Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica
Balkanica

New Series Vol. 2, 1988, Fasc. 2-3

Sur les suites de fonctions semi-continues supérieurement

Zbigniew Grande

Presented by M. Putinar

Désignons par Ω le premier nombre ordinal nondénombrable. On dit qu'une suite transfinie de nombres réels a_s, $s<\Omega$, est convergente vers un nombre réel $a(\lim_{s\to\Omega} a_s=a)$ lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon>0$ un nombre ordinal $t<\Omega$ tel que $|a_s-a|<\varepsilon$ pour tout nombre ordinal $s>t$ $(s<\Omega)$. On démontre (v. [3]) que $\lim_{s\to\Omega} a_s=a$ si et seulement s'il existe un nombre ordinal $t<\Omega$ tel que $a_s=a$ pour tout $s>t$. Soit R l'ensemble des nombres réels. On dit qu'une suite transfinie de fonctions $f_s: R\to R$, $s<\Omega$, est convergente vers une fonction f lorsque, quel que soit $x\in R$, $\lim_{s\to\Omega} f_s(x)=f(x)$. On sait que si toutes les fonctions f_s sont continues (de première classe de Baire) [semi-continues supérieurement] {quasicontinues} et si $\lim_{s\to\Omega} f_s(x)=f(x)$, alors il en est de même pour la fonction f (v. W. Sierpiński [3], T. Šalat [4] et A. Neubrunnova [2]). J. S. Lipiński [1] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit la limite de certaine suite transfinie de fonctions de certaine classe. En particulier, en utilisant l'hypothèse du continu et cette condition, Lipiński a démontré que chaque fonction $f: R\to R$ de première casse de Baire est la limite de certaine suite transfinie de fonctions approximativement continues. Dans cet article j'examine les limites des suites transfinies et des suites ordinaires de fonctions approximativement semi-continues supérieurement, qualitativement semi-continues supérieurement, semi-quasicontinues supérieurement et semi-continues supérieurement par rapport à la topologie p. p. (presque partout) qui se compose de tous les ensembles d-ouverts (c'est-à-dire ne contenat que ses points de densité) A tels que $m(A)=m(\operatorname{Int} A)$ (m désignant la mesure de Lebesgue et Int A désignant l'intérieur de l'ensemble A).

Théorème 1. *Admettons l'hypothèse du continu. Toute fonction $f: R\to R$ est la limite de certaine suite transfinie de fonctions $f_s: R\to R$, $s<\Omega$, approximativement semi-continues supérieurement.*

Dans la preuve de ce théorème nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient $A\subset R$ un ensemble dénombrable et $g: A\to R$ une fonction $(A\neq\emptyset)$. Il existe une fonction $f: R\to R$ approximativement semi-continue supérieurement et telle que $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in A$.*

Preuve. Rangeons tous les nombres de l'ensemble A en une suite $(a_1, a_2, \ldots)$ telle que $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$. Il existe des ensembles fermés $A_n \subset R - A (n = 1, 2, \ldots)$ tels que $a_n \in A_n$, a_n est un point de densité de l'ensemble A_n et $A_n \cap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m (m, n = 1, 2, \ldots)$. Désignons par $C_n (n = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de tous les points de l'ensemble A_n auxquels la densité de l'ensemble A_n est égale à 1. On a $A_n \supset C_n$ et $a_n \in C_n (n = 1, 2, \ldots)$. Posons, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \begin{cases} g(a_k) & \text{lorsque } x = a_k,\ g(a_k) \geqq 0 \ \text{ et } k = 1, 2, \ldots \\ g(a_k) & \text{lorsque } x \in C_k,\ g(a_k) < 0 \ \text{ et } 0 < k \leqq n \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Toutes les fonctions $f_n (n = 1, 2, \ldots)$ étant approximativement semi-continues supérieurement et $f_1 \geqq f_2 \geqq f_3 \geqq \ldots$, la limite $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ est aussi approximativement semi-continue supérieurement. Comme, de plus, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, la preuve est achevée.

