Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica
Balkanica

Now Series Vol. 3, 1989, Fasc. 2

Généralisation d'un théorème de R. E. Weber. Opérateurs faiblement finis

S. Nabil Flalami

Presented by M. Putinar

Introduction

Soit $\mathscr{L}(H)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert complexe H, et soit $\delta_A(X)=AX-XA$, $X\in\mathscr{L}(H)$, l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{L}(H)$ induit par $A\in\mathscr{L}(H)$. On désigne par $\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w$ la fermeture, relativement à la topologie faible des opérateurs sur $\mathscr{L}(H)$, de l'image de δ_A, et par $\{A\}'=\operatorname{Ker}\delta_A$ le commutant de A.

Il est prouvé par R. E. Weber [7, p. 81] que tout opérateur compact dans $J_w=U\{\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w\bigcap\{A\}' : A\in\mathscr{L}(H)\}$ est quasi-nilpotent. Par une démarche simple, inspirée du calcul matriciel, on peut obtenir le résultat de Weber comme cas particulier d'un théorème plus général.

En seconde partie, on introduit la notion d'opérateurs faiblement finis (A est faiblement fini si $I\notin\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w$). Pour ces opérateurs, on donne plusieurs caractérisations, et on montre qu'ils forment un ensemble dense en norme dans $\mathscr{L}(H)$. Ils ont été introduits dans [2].

Lorsque $A|_E$ est faiblement fini pour tout sous-espace (orthogonalement) réduisant E de A, on dit que A est complètement faiblement fini. On montre, en dernière partie, que A est complètement faiblement fini si et seulement si $N(H)\bigcap(\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w\bigcap\{A\}')=0$, où $N(H)$ est la classe des opérateurs normaux dans $\mathscr{L}(H)$.

1. Opérateurs compacts dans J_w

Notation. La convergence relative à la topologie faible des opérateurs dans $\mathscr{L}(H)$ est notée $\xrightarrow{w}$.

1.1. Lemme. *Tout opérateur de rang fini dans J_w est nilpotent.*

Preuve. Supposons que $AX_\alpha - X_\alpha A \xrightarrow{w} T \in \{A\}'$ avec T de rang fini et $\{X_\alpha\}$ une suite généralisée dans $\mathscr{L}(H)$.

Sur $H = \operatorname{Ker} T \oplus \mathscr{R}(T^*)$, on peut écrire $T = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & R \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ puisque $\operatorname{Ker} T$ est invariant par A. On a aussi $A(TX_\alpha) - (TX_\alpha)A \xrightarrow{w} T^2 = \begin{pmatrix} 0 & QR \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$, et le calcul de TX_α donne un opérateur de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & Y_\alpha \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $BY_\alpha - Y_\alpha B \xrightarrow{w} R^2$. Par suite, $R^2 \in \mathscr{R}(\delta_B) \bigcap \{B\}'$ puisque $\mathscr{R}(T^*)$ est de dimension finie. On en conclut que R^2, donc R, est nilpotent [5]. Alors T est lui-même nilpotent car

$$T^k = \begin{pmatrix} 0 & QR^{k-1} \\ 0 & R^k \end{pmatrix}. \ \square$$

1.2. Théorème. *Si $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur pour lequel il existe un projecteur P qui commute avec tout opérateur dans $\{A\}'$, et tel que $T_{|\mathscr{R}(P)}$ soit de rang fini non nilpotent, alors $T \notin J_w$.*

Preuve. En effet, supposons que $AX_\alpha - X_\alpha A \xrightarrow{w} T \in \overline{\{A\}'}$. Puisque P commute avec A, on en déduit, en posant $E = \mathscr{R}(P)$, que $T_{|\mathscr{R}(P)} \in \overline{\mathscr{R}(\delta_{A|E})}^w \bigcap \{A_{|E}\}'$, ce qui implique que $T_{|\mathscr{R}(P)}$ est nilpotent par (1.1). $\square$

1.3. Corollaire. *Tout opérateur compact dans J_w est quasi-nilpotent.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de (1.2) car le projecteur de Riesz P_λ, associé à la valeur propre non nulle λ de l'opérateur compact T, et de rang fini et commute avec tout opérateur dans $\{T\}'$. $\square$

2. Opérateurs faiblement finis

Notations. On désigne par F l'ensemble des opérateurs dans $\mathscr{L}(H)$ admettant un sous-espace réduisant (non nécessairement orthogonalement) de dimension finie, et par $\mathscr{F}$ l'idéal des opérateurs de rang fini dans $\mathscr{L}(H)$.

