < x_*$; b) ou bien x_0 n'est pas comparable avec x_*.

On applique théorème 1 à l'opérateur g et a l'ensemble $A = [0, x_0]$ et il résulte qu'il existe $\tilde{x} \in \mathscr{N}$ tel que $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$ et $\tilde{x} \leqq x_0$.

Comme x_* est le plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{N}$ on a $x_* \leqq \tilde{x}$ d'où $x^* \leqq \tilde{x} \leqq x_0$ ce qui est en contradiction avec a) et b) d'ou le théorème.

Théorème 5. *Si les hypothèses du théorème* 3 *sont vérifiées et si* $\mathscr{D} \neq \Phi$ *alors* $\mathscr{N} \neq \Phi$ *et* x_* *est un élément minimal de l'ensemble* $\mathscr{D}$ *si et seulement si* x_* *est un élément minimal de l'ensemble* $\mathscr{N}$.

Démonstration. Si $\mathscr{D} \neq \Phi$ le théorème 3 implique que $\mathscr{N} \neq \Phi$ et si on suppose que $x_* \in \mathscr{D}$ est un élément minimal pour l'ensemble $\mathscr{D}$ on a aussi dans ce cas que $f(x_*) \leqq x_*$ d'où $F(x_*) \leqq x_*$.

Toutes les hypothéses du théorème 1 sont vérifées pour l'opérateur $g = (I+\Lambda)^{-1}$ $(F+\Lambda)$ et l'ensemble fermé $A = [0, x_*]$, et comme $g(x_*) \leqq x_*$ il résulte qu'il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $F(\tilde{x}) = \tilde{x} \leqq x_*$ d'où $f(\tilde{x}) \leqq \tilde{x}$. Puisque $\tilde{x} \in \mathscr{D}$ et $x \leqq x_*$ il résulte que $\tilde{x} = x_*$ c. à-d. $x_* \in \mathscr{N}$ et évidement x_* est un élément minimal pour $\mathscr{N}$.

On suppose maintenant que $x_* \in \mathscr{N}$ est un élément minimal pour $\mathscr{N}$. Alors $F(x_*) = x_*$ d'où $f(x_*) \leqq x_*$ et donc $x_* \in \mathscr{D}$.

Si $y \in \mathscr{D}$ alors $f(y) \leqq y$ d'où $F(y) \leqq y$ et le théorème 1 appliqué à $g = (I+\Lambda)^{-1}$ $(F+\Lambda)$ et à l'ensemble $A = [0, y]$ implique qu'il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $F(\tilde{x}) = \tilde{x} \leqq y$. Si $y \leqq x_*$ alors on a $\tilde{x} \leqq y \leqq x_*$ et comme $\tilde{x} \leqq x_*$ implique $\tilde{x} = x_*$ il résulte que $y = x_*$ et le théorème est démontre.

Il résulte des résultats précédents que sur le problème d'Eršov (*) un problème important est de prouver que $\mathscr{D} \neq \Phi$.

On présente maintenant une situation quand le théorème 1 implique aussi que $\mathscr{D} \neq \Phi$.

On suppose que E est un espace de Banach ordonné par un cône convexe fermé normal et par rapport à la relation d'ordre E est un espace complètement réticulé.

Soit f: $K \to K$ et on suppose que f a la forme spéciale suivante:

$$f(x) = P(x) + S(x) + b; \quad \forall \; x \in K$$

où : $S: K \to K$ est un opérateur décroissant, $P: K \to K$ est une contraction, $b \in K$ est un élément fixé.

On peut définir l'opérateur: $T(y) = \inf \{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(y) + b\}$; $\forall \, y \in K$.

En effet, l'opérateur T est bien défini parce que pour tout $y \in K$ l'ensemble $\{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(y) + b\}$ est non-vide à cause du fait que pour tout $y \in K$ $\varphi(x) = P(x) + S(y) + b$ est une contraction et il existe $x_0 = x_0(y)$ tel que $P(x_0) + S(y) + b = x_0$.

On considère l'opérateur $G = T^2$; $G: K \to K$.