Preuve du théorème 1. Rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie $(a_1, a_2, \ldots, a_s \ldots)$, $s < \Omega$, telle que $a_s \neq a_t$ lorsque $t \neq s$ $(s, t < \Omega)$. Posons, pour $s < \Omega$, $A_s = \{a_t : t \leqq s\}$. D'après le lemme 1 pour tout nombre ordinal $s < \Omega$ il existe une fonction $f_s : R \to R$ approximativement semi-continue supérieurement telle que $f_s(x) = f(x)$ pour tout $x \in A_s$. On voit facilement que $f = \lim_{s \to \Omega} f_s$.

Théorème 2. *Admettons l'hypothèse du continu. Pour qu'une fonction $f : R \to R$ soit la limite de certaine suite transfinie de fonctions qualitativement semi-continues supérieurement, il faut et il suffit que la fonction f satisfasse à la condition suivante :*

(i) *pour tout intervalle ouvert nonvide I il existe un intervalle ouvert nonvide $J \subset I$ sur lequel la fonction f soit bornée inférieurement.*

Preuve. *Nécessité.* Supposons, au contraire, que la fonction f ne satisfasse pas à la condition (i). Il existe donc un intervalle ouvert nonvide I tel que la fonction f ne soit bornée inférieurement sur aucun intervalle ouvert nonvide $J \subset I$. Soit $B \subset I$ un ensemble dénombrable tel que l'ensemble $\{x, f(x) : x \in B\}$ est dense dans le graphe de la fonction partielle f/I. Puisque la fonction f est la limite de certaine suite transfinie de fonctions $f_s : R \to R$ qualitativement semi-continues supérieurement, il existe un nombre ordinal $s_0 < \Omega$ tel que $f_s(x) = f(x)$ pour tout $x \in B$ et $s \geqq s_0 (s < \Omega)$. Soient $a \in R$ un nombre tel que l'ensemble $A = \{x \in I : f_{s_0}(x) \geqq a\}$ est de deuxième catégorie et $I_1 \subset I$ un intervalle ouvert nonvide tel que, quel que soit l'intervalle ouvert nonvide $J \subset I_1$, l'intersection $J \cap A$ est de deuxième catégorie. Comme $f(x) = f_{s_0}(x)$ pour $x \in B$, l'ensemble $\{x \in I_1 ; f_{s_0}(x) < a - 1\}$ est donc dense dans l'intervalle I_1. Mais la fonction f_{s_0} est qualitativement semi-continue supérieurement, l'ensemble $\{x \in I_1 : f_{s_0}(x) < a - 1\}$ est donc résiduel dans I_1, en contradiction avec le fait que l'ensemble $\{x \in I_1 ; f_{s_0}(x) \geqq a\}$ est de deuxième catégorie.

Suffisance. La fonction f satisfaisant à la condition (i), il existe un ensemble ouvert et dense U tel que $R - U$ est un ensemble parfait et la fonction f est bornée inférieurement sur toute composante ouverte de l'ensemble U. Soit $U = \cup_n I_n$, où

$I_n (n=1, 2, \ldots)$ sont les composantes ouvertes de l'ensemble U. Rangeons tous les nombres réels en une suite transfinie $(a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots)$ telle que $a_s \neq a_t$ pour $s \neq t$ ($s, t < \Omega$). Posons, pour $s < \Omega$, $A_s = \{a_t \; ; \; t < s\}$. Démontrons que, quel que soit $s < \Omega$, il existe une fonction $f_s : R \to R$ qualitativement semi-continues supérieurement et telle que $f_s(x) = f(x)$ pour tout $x \in A_s$. Dans ce but remarquons qu'il existe pour tout n un nombre M_n tel que $f(x) \geqq M_n$ pour tout $x \in I_n$ et posons

