Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica Balkanica

New series Vol. 4, 1990, Fasc. 2

Une remarque sur la classe $A_{1,\aleph_0}$

M. Ouannasser

Presented by M. Putinar

In [2] one finds the following caracterization of the class $A_{\aleph_0}$: $T\in A_{\aleph_0}$ if and only if $\mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)=(Q_T)_1$. Here we establish the analogous result for $A_{1,\aleph_0}$, namely $T\in A_{1,\aleph_0}$ if and only if $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)=(Q_T)_1$.

Introduction

Soit H un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infinie et $\mathscr{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H. La classe $A(H)$ est l'ensemble des contractions $T\in\mathscr{L}(H)$, absolument continues pour lesquelles le calcul fonctionnel de Sz Nagy-Foias: $\Phi_T: H^\infty \to \mathscr{L}(H)$ est isométrique.

On sait que pour $T\in A$ l'image de Φ_T coïncide avec $\mathscr{A}_T$ (l'algèbre duale engendrée par T) et que Φ_T est un homéomorphisme faible-* de H^∞ sur $\mathscr{A}_T$.

Pour x, y dans H, $x\otimes y$ est l'opérateur de rang $\leqq 1$ définie sur H par: $\forall u\in H (x\otimes y)(u)=(u, y)x$.

Une caractérisation de la classe $A_{1,\aleph_0}$ est donée par le résultat suivant:

Théorème A [5]. *Un opérateur $T\in A_{1,\aleph_0}(H)$ si et seulement si $T\in A(H)$ et l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ est égale à la boule unité de Q_T.* (Où $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ introduit dans [6] est constitué des $[L]_T\in Q_T$ pour lesquels il existe des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ dans la boule unité fermée de H vérifiant:

(*i*) $\lim_n \|[L]_T-[x_n\otimes y_n]\|=0$;

(*ii*) $\forall\omega\in H$, $\|[x_n\otimes\omega]_T\| \underset{n\to 0}{\to} 0$.)

Le but de cette note est de montrer qu'en ce qui concerne la structure du prédual d'un opérateur dans la classe $A_{1,\aleph_0}$, on a le résultat plus fort suivant.

Théorème 1. *Si $T\in A_{1,\aleph_0}$ (H) alors $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)=(Q_T)_1$.*

Ce résultat fournit une caractérisation de la classe $A_{1,\aleph_0}$ analogue à celle basée sur l'ensemble $\mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)$ donnée dans [2] pour la classe $A_{\aleph_0}$: ($T\in A_{\aleph_0}$ si et seulement si $\mathscr{X}_0(\mathscr{A}_T)=(Q_T)_1$). Il prouve également que pour $T\in A_{1,\aleph_0}$ l'ensemble $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ est convexe. La question de la convexité de $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ en général est ouverte. Nous avons pu obtenir en nous basant sur des techniques de [4] et [5] le résultat suivant (dont les détails de la démonstration seront publiés ultérieurement).

Proposition 2. *Soit $T \in \mathsf{A}$; alors l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\bar{\mathscr{E}}^r_0(\mathscr{A}_T)$ est incluse dans $\alpha . \mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$ avec $\alpha \leqq 3$ (où $\bar{\mathscr{E}}^r_0(\mathscr{A}_T)$ est constitué des $[L]_T \in \mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$ pour lesquels la suite $(x_n)_n$ est égale à la suite $(y_n)_n$ dans la définition de $\mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$).*

Démonstration du théorème 1:

1) Si $T \in C_{.0}(H) \cap \mathsf{A}(H)$ alors un argument basé sur la notion de borélien essentiel, le corollaire 4.2 de [4] (basé lui-même sur des techniques introduites en [1]) et le fait que si $T \in C_{.0} \cap \mathsf{A}$ alors pour toute suite $(x_n)_n$ convergente faiblement vers 0, on a $\| [x_n \otimes \omega] \| \underset{n}{\rightarrow} 0$, $\forall \omega \in H$ donne le résultat.

En effet, puisque $\Phi_T : H^\infty \rightarrow \mathscr{A}_T$ est un homéomorphisme faible-* il existe $\varphi_T : Q_T \rightarrow L^1(\mathbb{T})/H^1_0$ isométrie vérifiant $\varphi^*_T = \Phi_T$. Pour tout $[L]_T \in Q_T$ de norme $\| [L]_T \| < 1$, il existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ de norme $\|f\|_1 \leqq 1$ tel que $[L]_T = \varphi_T^{-1}([f]) = [f]_T$ (où $[f] = [f])_{L^1/H^1_0}$).

D'après le corollaire 4.2 de [4] appliqué à $\Gamma = \mathbb{T}$ et à f, il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ dans la boule unité fermée de H faiblement convergentes vers 0 tel que:

$$\lim_n \| \varphi_T^{-1}([f]) - [u_n \otimes v_n]_T \| = 0$$

donc

$$\lim_n \| [L]_T - [u_n \otimes v_n]_T \| = 0.$$

D'autre part, le fait que (u_n) tend faiblement vers 0 et $T \in C_{.0}$ entraîne que pour tout $\omega \in H$ on a: $\lim_n \| [u_n \otimes \omega]_T \| = 0$. Ceci montre que la boule unité ouverte de Q_T est incluse dans $\mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$. Or l'ensemble $\mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$ est fermé pour la norme, donc $(Q_T)_1 \subset \mathscr{E}^r_0(\mathscr{A}_T)$, donc on a égalité.