Théorème 6. *Si le cône K est en plus régulier alors l'opérateur G a un point fixe $x_* \in K$. Si $T(x_*) \leqq x_*$ alors l'ensemble $\mathscr{D} = \{x \in K \mid f(x) \leqq x\}$ est non-vide, et si $(I + \Lambda)^{-1}$ $(F + \Lambda)$ est continu, le problème d'Ersov a une solution qui peut être calculée par des approximations successives. (On suppose que $(I + \Lambda)^{-1}$ $(F + \Lambda)$ $(K) \subset K$ et F Λ-monotone croissant.)*

Démonstration. Puisque pour y_1, $y_2 \in K$ et $y_1 \leqq y_2$ on a l'inclusion: $\{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(y_1) + b\} \subset \{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(y_2) + b\}$ d'où il résuite que $T(y_1) \geqq T(y_2)$ ce qui donne que T est un opérateur monotone décroissant.

Alors la définition de l'opérateur G implique que G est monotone croissant. Soit $[0, T(0)] = \{x \mid 0 \leqq x \leqq T(0)\}$ on a $G(K) \subset [0, T(0)]$. En effet, pour tout $x \in K$ on a, $0 \leqq T(x) \leqq T(0)$ et $G(T(0)) = T^2(T(0)) = T(T^2(0)) \leqq T(0)$.

Donc si $x \in [0, T(0)]$ alors $0 \leqq G(0) \leqq G(x) \leqq T(0)$. Le cône K étant fermé on a que $[0, T(0)]$ est fermé et comme K est supposé régulier et $G(K) \subset [0, T(0)]$ il résulte que G est (sm)-compact. On peut donc appliquer le théorème 1 à l'ensemble $[0, T(0)]$ et on obtient que G a un point fixe $x_* \in [0, T(0)]$.

On a alors,

$$x_* = G(x_*) = T(T(x_*)) = \inf \; \{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(T(x_*)) + b\}.$$

Donc $x_* \leqq x$ pour tout $x \in \mathscr{M}$ où $\mathscr{M} = \{x \in K \mid x \geqq P(x) + S(T(x_*)) + b\} \neq \Phi$.
Soit $x_0 \in \mathscr{M}$ et on suppose que $T(x_*) \leqq x_*$.
On a dans ce cas, $S(T(x_*)) \geqq S(x_*)$ et $S(x_*) \geqq S(x_0)$ ce qui donne:

$$x_0 \geqq P(x_0) + S(T(x_*)) + b \geqq P(x_0) + S(x_*) + b \geqq P(x_0) + S(x_0) + b.$$

Donc $x_0 \in \mathscr{D}$ ce qui signifie que $\mathscr{D} \neq \Phi$.

Puisque K est régulier et $(I + \Lambda)^{-1}$ $(F + \Lambda)$ continue comme dans le théorème 2 il existe la limite de la suite $\{x_n\}$ définie par: $x_0 = 0$, $x_{n+1} + \Lambda(x_{n+1}) = F(x_n) + \Lambda(x_n)$; $\forall \; n = 1, 2, \ldots$ qui est la solution du problème d'Eršov.

4. Les théorème de localisation 3, 4 et 5 peuvent être obtenus dans le cas des espaces vectories complètement réticulés utilisant la variante suivante du théorème Knaster-Kantorovich-Birkhoff.

Théorème 7. *Soit $(E, \leqq)$ un espace vectoriel ordonné complètement réticulé et $f: D \to E$, $D \subset E$ un opérateur Λ-monotone croissant. S'il existe $\underline{u} \leqq \bar{u}$ tel que:*

1) $[\underline{u}, \bar{u}] \subset D$

2) $\underline{u} \leqq f(\underline{u})$

3) $$f(\bar{u}) \leqq \bar{u}.$$

Alors f *a un point fixe* $u_* \in [\underline{u}, \bar{u}]$.

Démonstration. On observe que les hypothèses 2) et 3) imliquent:

(4) $$\underline{u} \leqq (I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (\underline{u}) \text{ et}$$

(5) $$(I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (\bar{u}) \leqq \bar{u}.$$

On considère l'ensemble $\Sigma = \{u \in E \mid u \leqq \bar{u} \ \& \ u \leqq (I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u)\}$. De la relation (4) on a que $\underline{u} \in \Sigma$ et donc $\Sigma \neq \Phi$.