$$f_s(x) = \begin{cases} \min(-n, M_n, f(c_n), f(d_n)) \text{ lorsque } x \in I_n = (c_n, d_n) \\ (c_n \neq -\infty, \; d_n \neq \infty) \text{ et } x \notin A_s \\ f(x) \text{ lorsque } x \in A_s \cup \{c_n \; ; \; n=1, 2, \ldots\} \cup \{d_n \; ; \; n=1, 2, \ldots\} \\ \min(-n, M_n, f(d_n)) \text{ lorsque } x \in I_n = (-\infty, d_n) (d_n \in R) \\ \min(-n, M_n, f(c_n)) \text{ lorsque } x \in I_n = (c_n, \infty) (c_n \in R) \\ 0 \quad \text{lorsque } x \in (R-U) - A_s - \{c_n \; ; \; n=1, 2, \ldots\} - \{d_n \; ; \; n=1, 2, \ldots\}. \end{cases}$$

Les fonctions $f_s (s < \Omega)$ sont qualitativement semi-continues supérieurement, $f_s(x) = f(x)$ pour tout $x \in A_s$ et $f = \lim_{s \to \Omega} f_s$. La preuve est achevée.

Théorème 3. *Admettons l'hypothèse du continu. Toute fonction $f : R \to R$ est la limite de certaine suite transfinie de fonctions $f_s : R \to R$ $(s < \Omega)$ qualitativement semi-continues supérieurement ou bien inférieurement en tout point.*

Preuve. Rangeons tous les nombres réels en une suite $(a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots)$, ($s < \Omega$ et $a_s \neq a_t$ pour $s \neq t$) et posons

$$f_s(x) = \begin{cases} f(a_t) & \text{lorsque } x = a_t, \; t \leqq s \\ 0 & \text{lorsque } x = a_t, \; t > s. \end{cases}$$

Toute fonction $f_s (s < \Omega)$ est qualitativement semi-continue supérieurement ou bien inférieurement en tout point $x \in R$ et $f = \lim_{s \to \Omega} f_s$.

Remarque 1. Admettons l'hypothèse du continu. En désignant par $\bar{R}$ la droite réelle achevée ($\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$), toute fonction $f : R \to R$ est la limite de certaine suite transfinie de fonctions $f_s : R \to \bar{R}$ à la fois approximativement et qualitativement semi-continues supérieurement.

Preuve. En rangeant tous les nombres réels en une suite $(a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots)$, $s < \Omega$ et $a_s \neq a_t$ pour $s \neq t (s, t < \Omega)$ et en posant, pour $s < \Omega$:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x = a_t, \; t \leqq s \\ -\infty & \text{lorsque } x = a_t, \; t > s, \end{cases}$$

on obtient la suite transfinie de fonctions $f_s : R \to \bar{R}$ à la fois approximativement et qualitativement semi-continues supérieurement et telle que $f = \lim_{s \to \Omega} f_s$.

Pour formuler le théorème 4, rappelons encore la notion suivante : une fonction $f : R \to R$ est dite quasi semi-continue supérieurement au point x, lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entourage ouvert U du point x un ensemble ouvert nonvide $V \subset U$ tel que $f(u) - f(x) < \varepsilon$ pour tout $u \in V$.

Théorème 4. *La limite de toute suite transfinie de fonctions* $f_s : R \to R (s < \Omega)$ *p. p. semi-continues supérieurement (quasi semi-continues supérieurement) est également p. p. semi-continue supérieurement (quasi semi-continue supérieurement).*

