# Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica Balkanica

New Series Vol. 5, 1991, Fasc. 3

# Les quasi-mouvements et leurs propriétés

*V. I. Zhukovski*[+], *M. S. Radjef*[++]

*Presented by P. Kenderov*

In the study of differential games, we have always used the formalisation of strategies and the movements that are generated presented by N. N. Krassovski [1]. But the counter-example presented in this article and constructed by A. I. Soubbotine shows that such a formalisation presents a lack in the construction of stable dynamic solutions. A solution (a set of players strategies) is said to be dynamically stable if this solution does not change over time in the development process of the game. Let us note that the notion of "dynamic stability" has been introduced in 1977 by A. A. Petrossian.

In this article, we introduce a certain change (relatively to N. N. Krassovski) in the mathematical formulation of movements for a controlable conflicting dynamic system. Under this change, we establish the dynamic stability of a saddle point in an antagonist positional differential game with a scalar payoff function.

Suite au contre-exemple construit par A. I. Soubbotine, on propose une modification de la notion du mouvement dans un système dynamique guidable conflictuel. Sur cette base on établit la stabilité dynamique du point-selle d'un jeu différentiel antagoniste de positions.

## 1. Formalisation des quasi-mouvements

On considère un système dynamique guidable conflictuel

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u,\ v),\ x[t_0]=x_0, \tag{1.1}$$

où $x\in \mathrm{IR}^n$ est le vecteur de phase, $t\in[t_0,\ T]$ le temps, $T>t_0\geqq 0$ — des constantes, $u\in P\in \mathrm{Comp}(\mathrm{IR}^p)$ $(v\in Q\in \mathrm{Comp}(\mathrm{IR}^q))$ — l'action de commande du premier (deuxième) joueur; $(t,\ x)\in[0,\ T]\times \mathrm{IR}^n$ — la position du jeu. $\mathrm{Comp}(\mathrm{IR}^n)$ est l'espace des sous-ensembles non vides et compacts de $\mathrm{IR}^n$.

**Condition 1.1.** Les composantes du $n$-vecteur $f(t,\ x,\ u,\ v)$ sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble de leurs arguments; pour chaque domaine $G$ borné de l'espace des positions il existe une constante $\lambda_0(G)$ telle que

$$\|f(t^{(1)},\ x^{(1)},\ u,\ v)-f(t^{(2)},\ x^{(2)},\ u,\ v)\|$$
$$\leqq\lambda_0(G)(\|x^{(1)}-x^{(2)}\|+|t^{(1)}-t^{(2)}|)$$

pour chaque $(t^{(r)},\ x^{(r)})\in G$ $(r=1,\ 2)$ et $u\in P$, $v\in Q$; il existe une constante $\gamma>0$ telle, que $\|f(t,\ x,\ u,\ v)\|\leqq\gamma(1+\|x\|)$ pour tout $t\in[0,\ T]$, $u\in P$, $v\in Q$, $x\in \mathrm{IR}^n$; $\mathrm{IR}^m$ est l'espace euclidien de dimension $m$ avec la norme $\|\cdot\|$.

Les stratégies $U(V)$ du premier (second) joueur sont identifiées respectivement aux applications $u(t, x)(v(t, x))$ vérifiant l'inclusion $u(t, x) \subseteq P(v(t, x) \subseteq Q)$ pour toutes les positions $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Les mouvements du système (1.1) engendrés à partir de la position $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ par la stratégie fixée $V \in \mathrm{V}$ sont définis [1, p. 27] à l'aide du passage à la limite des splines telles qu'elles sont définies dans [1].

Mais une telle approche présente une insuffisance qui a été mise à jour par A. I. Soubbotine dans le contre-exemple suivant.

