Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

---

Mathematica
Balkanica

New Series Vol. 6, 1992, Fasc. 3

Ein Beitrag zum Konvexitätsbegriff I

Konstantin Stathakopoulos

Angestellte von S. Negrepontis

In dieser Arbeit entwickeln wir einen verallgemeinerten Konvexitätsbegriff von B. Fuchssteiner und das hauptsächliche Resultat ist die Charakterisierung der Extremalpunkte.

1. π – Konvexen

Es seien :X eine nicht leere Menge, $\pi(A)$ die Menge aller endlichen Untermengen von A, wobei $A \subseteq X$, und $P(A)$ die Potenzmenge von A.

1.1. Definition. Eine Funktion $\delta^* : \pi(X) \to P(X)$ mit den Eigenschaften :
i) $A \subseteq \delta^*(A)$ für alle $A \in \pi(X)$ und
ii) aus $B \in \pi(\delta^*(A)$ folgt dann $\delta^*(B) \subseteq \delta^*(A)$
heißt π – Konvexe (auf der Menge X).

Wir bemerken, daß jede π – Konvexe eine isotone Funktion ist, nämlich aus $A \subseteq B$, A, $B \in \pi(X)$, folgt $\delta^*(A) \subseteq \delta^*(B)$.

1.2. Beispiele von π – Konvexen.
i) Die Funktionen δ^*_ε, $\delta^*_\mu : \pi(X) \to P(X)$ mit $\delta^*_\varepsilon(A) = A$ für alle $A \in \pi(X)$ und $\delta^*_\mu(A) = X$ für alle nichtleere $A \in \pi(X)$ sind π – Konvexen und für beliebige π – Konvexe δ^* auf X gilt es $\delta^*_\varepsilon(A) \subseteq \delta^*(A) \subseteq \delta^*_\mu(A)$ für alle $A \in \pi(X)$. δ^*_ε ist also die minimale und δ^*_μ die maximale π – Konvexe auf $X (\delta^*_\varepsilon \leqq \delta^* \leqq \delta^*_\mu)$.
ii) Für beliebiges $x_0 \in X$ die Funktion $\delta^*_{x_0} : \pi(X) \to P(X)$ mit $\delta^*_{x_0}(A) = AU\ \{x_0\}$ ist offenbar eine π – Konvexe auf X.

Es seien x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ und $A \subseteq X$ mit x_1, $x_2 \notin A$. Dann hat man $\delta^*_{x_1}(A) \cap \delta^*_{x_2}(A) = A = \delta^*_\varepsilon(A) = \delta^*_{x_i}(A)$, $i = 1, 2$, nämlich die Ordnung auf der Menge der π – Konvexen, die im Beispiel i) erwähnt wurde, ist eine teilweise Ordnung.

1.3. Satz. *Für jede π – Konvexe δ^* auf eine Menge X gelten die Darstellungen*:
i) $\delta^*(A) = \bigcup\limits_{B \in \pi(A)} \delta^*(B)$ *und* ii) $\delta^*(A) = \bigcup\limits_{B \in \pi(\delta^*(A))} \delta^*(B)$.

Beweis. i) Aus der Isotonie von δ^* folgt $\bigcup\limits_{B \in \pi(A)} \delta^*(B) \subseteq \delta^*(A)$ und da $A \in \pi(A)$ ist $\delta^*(A) \subseteq \bigcup\limits_{B \in \pi(A)} \delta^*(B)$.

ii) Aus der Beziehung $A \subseteq \delta^*(A)$ folgt $A \in \pi(\delta^*(A))$ und dadurch hat man $\delta^*(A) \subseteq \bigcup_{B \in \pi(\delta^*(A))} \delta^*(B)$. Andererseits für alle $B \in \pi(\delta^*(A))$ gilt es $\delta^*(B) \subseteq \delta^*(A)$, also ist $\bigcup_{B \in \pi(\delta^*(A))} \delta^*(B) \subseteq \delta^*(A)$.

Wenn X eine endliche Menge ist, dann gilt offenbar $(\delta^*)^2 = \delta^*$ und das für jede π – Konvexe δ^*. Das gleiche ist aber richtig, wo möglich, für jede π – Konvexe δ^* auf beliebige Menge X. Wirklich:

1.4. Korollar. *Es gilt* $\delta^*(\delta^*(A)) = \delta^*(A)$ *für alle* $A \in \pi(X)$ *mit* $\delta^*(A) \in \pi(X)$.

Beweis. Die Behauptung ist offenbar, da aus i) oder ii) des obigen Satzes hat man $\delta^*(A) \subseteq \delta^*(\delta^*(A)) = \bigcup_{B \in \pi(\delta^*(A))} \delta^*(B) \subseteq \delta^*(A)$.

2. Konvexen

Mit der Hilfe der erwähnten Darstellungen von $\delta^*(A)$ hat man eine Fortsetzung von δ^* auf ganz $P(X)$.