Preuve. Supposons, au contraire, que la limite f de certaine suite transfinie de fonctions $f_s (s < \Omega)$ p. p. semi-continues supérieurement (quasi semi-continues supérieurement) ne soit du même type au point x. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ (un nombre $\varepsilon > 0$ et un entourage ouvert U du point x) tels que la densité inférieure de l'ensemble $\mathrm{Int}\{u : f(u) < f(x) + \varepsilon\}$ est plus petite que 1 ($\mathrm{Int}\{u ; f(u) < f(x) + \varepsilon\} \cap U = \emptyset$). Soit $B \subset \{u ; f(u) \geqq f(x) + \varepsilon\}$ un ensemble dénombrable et dense dans l'ensemble $\{u ; f(u) \geqq f(x) + \varepsilon\}$. Puisque $\lim_{s \to \Omega} f_s = f$, il existe donc un nombre ordinal $s < \Omega$ tel que $f(u) = f_t(u)$ pour tout point $u \in B \cup \{x\}$, quel que soit $t \geqq s$. On a $f_s(u) = f(u) \geqq f(x) + \varepsilon$ pour tout point $u \in B$ et $f_s(x) = f(x)$. Il en résulte que $\mathrm{Int}\{u : f_s(u) < f(x) + \varepsilon\} \subset \mathrm{Int}\{u ; f(u) < f(x) + \varepsilon\}$ et par conséquent, puisque $f_s(x) = f(x)$, la fonction f_s ne peut être p. p. semi-continue supérieurement (quasi-continue supérieurement), en contradiction avec l'hypothèse.

Théorème 5. *Toute fonction mesurable (au sens de Lebesgue)* $f : R \to R$ *est la limite de certaine suite de fonctions* $f_n : R \to R (n = 1, 2, \ldots)$ *approximativement semi-continues supérieurement.*

Preuve. D'après le théorème de Luzin pour tout $n = 1, 2, \ldots$ il existe un ensemble fermé E_n tel que $m(R - F_n) < 1/n$ et la fonction réduite f/F_n est continue. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$.

Posons, pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$f_n(x) = \begin{cases} \max(-n, f(x) & \text{lorsque } x \in F_n \cup (R - \cup_k F_k) \\ -n & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Toutes les fonctions $f_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont approximativement semi-continues supérieurement et $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. La preuve est donc achevée.

Théorème 6. *Pour qu'une fonction* $f : R \to R$ *soit la limite de certaine suite de fonctions* $f_n : R \to R$ *à la fois qualitativement et quasi semi-continues supérieurement, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition suivante :*

(ii) *étant donnés l'intervalle ouvert* $I \neq \emptyset$ *et deux nombres réels* a, b *tels que* $b > a$, *si l'ensemble* $\{x \in I ; f(x) > b\}$ *est de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert nonvide* $J \subset I$, *l'ensemble* $\{x \in I ; f(x) < a\}$ *est nondense.*

Preuve. *Nécessité.* Supposons, au contraire, qu'il existe un intervalle ouvert $I \neq \emptyset$ et des nombers a, b tels que $b > a$, l'ensemble $A = \{x \in I ; f(x) > b\}$ est de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert, nonvide $J \subset I$ et l'ensemble $\{x \in I ; f(x) < a\}$ est dense dans l'intervalle I. La fonction f étant la limite de certaine suite de fonctions qualitativement semi-continues supérieurement (quasi semi-continues supérieurement) $f_n : R \to R$ pour tout $x \in A$, il existe un indice naturel $n(x)$ tel que $f_n(x) > b$ pour tout $n \geqq n(x)$. Puisque l'ensemble des nombres naturels est dénombrable et l'ensemble A est de deuxième catégorie, il existe donc un indice naturel n_0 tel que l'ensemble $B=\{x\in A$; au point x correspond l'indice naturel $n(x)=n_0\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I_0\subset I$ un intervalle ouvert nonvide tel que l'ensemble B est de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert nonvide $J\subset I_0$. L'ensemble $\{x\in I\ ; f(x)<a\}$ étant dense dans I, il existe un point $u\in I_0$ tel que $f(u)<a$ et par conséquent il existe un indice naturel n_1 tel que $f_n(u)<a$ pour tout $n\geqq n_1$. Posons $n_2=\max(n_0, n_1)$ et remarquons que l'ensemble $\{x\in I_{n_0}\ ; f_{n_2}(x)>b\}$ est de deuxième catégorie au point u et $f_{n_2}(u)<a<b$, en contradiction avec le fait que la fonction f_{n_2} est qualitativement semi-continue supérieurement (quasi semi-continue supérieurement au point u).