L'espace E étant complètement réticule il existe $u_* = \sup \Sigma$. Pour tout $u \in \Sigma$ *on a*, $u \leqq u_*$ d'où, $u \leqq (I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u) \leqq (I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u_*)$ et alors de la définition de u_* on obtient:

(6) $$u_* \leqq (I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u_*).$$

Puisque $u_* \in [\underline{u}, \bar{u}]$, et $(I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda)$ est monotone croissant on peut prouver que $(I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u_*) \in \Sigma$ d'où on a que $(I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u_*) \leqq u_*$ et tenant compte de la relation (6) il résulte, $(I+\Lambda)^{-1} \ (f+\Lambda) \ (u_*) = u_*$ ce qui implique, $f(u_*) = u_*$.

5. Dans la définition d'un opérateur Λ-monotone il est important de pouvoir vérifier facilement que l'opérateur $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissant.

On présente maintenant quelques critères pratiqus de monotonie pour $(I+\Lambda)^{-1}$. Soit $(E(\tau), \leqq)$ un espace vectoriel topologique ordonné. On dit que l'opérateur $f: E \to E$ est de type monotone [4] si: $(\forall \ x, y \in E) \ (f(x) \leqq f(y) \Rightarrow x \leqq y)$. On sait que f est de type monotone si et seulement si f est injectif et $f^{-1}: f(E) \to E$ est monotone croissant. Donc si $(I+\Lambda)$ est de type monotone alors $(I+\Lambda)^{-1}$est monotone croissant.

Soit $E = R^n$ et $A = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ une matrice réelle. On dit que A est une M-matrice si:

1) det $A \neq 0$
2) $a_{ij} \leqq 0 \quad \forall \ i \neq j; \ i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$
3) A^{-1} est positive.

Si $A = (a_{ij})$ vérifie les propriétés suivantes:

1) $a_{ij} > 0 \quad \forall \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$
2) $a_{ij} \leqq 0 \quad \forall \ i \neq j; \ i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$,

alors A est une M-matrice si et seulement si $\| B \|_{sp} < 1$ où $\| \ \|_{sp}$ est la norme spectrale, $B = D^{-1}C$, $D = \text{diag.} \ A$ et $A = D - C$.

On dit que la matrice $A = (a_{ij})$ est strictement diagonalement dominée si:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|; \ \forall \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Si A est strictement diagonalement dominée et en plus:

1) $a_{ij} \leqq 0 \quad \forall \ i \neq j; \ i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$
2) $a_{ii} > 0 \quad \forall \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$

alors A est une M-matrice.

Evidemment, une M-matrice est un opérateur de type monotone. On démontre que si A est une M-matrice et D une matrice diagonale positive, alors

$D+A$ est une M-matrice. Donc si Λ est une M-matrice, alors $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissante.

On dit que l'application $\Phi: R^n \to R^n$ où $\Phi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une application diagonale (non-linéaire) si, pour chaque $i=1, 2, \ldots, n$ la composante φ_i est fonction de x_i seulement (où $x=(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$).

On démontre que si $\Lambda: R^n \to R^n$ a une décomposition de la forme: $\Lambda=A+\Phi$ où A est une M-matrice et Φ une application diagonale continue et monotone croissante alors $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissante.

De l'ouvrage [7] il résulte que si $\Lambda: R^n \to R^n$ a une décomposition de la forme: $\Lambda=A+\Phi$ où:

1) $A=(a_{ij})$ et $a_{ij} \leqq 0$; $\forall\ i \neq j$; $i, j=1, 2, \ldots, n$
2) $\Phi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une application diagonale
3) $(\exists\ \alpha \in R)\ (\forall x \in R^n)\ (\langle Ax, x\rangle \geqq \alpha \langle x, x\rangle)$
4) $(\exists \beta \in R)\ (\forall s, t \in R, s \neq t)\ ((\varphi_i(s)-\varphi_i(t))/(s-t) \geqq \beta)$ pour tout $i=1, \ldots, n$
5) $\alpha+\beta>0$

alors $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissante.

Pour les matrices de type M on peut consulter l'ouvrage [10] et pour les opérateurs de type monotone l'ouvrage [4].

Une autre classe d'opérateurs non-linéaires qui peuvent être utilisés dans le concept d'opérateur Λ-monotone croissant est la classe d'opérateurs T-accrétifs au sens de Calvert [3].

Soit E un espace de Banach qui a aussi une structure d'espace de Riesz. (On dit dans ce cas que E est un espace de Banach réticulé).

Si $x \in E$ on pose: $x^+=\sup(x, 0)$; $x^-=\sup(-x, 0)$ et $|x|=x^+ + x^-$.