Exemple 1.1. Soit

$$\dot{x} = v, \quad 0 \leqq t \leqq 2, \quad x[0] = x_0 = 0, \quad |u| \leqq 1.$$

Considérons la stratégie

$$V \div v(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad x > 0, \quad t \in [0, 1), \\ 0 & \text{pour} \quad x < 0, \quad t \in [0, 1), \\ +1 & \text{pour} \quad x = 0, \quad t \in [0, 1), \\ 0 & \text{pour} \quad x = 0, \quad t \in [1, 2), \\ +1 & \text{pour} \quad x > 0, \quad t \in [1, 2), \\ -1 & \text{pour} \quad x < 0, \quad t \in [1, 2). \end{cases}$$

Le faisceau de mouvements $\varkappa[t_0, x_0, V]$ engendrés à partir de la position $(t_0, x_0) = (0, 0)$ par la stratégie $V$ est constitué de deux mouvements $x^{(1)}[t]$ et $x^{(2)}[t]$, $0 \leqq t \leqq 2$ représentés sur la fig. 1.1 par les lignes grasses. Cette même stratégie $V$ engendre à partir de la position (1, 0) trois mouvements $x^{(1)}[t]$, $x^{(2)}[t]$ et $x^{(3)}[t] \equiv 0$, $1 \leqq t \leqq 2$.

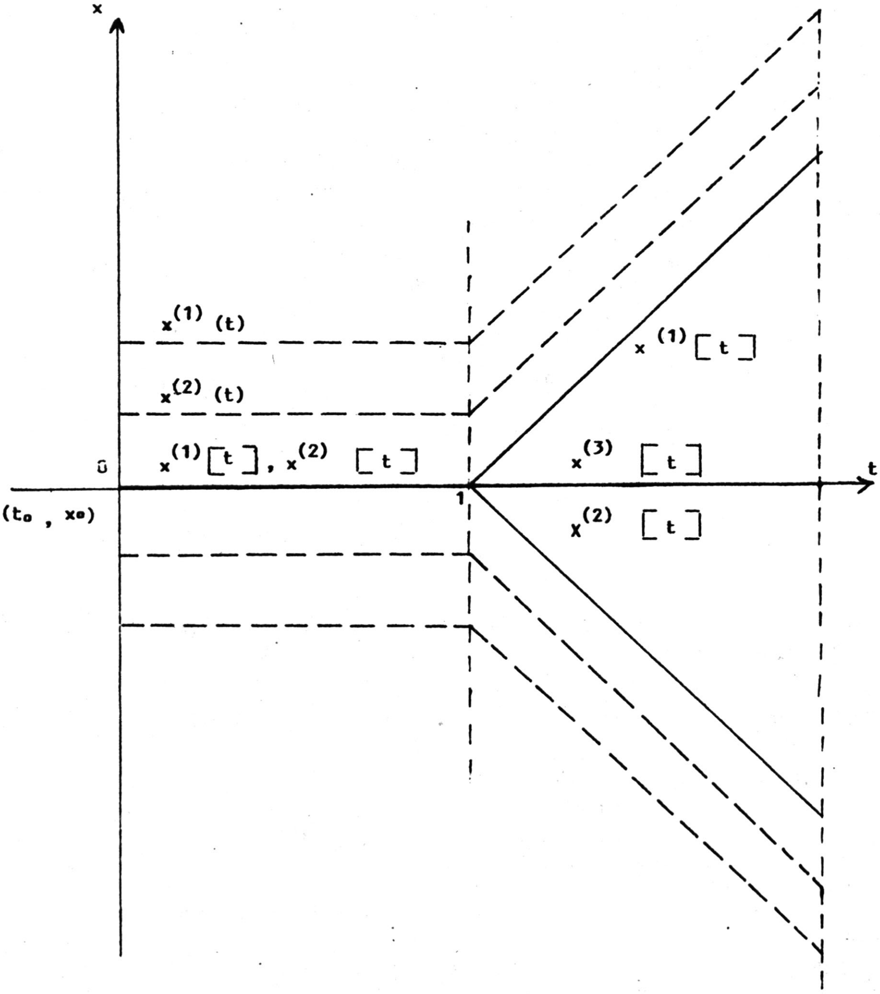
Durant le déplacement de la position $(t, x[t])$ le long du mouvement $x^{(1)}[t]$ (ou bien $x^{(2)}[t]$) à partir du moment $t = 1$ un mouvement $x^{(3)}[t]$, $1 \leqq t \leqq 2$, qui n'existait pas dans le faisceau initial $\varkappa[t_0, x_0, V]$, s'ajoute à $\varkappa(t_0, x_0, V]$. L'apparition de nouveaux mouvements peut entraîner de nouvelles valeurs des critères évaluant la qualité de fonctionnement du système (1.1). Ainsi les stratégies optimales pour les joueurs à la position initiale $(t_0, x_0)$ peuvent perdre leurs optimalités au cours du développement du jeu. Pour éviter cet inconvénient, on peut changer la notion des mouvements par pas (splines) en admettant la possibilité de discontinuités aux points $\tau_j$ de la subdivision.

