Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica
Balkanica

New Series Vol. 2, 1988, Fasc. 4

Structure topologique certains ensembles de valeurs initiaux d'une équation différentielle

Thomas Kiventidis

Presented by S. Negrepontis

We study the topological structure of some subsets of the initial value space via the homeomorphism defined by the solutions of the differential equations.

1. On considère l'équation différentielle $\dot{x}=f(t, x)$, $x \in R^n$, $t \in R^+$ (1) et on suppose que $f(t, x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont continues dans l'ensemble $\Omega=[0, \infty] \times R^n$ et que toutes les solutions se définissent pour les mêmes valeurs de t.

On désigne par R_t^n, $t \geqq 0$ l'espace des phases le moment du temps t, i.e. $R^n=R_t^n$.

Si $\varphi(t, 0, x_0)$ est la solution du (1), avec $\varphi(0, 0, x_0)=x_0$, alors

$$T_t(x_0)=\varphi(t, 0, x_0)$$

définit une homéomorphie ([2]) $T_t : R_0^n \to R_t^n$.

On considère l'ensemble

$$C_t(x)=\{y \in R_0^n : T_t^m(y) \to x,\ t=\text{const},\ m \to \infty\}$$

où T_t^m est la m-itération de T_t.

Définition 1 [3]: *On dit que $T_t : R_0^n \to R_t^n$ est une contraction locale si pour tous les $x \in R^n$, il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que $y \in V(x)$ entraîne $\rho(T_t^m(x), T_t^m(y)) \to 0$, quand $m \to \infty$, où ρ est la distance euclidienne dans l'espace R^n.*

Lemme [3]: *Si $T : R^n \to R^n$ est une contraction locale continue et pour certain $y \in R^n$ la suite $\{T^m(y)\}$ est Cauchy, alors T a un point fixe unique x et $C(x)=\{y \in R^n : T^m(y) \to x\}=R^n$.*

Théorème 1: *Si la $T_t : R_0^n \to R_t^n$, $t=$const. est une contraction locale, alors l'ensemble $C_t(x)$ est à la fois ouvert et fermé.*

D é m o n s t r a t i o n: Soit $z \in C_t(x)$. Il suffit de démontrer qu'il existe un voisinage $V \in U(z)$ tel que $V \subset C_t(x)$.

Nous avons, avec V le voisinage de la définition 1,

$$T_t^m(z) \to x, \quad \text{quand } m \to \infty$$

et $\forall\ y \in V$, $\rho(T_t^m(y), T_t^m(z)) \to 0$, quand $m \to \infty$, par conséquent $T_t^m(t) \to x$ quand $m \to \infty$, ce qui entraîne $y \in C_t(x)$

Donc, $V \subset C_t(x)$ et il est ouvert.

Soit qu'il existe $z_0 \in \overline{C_t(x)} - C_t(x)$, où $\overline{C_t(x)}$ l'adhérence de $C_t(x)$. Allors, nous avons $T_t^m(z_0) \to x$, $m \to \infty$.

Evidemment, il existe $V \in U(z_0)$ tel que $\forall\ y \in V$

$$\rho(T_t^m(y), \quad T_t^m(z_0)) \to 0, \ m \to \infty$$

et $x \notin V$. Mais $V \cap C_t(x) \neq \emptyset$, alors il existe $y_0 \in V \cap C_t(x)$ tel que

$$T_t^m(y_0) \to x, \ m \to \infty$$

et

$$\rho(T_t^m(y_0), \ T_t^m(z_0)) \to 0, \ m \to \infty$$

ce qui entraîne $T_t^m(z_0) \to x$, $m \to \infty$, c'est-à-dire une contradiction. Donc, le $C_t(x)$ est fermé. □

Note: Par le théorème 1 nous avons $C_t(x) = \emptyset$ ou $C_t(x) = R_0^n$.

Définition 2: *On dit que le système* (1) *est positivement localement retourné par une suite à un point* $x \in R^n$, *quand pour chaque voisinage borné* $V \in U(x)$ *il existe une suite* $(t_n) \to \infty$ *telle que* $T_{t_n}(x) \in V$, $\forall\ n \in N$.

Théorème 2: *Si le système* (1) *est positivement localement retourné par une suite* (t_n) *à un point* $x \in R^n$ *et la* T_{t_n}, $t_n = \text{const.}$ *est une contraction locale et* $T_{t_n}^m(x) \to x$, $m \to \infty$, *alors la* T_{t_n} *a un point fixe unique* x_{t_n} *et* $C_{t_n}(x_{t_n}) = R_0^n$, $n \in N$.

Démonstration.

Pour tous t_n, $n \in N$, l'itération $T_{t_n}^m(x) \in V \subset \bar{V}$, $\forall\ m \geqq m_0$, où V est le voisinage des définitions 1 et 2.

Par l'hypothèse la suite $(T_{t_n}^m(x))$, $m \in N$ est Cauchy.

Donc, selon le Lemme, il existe un point fixe unique x_{t_n} et selon le théorème 1 on a $C_{t_n}(x_{t_n}) = R_0^n, n \in N$.

Corollaire: *S'il existe un point* $y \in R^n$ *tel que* $T_{t_n}(y) \to y$ *quand* $t_n \to \infty$ *et* $T_{t_n}^m(y) \to y$, $m \to \infty$, *et si la fonction* T_{t_n}, $t_n = \text{const.}$ *est une contraction locale, alors la* T_{t_n} *a un point fixe unique* x_{t_n} *et* $C_{t_n}(x_{t_n}) = R_0^n$, $n \geqq n_0$, *où* n_0 *est un nombre naturel convenable.*

Démonstration.