On suppose aussi que si $|x| \leqq |y|$ alors $\|x\| \leqq \|y\|$.

Une application de dualité positive sur E est une fonction $J: E \to E^*$ qui vérifie les propriétés suivantes:

1) $\langle J(x), x\rangle = \|x\|^2$; $\forall x \in E$
2) $\|J(x)\| = \|x\|$; $\forall\ x \in E$
3) $\langle J(x), y\rangle \geqq 0$ si $x \geqq 0$ et $y \geqq 0$
4) $\langle J(x), y\rangle = 0$ si $x \perp y$ (c.-à-d. si $\inf(|x|, |y|)=0$).

On sait que sur un espace de Banach réticulé il existe toujours une application de dualité positive [3].

Si E est un espace de Banach réticulé et J une application de dualité positive on dit que $f: D(f) \to E$; $D(f) \subset E$ est T-accrétif si: $(\forall\ x, y \in D(f))(\langle f(x)-f(y), (J(x-y))^+\rangle \geqq 0)$ et on dit que f est T-non expansif si: $(\ \forall\ x, y \in D(f))(\|(f(x)-f(y))^+\| \leqq \|(x-y)^+\|$.

On sait [3] que si $f: D(f) \to E$ est T-accrétif alors pour tout $\lambda>0$, $(I+\lambda f)^{-1}$: $\mathscr{R}\ (I+\lambda f) \to E$ est T-nonexpansif. Dans ce cas $(I+\lambda f)^{-1}$ est monotone croissant. En effet, si $g=(I+\lambda f)^{-1}$ alors on a: $\|(g(x)-g(y))^+\| \leqq \|(x-y)^+\|$, et si $x \leqq y$ on obtient que $(x-y)^+=0$ d'où $(g(x)-g(y))^+=0$ ce qui donne $g(x) \leqq g(y)$.

Donc, sur un espace de Banach réticulé si Λ est T-accrétif alors $(I+\Lambda)^{-1}$ est monotone croissant sur $\mathscr{R}\ (I+\Lambda)$.

Observations. 1) On peut utiliser aussi d'autres méthodes pour prouver que $\mathscr{D} \neq \Phi$.

2) Si l'ensemble $\mathscr{D}$ est non-vide et fermé on peut étudier l'existence des points minimaux utilisant les critères d'existence des points à support côniques.

3) Il reste le problème de l'existence du plus petit élément de l'ensemble $\mathscr{N}$ et le calcul de cet élément dans le cas discontinu.

Bibliographie

1. V. Z. Belenkii. Mathematical programming problems with minimum point. *Soviet Math. Dokl.* **9,** 1968, Nr. 6, 1301-1303.
2. V. Z. Belenkii. *Ekon. i Mat. Metody,* **3,** 1967, p. 539.
3. B. Calvert. Nonlinear evoluton equations in Banach lattices. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **76** 1970, 845-950.
4. L. Collatz. Functional analysis and numerical mathematics. New York, 1966.
5. R. Cristescu. La méthode des approximations successives dans des espaces linéaires ordonnés topologiques (en roumaine). *Stud. Cerc. Mat.,* **28,** 1976, 411-415.
6. E. B. Eršov. Collection planning of cooperative contributions in industry. Moscow, 1965. (Russian).
7. K. Glashoff, B. Werner. Inverse monotonicity of monotone L-operators with applications to quasilinear and free boundary value problems. *Math. Anal. Appl.* **72,** 1979, 89-105.
8. G. Isac. Cônes localement bornés et cônes complètement reguliers. Applications à l'analyse non-linéaires. *Séminaire d'Analyse moderne,* Nr. 17, 1980, 1-168. (Département de Math. Univ. de Sherbrooke).
9. G. Isac. Un théorème de point fixe. Apllications à la comparaison des équations différentielles dans les espaces de Banach ordonnés (sous press—Libertas Math. 1980).
10. J. M. Ortega. Rheinbaldt. Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. New York, 1970.
11. V. P. Politjukov. Solution of some nonlinear operator equations and their application to integrodifferential equations. *Soviet Math. Dokl.,* **21,** 1980, Nr.1, 229-233.

Departement de mathematiques
College militaire royal de St-Jean
Saint-Jean Quebec
CANADA, JOJ IRO

Received 20.03.1986