On appellera quasi-mouvements par pas du système (1.1) engendrés par la stratégie $V \div v(t, x)$, la subdivision $\Delta: t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{m(\Delta)} = T$ et par le nombre $\alpha \in [0, 1]$, toute fonction $x(., V, \Delta, \alpha) = \{x(t, t_*, x_*, u(.), V, \Delta, \alpha), t_* \leqq t \leqq T\}$ qui vérifie pour tout $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, m(\Delta) - 1$, l'équation

$$x(t, V, \Delta, \alpha) = \hat{x}_j + \int_{\tau_j}^{t} f(\tau, x(\tau, V, \Delta, \alpha), u(\tau), v(\tau_j, \hat{x}_j))\, d\tau \tag{1.2}$$

sous la condition

$$\sum_{j \neq 0}^{m(\Delta)-1} \|\hat{x}_j - x_0(\tau_j, V, \Delta, \alpha)\| \leqq \alpha, \tag{1.3}$$




**où $x_0(\tau_0, V, \Delta, \alpha)=x_*$ et $x_0(\tau_j, V, \Delta, \alpha)$ est la valeur (au temps $t=\tau_j$) de la solution prolongée à droite $x(t, V, \Delta, \alpha)$ de l'équation (1.2) sur le segment $\tau_{j-1} \leqq t < \tau_j$, $j=1, 2, \ldots, m(\Delta)-1$.**

**La différence par rapport aux mouvements par pas définis dans [1, p. 32] réside dans le fait, que les quasi-mouvements par pas peuvent admettre des sauts finis $\|\hat{x}_j - x_0(\tau_j, V, \Delta, \alpha)\| \neq 0$ aux points $\tau_j$ de la subdivision.**

**Lemme 1.1.** ***L'ensemble $\varkappa(t_*, x_*, V)$ de tous les quasi-mouvements par pas du système (1.1) engendrés par la stratégie fixée $V$ à partir de la position initiale $(t_*, x_*)$, par toutes les subdivisions possibles $\Delta$, par tous les nombres $\alpha \in [0, 1]$ et par***

*toutes les fonctions mesurables de Borel* $u(t)\in P$ *est borné en normes dans l'espace* $M_n[t_0,\ T]$, *c'est-à-dire il existe une constante* $K$ *telle que*

$$\sup_{t_*\leq t\leq T} \|x(t,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \leqq K$$

*pour tous* $x(.,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\in\varkappa(t_*,\ x_*,\ V)$.

Démonstration. Par induction mathématique, on démontre les inégalités suivantes:

$$\|x(t,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \leqq (1+\|x_*\|)\exp\gamma(\tau_{j+1}-t_*)$$

$$+\sum_{l=0}^{j} \|\hat{x}_l - x_0(\tau_l,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \exp\gamma(\tau_{j+1}-t_*)-1=\beta_{j+1} \tag{1.4}$$

pour $\tau_j\leqq t<\tau_{j+1}$, $j=0,\ 1,\dots,\ m(\Delta)-1$ et pour $x_0[\tau_{j+1},\ V,\ \Delta,\ \alpha]$ on aura

$$\|x_0(\tau_{j+1},\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \leqq \beta_{j+1}. \tag{1.5}$$

Dans la démonstration on utilise l'inégalité triangulaire

$$\|\hat{x}_j\| \leqq \|\hat{x}_j - x_0(\tau_j,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| + \|x_0(\tau_j,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\|,$$

ainsi que la relation [2, p. 39]

$$\|x(t)\| \leqq (1+\|x_*\|)\exp\gamma(t-t_0)-1,$$

verifiée pour toute solution $x(t)$ du système (1.1) avec les fonctions $u(t)\in P$, $v(t)\in Q$ mesurables au sens de Borel.