Puisque $T_{t_n}(y) \to y$, $t_n \to \infty$, il existe $n_0 \in N$ tel que $T_{t_n}(y) \in V$, $n \geqq n_0$, où $V \in U(y)$ est un voisinage borné de la définition 1. Mais, pour tous les t_n, $n \geqq n_0$ l'itération $T_{t_n}^m(y) \in V$, $\forall\ m \geqq m_1$. On continue comme au théorème 2.

2. On considère, maintenant, l'ensemble

$$B(y)=\{x:\lim_{n\to\infty}[T_{t_n}(y)-T_{t_n}(x)]=0,\ x\in R_0^n,\ \text{pour certaine suite } (t_n)\to\infty\},$$

où $y\in R_0^n$.

Cet ensemble $B(y)$ est plus grand que l'ensemble respectif qui se définit au [4].

Théorème 3: *Si le système* (1) *a toutes les solutions stables selon le sens de Liapunov, l'ensemble* $B(x_0)$, $x_0\in R_0^n$ *est fermé.*

Démonstration: On suppose le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $x_1\in\overline{B(x_0)}-B(x_0)$. Il existera $\varepsilon>0$ et $M>0$ tels que $\forall\ t\geqq M$

$$\rho(T_t(x_1),\ T_t(x_0))\geqq\varepsilon. \tag{2}$$

Par la stabilité de Liapunov de (1) s'entraine qu'il existe $\delta>0$ tel que $\rho(x_1,\ y)<\delta\Rightarrow\rho(T_t(y),\ T_t(x_1))<\frac{\varepsilon}{3}$, pour $t\geqq 0$.

Soit $x_2\in B(x_0)\cap V$, où $V=\{y:\rho(x_1,\ y)<\delta\}$, alors pour certain $t\geqq M_1$,

$$\rho(T_t(x_1),\ T_t(x_2))<\frac{\varepsilon}{3},\ \rho(T_t(x_2),\ T_t(x_0))<\frac{\varepsilon}{3}$$

pour suffisamment grand M_1.

Par conséquent $\rho(T_t(x_1),\ T_t(x_0))<\varepsilon$, pour certain $t\geqq M_0=\max\{M,\ M_1\}$ ce qui fait une contradiction avec la relation (2). □

Théorème 4: *Si le système* (1) *est asymptotiquement stable, c'est-à-dire toutes les solutions sont asymptotiquement stables, alors on a* $B(x_0)=R_0^n$, $x_0\in R_0^n$.

Démonstration: Puisque le système (1) est asymptotiquement stable, si $z_0\in B(x_0)$, alors les trajectoires par un voisinage V de z_0 converge vers la solution $\varphi(t,\ 0,\ z_0)$ ([2]) et, par conséquent, vers la $\varphi(t_n,\ 0,\ x_0)$ pour certaine suite $(t_n)\to\infty$, $n\to\infty$.

Donc $V\subset B(x_0)$ et le $B(x_0)$ est ouvert.

Mais le $B(x_0)$ est fermé (Théorème 3) et comme l'espace R_0^n est connexe résulte que $B(x_0)=R_0^n$. □

3. Exemple

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt}+x(1+\alpha^2 t\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t)=0,\ \alpha>1,\ x\in R \tag{1}$$

qui a la solution

$$x(t)=C\exp(-t(\alpha\sin\alpha t+1)),$$

où C const. arbitraire.

Cette équation n'est pas stable selon le sens de Liapunov, parce que pour (t sur le cercle)

$$t \in \left(\frac{(2k+1)\pi+\omega}{\alpha}, \quad \frac{2k\pi-\omega}{\alpha}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2,\dots$$

où $\pi+\omega=\arcsin\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$, on a $\alpha\sin\alpha t+1<0$, dès lors, il y a une suite $(t_k)\to\infty$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} x(t_k)=\infty.$$

Mais, si (t sur le cercle)

$$t \in \left(\frac{2k\pi-\omega}{\alpha}, \quad \frac{(2k+1)\pi+\omega}{\alpha}\right), \quad k=0,\ 1,\ 2,\dots$$

on a $\alpha\sin\alpha t+1>0$, dès lors, il y a une suite $(t_n)\to\infty$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n)=0.$$

Puisque les $T_{t_n}(x)$ et $T^m_{t_n}(x)$ tendent vers le 0 quand $(t_n)\to\infty$ et $m\to\infty$, respectivement, l'équation (1) est positivent localement retournée par la suite (t_n) au point 0 (Déf. 2) et la fonction T_{t_n} est une contraction locale (Déf. 1).

Donc, selon le Théorème 2, la T_{t_n}, $t_n=$const. a un point fixe unique, le point 0, et $C_{t_n}(0)=R$.

On a aussi $B(0)=R$, tandis que l'équation différentielle n'est pas stable selon le sens de Liapunov.

Donc, les inverses des théorèmes 3 et 4 ne sont pas valables.

Remarque. Si le système (1) est stable (ou asymptotiquement stable) au point $y_0\in R^n_0$, alors, il y a un voisinage fermé U de y_0, tel que les théorèmes 3 et 4 sont valables dans l'ensemble U à la place de l'espace R^n_0.

Références

1. J. Dieudonné. Elément d'Analvse. Tome I. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
2. J. Hale. Ordinary Differential Equations. New York, 1969.
3. R. Flores, C. Imaz. Fixed Points and Uniqueness. Inter. Conference in Diff. Equ., 1974, New York, 1975, 309-311.
4. A. I. Panasyuk. Topological Structure of a certain set on initial value for a Liapunov-Stable System. *Diff. Equ.* **13**, 1977, No 2, 260-262.

Département de Mathématiques
Université de Thessaloniki
GRECE

Received 30. 12. 1987