Suffisance. Puisque la fonction f satisfait à la condition (ii), elle a la propriété de Baire. En effet, dans le cas contraire, il existe un nombre réel a_1 tel que l'ensemble $E=\{x\ ;\ f(x)<a_1\}$ n'a pas la propriété de Baire. Soit $(K_n)_n$ une suite de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles et E_1 la différence de l'ensemble E et de l'union de tous les intervalles de la suite $(K_n)_n$ dont les intersections avec l'ensemble E ont la propriété de Baire. Il existe un indice naturel k tel que l'ensemble $E_2=E_1\cap\{x\ ;\ f(x)<a_1-1/k\}$ est de deuxième catégorie. Des définitions des ensembles E_1 et E_2 résulte qu'il existe un intervalle ouvert nonvide I tel que, quel que soit l'intervalle ouvert nonvide $J\subset I$, les ensembles $E_2\cap J$ et $\{x\ ;\ f(x)\geqslant a_1\}\cap J$ sont de deuxième catégorie, en contradiction avec la condition (ii). Il existe un ensemble résiduel $A\subset R$ du type G_δ tel que la fonction réduite f/A est continue. Par conséquent il existe une fonction $g: R\to R$ de première classe de Baire telle que $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in A$ ([5]). Posons $h(x)=f(x)-g(x)$ pour $x\in R$ et remarquons que $h(x)=0$ pour tout $x\in A$ et tout ensemble $\{x\ ;\ h(x)<-1/n\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ est nondense. En effet, supposons au contraire que l'ensemble $\{x\ ;\ h(x)<-1/n_0\}$ soit dense dans un intervalle ouvert $I\neq\emptyset$. Soit $x\in A\cap I$ un point de continuité de la fonction g. Remarquons que $g(x)=f(x)$. Il existe un intervalle ouvert nonvide $J\subset I$ tel que $|g(u)-g(x)|<1/8n_0$ pour tout $u\in J$. On a, en outre, $f(u)>f(x)-1/8n_0$ pour tout $u\in A\cap J$. L'ensemble $A\cap J$ est résiduel dans l'intervalle J et l'ensemble $\{u\in J\ ;\ h(u)<-1/n_0\}\subset\{u\in J\ ;\ f(u)<f(x)-7/8n_0\}$ est dense dans l'intervalle J, en contradiction avec la condition (ii).

Démontrons maintenant que la fonction h est la limite de certaine suite de fonctions à la fois qualitativement et quasi semi-continues supérieurement. Dans ce but désignons par A_n la fermeture de l'ensemble $\{x\ ;\ h(x)<-1/n\}$ $(n=1, 2,\ldots)$ et posons

$$k(x)=\begin{cases}-\infty & \text{lorsque } x\in A_1\\ -1/n & \text{lorsque } x\in A_{n+1}-A_n,\ n=1, 2,\ldots\\ 0 & \text{lorsque } x\in\{x\ ;\ h(x)\geqq 0\}-\bigcup\limits_n A_n.\end{cases}$$

La fonction k étant de première classe de Baire, il existe une suite de fonctions continues $k_n: R\to R$ convergente vers la fonction k. On a également $R-A=\cup_n B_n$, où les ensembles B_n $(n=1, 2, \ldots)$ sont fermés, nondenses et $B_n \subset B_{n+1}$ pour $n=1, 2, \ldots$ En posant pour $n=1, 2, \ldots$

$$h_n(x)=\begin{cases} \max \ k_n(x),\ h(x) & \text{lorsque } x \in B_n \cup (A \cap A_n) \\ k_n(x) & \text{lorsque } x \notin B_n \cup (A \cap A_n) \end{cases}$$