De la chaîne d'inégalités

$$|(1+\|x_*\|)+\|\hat{x}_0-x_0(\tau_0,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \exp\gamma(\tau_1-t_*)-1$$

$$\leqq [(1+\|x_*\|)+\sum_{l=0}^{1} \|\hat{x}_l-x_0(\tau_2,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\|]\exp\gamma(\tau_2-1)-1$$

$$\leqq [(1+\|x_*\|)+\sum_{l=0}^{m(\Delta)-1} \|\hat{x}_l-x_0(\tau_l,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\|]\exp\gamma(\tau_{m(\Delta)}-1)-1$$

et de l'inégalité

$$\|x_0(T,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \leqq [(1+\|x_*\|)+\sum_{l=0}^{m(\Delta)-1} \|\hat{x}_l-x_0(\tau_l,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\|].\exp\gamma(T-t_0)-1,$$

on obtient (en tenant compte de (1.4), (1.5) et (1.3)) pour tout $t\in[t_0,\ T]$

$$\|x(t,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\| \leqq [(1+\|x_*\|)+\sum_{l=0}^{m(\Delta)-1} \|\hat{x}_l-x_0(\tau_l,\ V,\ \Delta,\ \alpha)\|]$$

$$\cdot\exp\gamma(T-t_*)-1 \leqq (\alpha+1+\|x_*\|)\exp\gamma(T-t_*)-1$$

$$\leqq (2+\|x_*\|)\exp\gamma(T-t_*)-1=K.$$

**Définition 1.1.** On appelle quasi-mouvement $x[.]=\{x[t, t_0, x_0, V], t_0 \leqq t \leqq T\}$ du système (1.1) engendré à partir de la position initiale $(t_0, x_0)$ par la stratégie $V \in \mathrm{V}$, toute fonction $x[.]=\{x[t], t_0 \leqq t \leqq T\}$ continue sur le segment $[t_0, T]$ pour laquelle il existe une suite de quasi-mouvements par pas

$$x(., V, \Delta^{(k)}, \alpha^{(m)})=\{x(t, \tau_0^{(k)}, x_0, \hat{x}_0^{(k)}, u^{(k)}(.), V, \Delta^{(k)}, \alpha^{(m)}); \tau_0^{(k)} \leqq t \leqq T\}$$

(prolongeables à gauche jusqu'à $t_0$ si $\tau_0^{(k)} > t_0$) qui converge (quand $m, k \to \infty$) vers $x[.]=\{x[t], t_0 \leqslant t \leqslant T\}$ dans la métrique de l'espace $M_n[t_0, T]$, quand $\sup_j |\tau_{j+1}^{(k)}-\tau_j^{(k)}| \to 0$, $|\tau_0^{(k)}-t_0|+\|x_0^{(k)}-x_0\| \to 0$, quand $k \to \infty$, $\alpha^{(m)} \to 0$ quand $m \to \infty$.

Notons par $\varkappa[t_0, x_0, V]$ le faisceau (l'ensemble) des quasi-mouvements $x[., t_0, x_0, V]$ ainsi construits. Analogiquement on définit les quasi-mouvements $x[., t_0, x_0, U]$ et $x[., t_0, x_0, U, V]$ et les faisceaux correspondants $\varkappa[t_0, x_0, U]$ et $\varkappa[t_0, x_0, U, V]$.