2) Cas général.

Puisque $T \in \mathsf{A}_{1,\aleph_0}$ le théorème 6.2 de [5] nous assure l'existence d'un sous-espace invariant $\mathscr{M}$ pour T complètement analytique; il existe donc une application antianalytique:

$$e : \mathsf{D} \rightarrow \mathscr{M} \text{ tel que:}$$
$$\lambda \rightarrow e_\lambda .$$

(a) $(T_{|\mathscr{M}} - \lambda)^* e_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \mathsf{D}$.

(b) $\bigvee_{\lambda \in \mathsf{D}} e_\lambda = \mathscr{M}$.

On a alors $T_{|\mathscr{M}} \in C_{.0} \cap \mathsf{A}(\mathscr{M})$. En effet, l'ensemble $\{x \in \mathscr{M} / \|(T_{|\mathscr{M}})^{*n} x\| \rightarrow 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{M}$ qui contient $\{e_\lambda,\ \lambda \in \mathsf{D}\}$, donc c'est $\mathscr{M}$ tout entier, ce qui montre que $T_{|\mathscr{M}} \in C_{.0}(\mathscr{M})$. D'autre part, le fait que $(T_{|\mathscr{M}} - \lambda)^* e_\lambda = 0$ entraîne que $\mathsf{D} \subset \sigma(T_{|\mathscr{M}})$ et (cf. par exemple la démonstration du théorème 4.1 de [3]) on a alors $T_{|\mathscr{M}} \in \mathsf{A}(\mathscr{M})$.

Finalement d'après 1) on a: $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_{T|\mathscr{M}})=(Q_{T|\mathscr{M}})_1$.
Soit maintenant $[L]_T\in(Q_T)_1$ et $[K]_{T|\mathscr{M}}=\varphi_{T|\mathscr{M}}^{-1}\circ\varphi_T([L]_T)$ dans $(Q_{T|\mathscr{M}})_1$, puisque $T_{|\mathscr{M}}\in C_{.0}\cap A$, $[K]_{T|\mathscr{M}}$ est dans $\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_{T|\mathscr{M}})$, il existe donc $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ dans la boule unité de $\mathscr{M}$ vérifiant:

(c) $\lim\limits_n \| [K]_{T|\mathscr{M}} - [x_n\otimes y_n]_{T|\mathscr{M}} \| = 0,$

(d) $\forall\omega\in\mathscr{M},\ \lim\limits_n \| [x_n\otimes\omega]_{T|\mathscr{M}} \| = 0.$

Or, $\varphi=\varphi_{T|\mathscr{M}}^{-1}\circ\varphi_T$ est une isométrie de Q_T dans $Q_{T|\mathscr{M}}$ vérifiant, pour tout $x\in\mathscr{M}$, $y\in H$: $\varphi([x\otimes y]_T)=[x\otimes P_{\mathscr{M}}y]_{T|\mathscr{M}}$.
En effet, soit $h\in H^\infty.<h(T_{|\mathscr{M}}),\ \varphi([x\otimes y]_T>=<h(T),\ [x\otimes y]_T>=(h(T)x,\ y)$ $=h(T_{|\mathscr{M}})x,\ P_{\mathscr{M}}y)=<h(T_{|\mathscr{M}}),\ [x\otimes P_{\mathscr{M}}y]_{T|\mathscr{M}}>$.
Alors (c) et ce qui précède entraîne: $\lim\limits_n \|[L]_T-[x_n\otimes y_n]\|=0$. Reste à vérifier la condition d'annulation à droite à l'infini. Pour cela, soit $\omega\in H$, on a:

$$\| [x_n\otimes\omega]_T \| = \| \varphi([x_n\otimes\omega]_T) \| = \| [x_n\otimes P_{\mathscr{M}}\omega]_{T|\mathscr{M}} \| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Ceci montre bien que $[L]_T\in\mathscr{E}_0^r(\mathscr{A}_T)$ et termine la démonstration.

References

1. H. Bercovici. Factorization theorems for integrable functions. *J. Funct. Anal.* (à paraître).
2. H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy. Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory. C. B. M. S. Regional Conf. ser. in Math. n° 56, Amer. Math. Soc. Providence RI 1985.
3. S. Brown, B. Chevreau, C. Pearcy. Contractions with rich spectrum have invariant subspaces. *J. Operator Theory*, **1**, 1979, 123-136.
4. B. Chevreau. Sur les contractions à calcul fonctionnel isométrique. *J. Operator Theory* (à paraître).
5. B. Chevreau, G. Exner, C. Pearcy. On the structure of contraction operators III. *Michigan Math. J.* (à paraître).
6. B. Chevreau, C. Pearcy. On the structure of contraction operators I. *J. Funct. Anal.*, **76**, 1988, 1-29.

Received 18.07.1989

U.F.R. Mathématiques et Informatique
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 Talence Cedex