2.1. Théorème. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$, on a équivalence entre*

(i) $A \in \mathsf{F}$,

(ii) $\{A\}'$ *contient un opérateur de rang fini non nilpotent,*

(iii) $\{A\}'$ *contient un opérateur compact non-quasi-nilpotent,*

(iv) *A est faiblement fini,*

(v) $I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w*}$, *fermeture ultrafaible de* $\mathscr{R}(\delta_A)$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Si $A \in \mathsf{F}$, $\{A\}'$ contient un projecteur P non nul, de rang fini. (i) $\Rightarrow$ (iii). C'est évident.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit K un opérateur compact dans $\{A\}'$. En supposant que $I \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w$, on arrive à $K \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$, ce qui entraîne que K est quasi-nilpotent par (1.3).

(iv) $\Rightarrow$ (v). C'est clair car $\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w*} \subset \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Si $I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w^*}$, il existe un opérateur de classe trace T tel que $\mathrm{tr}(T)=1$ et $\mathrm{tr}(TY)=0$ pour tout $Y \in \mathscr{R}(\delta_A)$ [1, p. 24]. Alors, pour tout $X \in \mathscr{L}(H)$, on a

$$0=\mathrm{tr}(T(AX-XA))=\mathrm{tr}(TAX)-\mathrm{tr}(ATX)=\mathrm{tr}((TA-AT)X),$$

ce qui implique $TA=AT$. D'autre part, T est non quasi-nilpotent et admet donc une valeur propre isolée $\lambda \neq 0$. Si P est le projecteur de Riesz associé à λ, il est de rang fini et commute avec tout opérateur commutant avec T, donc avec A. Par suite, l'image de P est un sous-espace de dimension finie réduisant pour A. $\square$

Définition 1. Si $A \in \mathscr{L}(H)$, le spectre ponctuel réduisant de A, noté $\sigma_{pr}(A)$, est l'ensemble des scalaires λ pour lesquels il existe $x \neq 0$ tel que $Ax=\lambda x$ et $A^*x=\bar{\lambda}x$. Notons que $\sigma_{pr}(A)$ coïncide avec le spectre ponctuel $\sigma_p(A)$ de A notamment lorsque A est semi-hyponormal [9, p. 10], ou dominant [6].

2.2. Corollaire. *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$. Si $\sigma_{pr}(A)=\sigma_p(A)$, on a équivalence entre les assertions suivantes:*

(i) $\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w}=\mathscr{L}(H)$,
(ii) $\mathscr{F} \bigcap \{A\}'=0$,
(iii) $I \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w}$,
(iv) $\sigma_p(A)=\emptyset$.

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) est due à J. P. Williams [8, p. 275] et ne nécessite pas que $\sigma_{pr}(A)=\sigma_p(A)$; et il est évident que (i) implique (iii). D'autre part, si $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, il existe un scalaire λ et un vecteur $x \neq 0$ tels que $Ax=\lambda x$ et $A^*x=\bar{\lambda}x$. Par conséquent, l'espace engendré par $\{x\}$ est réduisant pour A, et le théorème (2.1) affirme que $I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w}$; on a ainsi montré que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Enfin, si $\mathscr{J} \bigcap \{A\}'=0$, il est clair que $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, ce qui prouve que (iv) $\Rightarrow$ (ii). $\square$

Définition 2. Avec D. A. Herrero [3], on dit qu'une propriété $(\mathscr{P})$ d'opérateurs dans $\mathscr{L}(H)$ est une mauvaise propriété si
(i) si A vérifie $(\mathscr{P})$, alors $\alpha A+\beta$ vérifie $(\mathscr{P})$ pour tout $\beta \in C$ et pour tout $\alpha \neq 0$.
(ii) Si A vérifie $(\mathscr{P})$, alors B vérifie $(\mathscr{P})$ pour tout opérateur B semblable à A.
(iii) Si A vérifie $(\mathscr{P})$ et $\sigma(A) \bigcap \sigma(B)=\emptyset$, alors $A \oplus B$ vérifie $(\mathscr{P})$.