## 2. Propriétés des quasi-mouvements

**Lemme 2.1.** *Le faisceau $\varkappa[t_0, x_0, V]$ des quasi-mouvements $x[., t_0, x_0, V]$ est un sous-ensemble non vide, borné (en norme) et fermé de l'espace $C_n[t_0, T]$ des fonctions continues.*

Démonstration. L'ensemble $\varkappa[t_0, x_0, V]$ est non vide puisque il contient pour $\alpha=0$ tous les mouvements définis au sens de [1, p. 32], et dans [1] on a montré que l'ensemble de ces derniers est non vide. Du lemme 1.1 on déduit, que l'ensemble $\varkappa(t_0, x_0, V)$ de tous les quasi-mouvements par pas est borné en norme de l'espace $M_n[t_0, T]$ et donc il en est de même pour sa fermeture. Donc le faisceau $\varkappa[t_0, x_0, V]$ des quasi-mouvements appartenant à cette fermeture est borné. La métrique de $C_n[t_0, T]$ est induite par la métrique de $M_n[t_0, T]$ et $\varkappa[t_0, x_0, V] \subset C_n(t_0, T]$. Par conséquent, le faisceau $\varkappa[t_0, x_0, V]$ sera un sous-ensemble borné (en norme) de l'espace $C_n[t_0, T]$.

Montrons que le faisceau $\varkappa[t_0, x_0, V]$ est fermé dans $C_n[t_0, T]$. Soit $y[.]$ un point limite de l'ensemble $\varkappa[t_0, x_0, V]$. Démontrons que $y[.] \in \varkappa[t_0, x_0, V]$. Pour cela, construisons une suite de quasi-mouvements, convergente vers $y[.]$, et pour chacun de ces quasi-mouvements — une suite de quasi-mouvements par pas. Alors la suite de quasi-mouvements par pas convergente vers $y[.]$ est consitituée de représentants choisis d'une manière convenable de chacune de ces suites de quasi-mouvements par pas.

Remarque 2.1. Du lemme 2.1 et de la définition 1.1, pour $X[T, t_0, x_0, V]=\varkappa[t_0, x_0, V] \cap \{t=T\}$, on déduit que:

1. Les ensembles $X[T, t_0, x_0, V]$, $X[T, t_0, x_0, U]$, $X[T, t_0, x_0, U, V]$ sont non vides et compacts dans $\mathbb{R}^n$;
2. $X[T, t_0, x_0, U, V] \subset X[T, t_0, x_0, U] \cap X[T, t_0, x_0, V]$.

**Lemme 2.2.** *Pour toute position* $(t^*, x[t^*])$, *où* $t^* \in [t_0, T]$, $x[.]$ — *un certain quasi-mouvement du faisceau* $x[t_0, x_0, V]$, *on a l'inclusion*

$$X[T, t^*, x[t^*], V] \subset X[T, t_0, x_0, V]. \tag{2.1}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $x[t]$, $t_0 \leqq t \leqq T$ — un certain quasi-mouvement du système (1.1), engendré à partir de la position initiale $(t_0, x_0)$ par la stratégie $V$ et $t^* \in [t_0, T]$. Prenons arbitrairement un quasi-mouvement $x^*[t]$, $t^* \leqq t \leqq T$, engendré par la même stratégie $V$ à partir de la position $(t^*, x[t^*])$. L'inclusion (2.1) sera réalisée, si on montre que la fonction

$$\tilde{x}[t] = \begin{cases} x[t] & \text{pour } t_0 \leqq t \leqq t^* \\ x^*[T] & \text{pour } t^* \leqq t \leqq T \end{cases}$$

est un quasi-mouvement du système (1.1) engendré par $V$ à partir de la position $(t_0, x_0)$. Pour cela construisons deux suites de quasi-mouvements par pas

$$x(t, V, u^{(k)}(.), \Delta^{(k)}, \alpha^{(m)}), \ t_0 \leqq t \leqq T \ \text{ et } \ x^*(t, V, \bar{u}^{(r)}, \bar{\Delta}^{(r)}, \alpha^{(1)}), \ t_* \leqq t \leqq T$$

convergentes dans $M_n$ respectivement vers $x[.]$ et $x^*[.]$. De ces deux suites, on formule naturellement la suite de quasi-mouvements par pas convergente dans $M_n[t_0, T]$ vers $\tilde{x}[.]$.