on obtient une suite de fonctions h_n à la fois qualitativement et quasi semi-continues supérieurement convergente vers la fonction h. En effet, toutes les fonctions $h_n (n=1, 2, \ldots)$ sont à la fois qualitativement et quasi semi-continues supérieurement, puisque toutes les fonctions k_n sont continues et les ensembles $B_n \cup (A \cap A_n)$ sont nondenses $(n=1, 2, \ldots)$. Si $x \in A$, on a $h_n(x)=k_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ et $\lim_{n\to\infty} k_n(x)=0 \ =h(x)$ ou $h_n(x)=h(x)$ à partir d'un certain N. Dans le cas contraire, si $x \in R-A$, il existe un indice naturel n_0 tel que $x \in A_{n_0+1}-A_{n_0}$, ou $x \in A_1$, ou $h(x) \geqq 0$. Si $x \in A_1$, on a $h_n(x)=h(x)$ à partir d'un certain indice N et par conséquent $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=h(x)$. Dans le cas où $x \in A_{n_0+1}-A_{n_0}-A\,(n_0>1)$ et $h(x)<0$, on a $h(x) \geqq -1/n_0$ et $k(x)=-1/n_0$. Il en résulte qu'il existe un indice naturel L tel que $k_l(x) \leqq h(x)$ pour $l>L$ et par conséquent $h_l(x)=h(x)$ pour $l>L$, c'est-à-dire $\lim_{l\to\infty} h_l(x)=h(x)$. Enfin, si $h(x) \geqq 0$ et $x \in \cup_n A_n$, on a $k(x) \leqq 0$ et $k_n(x) \leqq h(x)=h_n(x)$ à partir d'un certain indice N_0 et $\lim_{n\to\infty} h_n(x)=h(x)$. La fonction g étant de première classe de Baire, il existe une suite de fonctions continues $g_n : R \to R$ convergente vers la fonction g. Toutes les fonctions $f_n=h_n+g_n (n=1, 2, \ldots)$ sont à la fois qualitativement et quasi semi-continues supérieurement et $\lim_{n\to\infty} f_n \ =\lim_{n\to\infty}(h_n+g_n)=\lim_{n\to\infty} h_n+\lim_{n\to\infty} g_n=h+g=f$, d'où notre assertion.

R e m a r q u e 2. Il résulte de la première partie de la preuve du théorème 6 que chacune de deux conditions „être la limite de certaine suite de fonctions $f_n : R \to R$ qualitativement semi-continues supérieurement" et „être la limite de certaine suite de fonctions quasi semi-continues supérieurement" implique la condition (ii) du théorème 6.

R e m a r q u e 3. Puisque toutes les fonctions $f: R \to R$ p. p. semi-continues supérieurement sont mesurables (au sens de Lebesgue) et ont la propriété de Baire, la condition (ii) du théorème 6 n'est pas suffisante pour qu'une fonction $f: R \to R$ soit la limite de certaine suite de fonctions $f_n : R \to R$ p. p. semi-continues supérieurement. Dans ce but, il suffit de poser

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad x \in A \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in A, \end{cases}$$

où A est un ensemble nondense et nonmesurable.

Remarquons encore que la condition (ii) du théorème 6 n'est pas suffisante pour qu'une fonction $f: R \to R$ mesurable et à la fois ayant la propriété de Baire soit la limite de certaine suite de fonctions $f_n : R \to R$ p. p. semi-continues supérieurement. Par exemple, si A est un ensemble parfait, nondense dont toute portion est de mesure positive et si $B \subset A$ est un ensemble dénombrable dense dans A et tel que la densité supérieure de l'ensemble A est positive en tout point $x \in B$, la fonction

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{lorsque} \quad x\in R-B\\ 0 & \text{lorsque} \quad x\in B\end{cases}$$

satisfait à la condition (ii) du théorème 6, mais elle n'est pas la limite d'aucune suite de fonctions p. p. semi-continues supérieurement. En effet, ceci résulte du théorème suivant :