2.3. Théorème. *L'ensemble des opérateurs faiblement finis est dense en norme dans $\mathscr{L}(H)$.*

Preuve. Il est démontré dans [3, p. 78] que si la mauvaise propriété $(\mathscr{P})$ est vérifiée pour au moins un opérateur, alors l'ensemble $\{T \in \mathscr{L}(H) : T \text{ vérifie } (\mathscr{P})\}$ est dense en norme dans $\mathscr{L}(H)$. Alors, il suffit de constater que $I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^{w}$ est une mauvaise propriété, ce qui n'est qu'une simple vérification. $\square$

Remarques. (1) Le théorème (2.3) améliore celui de Y. Ho, à savoir que $\{T \in \mathscr{L}(H) : I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_T)}\}$ est dense en norme dans $\mathscr{L}(H)$ [4, p. 510].

(2) Puisque tout opérateur nilpotent admet un sous-espace réduisant de dimension finie [3, p. 168], le théorème (2.1) assure que tout opérateur algébrique est faiblement fini. Ce résultat sera amélioré en (3.2).

3. Opérateurs complètement faiblement finis

3.1. Théorème. *Un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ est complètement faiblement fini si et seulement si tout opérateur normal dans $\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$ est nul.*

Preuve. Soit T un opérateur normal dans $\overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$. Par le théorème de Fuglede-Putnam [1, p. 81], $P = T^* T \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$. Désignons par E la résolution de l'identité de P. Soit $\lambda > 0$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite située dans $[0, \lambda]$, strictement croissante vers λ. Pour tout entier n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [-\infty, \lambda_n], \\ \dfrac{1}{\lambda - \lambda_n}(x - \lambda_n) & \text{si} \quad x \in [\lambda_n, \lambda], \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\lambda, +\infty. \end{cases}$$

Clairement, chaque fonction f_n est limite uniforme sur $\sigma(P)$, de polynômes sans terme constant. Comme $Q(P) \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$ pour tout polynôme Q nul en 0, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(P) \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$. D'autre part, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, minorée et convergente ponctuellement vers $f = \chi_{[\lambda, \infty[}$. Par suite, $f_n(P)$ converge faiblement vers $f(P) = E_{[\lambda, \infty]}$, et alors $E_{[\lambda, \infty[} \in \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$. Maintenant, le sous-espace $F = E_{[\lambda, \infty[}(H)$ est orthogonalement réduisant pour A, et on a $I_F \in \overline{\mathscr{R}(\delta_{A|F})}^w$. Alors, vu que A est complètement faiblement fini, ceci n'est possible que si $F = \{0\}$, c'est-à-dire $E_{[\lambda, \infty[} = 0$. En conséquence, $\sigma(P) = \{0\}$, ce qui entraîne $P = 0$, et donc $T = 0$.

Inversement, soit E un sous-espace orthogonalement réduisant non nul de A, et soit $B = A_{|E}$. Considérons, sur $H = E \oplus E^{\perp}$, l'opérateur normal $T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $T \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_A)}^w \bigcap \{A\}'$, on a $I \notin \overline{\mathscr{R}(\delta_B)}^w$, c'est-à-dire B est faiblement fini. □

3.2. Théorème. *Tout opérateur algébrique A est complètement faiblement fini.*

Preuve. En effet, si E est un sous-espace réduisant de A, l'opérateur $A_{|E}$ est encore algébrique, donc faiblement fini. □

Bibliographie

1. J. B. Conway. Subnormal operators. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Milbourne, 1981.
2. S. N. Elalami. Commutants et fermetures de l'image d'une dérivation Thèse. – Université des Sciences et Techniques du Languedoc Montpellier – Multigraphie, 1988.

3. D. A. Herrero. Approximation of Hilbert space operators I. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Milbourne 1982.
4. Y. Ho. Commutants and derivation ranges. *Tohoku Math. J.*, **27**, 1975, 509-514.
5. D. C. Keinecke. On operator commutators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, 1957, 535-536.
6. J. G. Stampfli, B. L. Wadhwa. On dominant operators. *Monatsh Math.*, **84**, 1977, 143-153.
7. R. E. Weber. Derivations and the class trace operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **73**, 1979, 79-82.
8. J. P. Williams. On the range of a derivation. *Pac. J. Math.*, **38**, 1971, 273-279.
9. D. Xia. Spectral theory of hyponormal operators. *Operator theory : Advances and Applications*, **10**, 1983.

Nabil ELALAMI
Alqemene Bank Marokko
Place 16 Novembre
Casablanca
MAROC

Received 13. 10. 1988