R e m a r q u e 2.2. Le lemme 2.2 montre que si, au lieu des mouvements habituels [1, 3] du système (1.1), on utilise les quasi-mouvements, alors l'insuffisance décelée dans l'exemple 1.1 disparaît. La suite correspondante de quasi-mouvements par pas est représentée dans la fig. 1.1 par des lignes discontinues.

## 3. Alternative et point-selle

En utilisant le schéma de la démonstration proposée par N. N. Krassovski dans [1, p. 52-68], on arrive au théorème suivant sur l'alternative.

**Théorème 3.1.** *Supposons que*
1. *la condition* 1.1 *est vérifiée;*
2. *pour toutes les positions* $\{t, x\} \in [0, T] \times \mathrm{IR}^n$ *et les vecteurs* $s \in \mathrm{IR}^n$

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t, x, u, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'f(t, x, u, v); \tag{3.1}$$

3. *l'ensemble donné* $M$ *est fermé dans* $\mathrm{IR}^n$.

*Alors, quelle que soit la position initiale* $(t_0, x_0) \in [0, T[ \times \mathrm{IR}^n$:

— *soit il existe une stratégie* $U^e \in \mathrm{IU}$ *qui réalise pour tous les mouvements* $x[., t_0, x_0, U^e]$ *la rencontre avec l'ensemble* $M$, *c'est à dire*

$$X[T, t_0, x_0, U^e] \subset M,$$

— *soit il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *et une stratégie* $V^e \in V$ *qui permet à tous les quasi-mouvements* $x[., t_0, x_0, V^e]$ *d'éviter à l'instant* $T$ *le* $\varepsilon$*-voisinage*

$$M^{\varepsilon}=\{x\in \mathrm{IR}^{n}: \min \|\bar{x}-x\|<\varepsilon,\ \bar{x}\in M\}$$

*de l'ensemble $M$, c'est-à-dire $M^{\varepsilon}\cap X[T,\ t_0,\ x_0,\ V^{e}]=\emptyset$.*

Considérons maintenant le jeu différentiel antagoniste de positions avec une fonction scalaire de gain

$$\langle \Sigma,\ \{\mathrm{IU},\ \mathrm{V}\},\ F(x[T])\rangle, \tag{3.2}$$

où le système guidable $\Sigma$ est décrit par l'équation (1.1), IU et V — les ensembles des stratégies respectivement du premier et du second joueur, la fonction scalaire de gain $F(x[T])$ est définie sur l'intersection des faisceaux de quasi-mouvements du système (1.1) avec l'hyperplan $\{t=T\}$.
On suppose verifiée la

Condition 3.1. La fonction $F(x)$ est continue.

**Définition 3.1.** La situation $(U^0,\ V^0)\in \mathrm{IR}\times \mathrm{V}$ est appelée point-selle du jeu (3.2) avec la position initiale $(t_0,\ x_0)\in[0,\ T[\times \mathrm{IR}^n$, si

$$F(x[T,\ t_0,\ x_0,\ U^0])\leqq F(x[T,\ t_0,\ x_0,\ U^0,\ V^0])\leqq F(x[T,\ t_0,\ x_0,\ V^0]) \tag{3.3}$$

pour tous les quasi-mouvements $x[.,\ t_0,\ x_0,\ U^0]$, $x[.,t_0,x_0,U^0,V^0]$, $x[.,\ t_0,\ x_0,\ V^0]$. La définition ainsi donnée est équivalente [4, p. 25-26] à la notion du point-selle introduite dans [1, p. 54] à l'aide des stratégies max min et min max.

Remarquons, que les nombres $F(x[T,\ t_0,\ x_0,\ U^0,\ V^0])$ de (3.3) sont appelés valeur du jeu (3.2).