Théorème 7. *Si une fonction $f:R\to R$ est la limite de certaine suite de fonctions $f_n:R\to R$ p. p. semi-continues supérieurement, elle satisfait à la condition suivante:*

(iii) étant donnés deux nombres a, b tels que $b>a$, si un ensemble $B\subset\{x\,;f(x)<a\}$ est tel que sa fermeture ClB est de densité supérieure positive en tout point de l'ensemble B, l'ensemble $ClB\cap\{u\,;f(u)>b\}$ est de première catégorie dans l'ensemble ClB.

Preuve. Supposons, au contraire, qu'il existe des nombres a, $b\,(b>a)$ et un ensemble $B\subset\{x\,;f(x)<a\}$ tels que ClB est de densité supérieure positive en tout point $x\in B$ et l'ensemble $\{x\,;f(x)>b\}\cap ClB$ est de deuxième catégorie dans l'ensemble $I\cap ClB$, quel que soit l'intervalle ouvert I tel que $I\cap ClB\neq\emptyset$. De même que dans la première partie de la preuve du théorème 6, on prouve l'existence de certain indice naturel n_2, de certain intervalle ouvert nonvide $I_0\subset I$, de certain ensemble $C\subset ClB\cap I_0$ et de certain point $x_0\in B\cap I_0$ tels que $J\cap C$ est de deuxième catégorie dans l'ensemble ClB pour tout intervalle ouvert nonvide $J\subset I_0$ tel que $J\cap ClB\neq\emptyset$, $f_{n_2}(x)>b$ pour tout $x\in C$ et $f_{n_2}(x_0)<a$, en contradiction avec le fait que la fonction f_{n_2} est p. p. semi-continue supérieurement au point x_0.

Problème 1. Une fonction $f:R\to R$ satisfaisant à la condition (iii) doit-elle être la limite de certaine suite de fonctions $f_n:R\to R$ p. p. semi-continues supérieurement ? Remarquons qu'elle doit être mesurable et avoir la propriété de Baire.

Théorème 8. *Soit $f:R\to R$ une fonction. S'il existe une fonction $g:R\to R$ de première classe de Baire et un ensemble A du type F_σ et de mesure zéro tels que $\{x\,;f(x)\neq g(x)\}\subset A$ et $g(x)\leqq f(x)$ pour tout $x\in R$, la fonction f est la limite de certaine suite de fonctions $f_n:R\to R$ p. p. semi-continues supérieurement.*

Preuve. On a $g=\lim_{n\to\infty}g_n$ et $A=\cup_n A_n$, où toutes les fonctions g_n sont continues, tous les ensembles A_n sont fermés et $A_n\subset A_{n+1}\,(n=1,2,\dots)$. En posant, pour $n=1,2,\dots$

$$f_n(x)=\begin{cases}\max(g_n(x),f(x)) & \text{lorsque} \quad x\in A_n\\ g_n(x) & \text{lorsque} \quad x\notin A_n,\end{cases}$$

on obtient une suite de fonctions $f_n(n=1,2,\dots)$ p. p. semi-continues supérieurement telle que $f=\lim_{n\to\infty}f_n$.

Bibliographie

1. J. S. Lipiński. On transfinite sequences of mappings. *Časopis Pest. Mat.*, **101**, 1976, 153-158.
2. A. Neubrunnova. On quasicontinuous and cliquish functions. *Časopis Pest. Mat.*, **99**, 1974, 109-114.
3. W. Sierpiński. Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire. *Fund. Math.*, **1**, 1920, 132-141.
4. T. Šalat. On transfinite sequences of B-measurable functions. *Fund. Math.*, **78**, 1973, 157-162.
5. K. Kuratowski. Topologie I, Warszawa, 1958.

Sandomierska 37/39
85-830 Bydgoszcz
POLAND

Received 20. 03. 1986