**Théorème 3.2.** *Supposons vérifiées les conditions 1.1, 3.1 et la relation* (3.1). *Alors pour toute position initiale $(t_0,\ x_0)\in[0,\ T]\times \mathrm{IR}^n$ il existe un point-selle dans le jeu* (3.2).

Démonstration du théorème correspondant aux mouvements du système (1.1) tels que définis dans [1] est donnée dans [1, p. 73-77] et est basée seulement sur le théorème sur l'alternative. Mais l'alternative est aussi vraie pour les quasi-mouvements.

On obtient analogiquement à [4, p. 26-28] la relation (3.3) pour le jeu (3.2) avec une position initiale fixée $(t_0,\ x_0)$.

**Proposition 3.1.**

1. Les points-selle du jeu (3.2) sont interchangeables, c'est-à-dire si $(U^{(1)},\ V^{(1)})$ et $(U^{(2)},\ V^{(2)})$ sont deux points-selle différents, alors les situations $(U^{(1)},\ V^{(2)})$ et $(U^{(2)},\ V^{(1)})$ sont aussi des points-selle.
2. Les points-selle sont équivalents: en des points-selle différents, les valeurs du jeu coïncident.

Une chose importante dans la théorie des jeux différentiels de positions (antagonistes et non antagonistes) est [5, 6] la propiété de la stabilité dynamique de la situation prise comme solution du jeu. La stabilité dynamique de la solution du jeu différentiel signifie: la situation — solution du jeu différentiel avec une position initiale fixée reste toujours solution du jeu quand on déplace la position initiale le long de tout mouvement engendré par cette situation. Ainsi au cours du processus de développement du jeu dans le temps, la propriété de la situation d'être solution du jeu ne se perd pas.

**Proposition 3.2.** Un point-selle $(U^0, V^0)$ du jeu (3.2) avec la position initiale $(t_0, x_0)$ sera également un point-selle du même jeu (3.2) mais avec la position initiale $(t, x[t])$ pour tout $t \in (t_0, T]$ et $x[.] \in \varkappa[t_0, x_0, U^0, V^0]$.

La preuve de la proposition découle directement de l'inégalité (3.3), puisque d'après le lemme 2.2 on a

$$x[T] \in X[T, t, x[t], U^0, V^0],$$

$$X[T, t, x[t], U^0] \subset X[T, t_0, x_0, U^0], \ X[T, t, x[t], V^0] \subset X[T, t_0, x_0, V^0].$$

En conclusion, remarquons que le lemme 2.2 permet l'étude de la stabilité dynamique des solutions d'un jeu différentiel avec un nombre de joueurs supérieur à deux.

## References

1. N. N. Krassovski, A. I. Soubbotine. Jeux différentiels. Moscou, 1977.
2. N. N. Krassovski. Oupravlenie dynamitcheskimi systemami (Commande des systèmes dynamiques). Moscou, 1985. (En russe.)
3. A. I. Soubbotine, A. G. Tchentsov. Optimisatia guaranti v' zadatchakh oupravlenia (Optimisation garantie: dans les problèmes de commande). Moscou, 1981.
4. V. I. Zhukovski, H. T. Tenianski. Ravnovessia oupravlenia mnogocriterialnekh dynamitcheskikh système (Commandes d'équilibre dans les systèmes dynamiques multicritères). Moscou, 1984.
5. E. M. Vaisbord, V. I. Zhukovski. Introduction to multi-player differential games and their applications. New York, 1988.
6. V. I. Zhukovski. Some problems of non-antagonistic differential games. H. Mathematical Methods in Operations Research. Bulgarian Academy of Sciences. Sofia, 1985, 103-195.

+ *VZITLP*
*Narodnogo opolcheniia D. 38-2*
*128298 Moskva D-298*
*SSSR*
++ *Lamos — Université de Bejaia*
*Route Targua — Ouzemour*
*06.000 Bejaia*
*ALGERIE*

*Received 07.09.1990*