2.1 Definition. Es sei $\delta^* : \pi(X) \to P(X)$ eine π – Konvexe. Die Funktion $\delta : P(X) \to P(X)$ mit $\delta(A) = \bigcup_{B \in \pi(A)} \delta^*(B)$ heisse dann Konvexe auf X.

Es ist klar, daß $\delta(A) = \delta^*(A)$ für alle $A \in \pi(X)$ ist.

2.2. Satz. *Jede Konvexe* δ *auf* X *hat folgende Eigenschaften:*

i) $A \subseteq \delta(A)$ *für alle* $A \in P(X)$.

ii) δ *ist eine isotone Funktion.*

iii) *Es gilt* $\delta^2 = \delta$ *und* $\delta(A) = \bigcup_{H \in \pi(\delta(A))} \delta(H)$.

iv) $B \subseteq \delta(A)$ *dann und nur dann, wenn* $\delta(B) \subseteq \delta(A)$.

Beweis. i) $A = \bigcup_{B \in \pi(A)} B \subseteq \bigcup_{B \in \pi(A)} \delta^*(B) = \delta(A)$.

ii) $A \subseteq B \subseteq X$ folgt $\pi(A) \subseteq \pi(B)$, also gilt $\delta(A) = \bigcup_{H \in \pi(A)} \delta^*(H) \subseteq \bigcup_{M \in \pi(B)} \delta^*(M) = \delta(B)$.

iii) Von i) folgt $A \subseteq \delta(A)$ für alle $A \subseteq X$, also gilt $\delta(A) \subseteq \delta(\delta(A))$.

Wenn aber $H \in \pi(\delta(A))$ ist, dann gibt es $B_i \in \pi(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so daß $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \delta(B_i)$.

Natürlich gilt $B_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \pi(A)$ für alle $j = 1, 2, \ldots, n$. Wodurch hat man $\delta(B_j) \subseteq \delta(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$, oder $H \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \delta(B_j) \subseteq \delta(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$. Das bedeutet, daß für alle $H \in \pi(\delta(A))$ eine Menge $M = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in \pi(A)$ existiert so, daß $H \subseteq \delta(M)$ oder $\delta(H) \subseteq \delta(M)$. Nun man hat $\delta(\delta(A)) = \bigcup_{H \in \pi(\delta(A))} \delta(H) \subseteq \bigcup_{M \in \pi(A)} \delta(M) = \delta(A)$, nämlich $\delta^2 = \delta$ und $\delta(A) = \bigcup_{H \in \pi(\delta(A))} \delta(H)$.

iv) Sie folgt unmittelbar aus i) und ii).

2.3. Bemerkungen. Es seien δ_ε und δ_μ die Fortsetzungen von den δ_ε^* und δ_μ^* entsprechend. δ_ε heiße die minimale Konvexe und δ_μ die maximale Konvexe auf X. Es ist klar, daß eine Konvexe δ auf X ist die minimale dann und nur dann, wenn $\delta(A)=A$ für alle $A\subseteq X$, entspechend ist sie die maximale dann und nur dann, wenn $\delta(A)=X$ für alle $A\subseteq X$, während für beliebige Konvexe δ auf X gilt $\delta_\varepsilon\leqq\delta\leqq\delta_\mu$.

Schlüßlich, wenn $x_1, x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, $A\subseteq X$ mit $x_i\notin A$, $i=1, 2$ und δ_{x_i} mit $\delta_{x_i}|_{\pi(X)}=\delta^*_{x_i}$, $i=1, 2$ sind, dann gilt $\delta_{x_1}(A)\cap\delta_{x_2}(A)=A\neq\delta_{x_i}(A)$, $i=1, 2$ und demgemäß ist die Menge der Konvexen auf X teilweise geordnet.

2.4. Definition. Eine Menge $A\subseteq X$ wird als $\delta-$konvex (oder einfach konvex, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist) bezeichnet, falls $\delta(A)=A$ ist.

Damit hat man die Charakterisierungen: Eine Konvexe δ ist die minimale dann und nur dann, wenn jede Menge $A\subseteq X$ konvex ist, bzw. ist sie die maximale dann und nur dann, wenn die einzigen konvexen Mengen die $\emptyset$ und X sind.

2.5. Satz. *Jede Konvexe δ auf X hat die Eigenschaften:* i) *Der Durchschnitt von konvexen Mengen ist konvex und ii) es gilt:* $\delta(A)=\bigcup\limits_{B\subseteq\delta(A)}\delta(B)$.

Beweis. i) Es seien: $(A_i)_{i\in I}$, $A_i\subseteq X$ mit $\delta(A_i)=A_i$ und $B\in\pi(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)$. Dann gilt $\delta(B)\subseteq\delta(A_i)$ für alle $i\in I$, oder $\delta(B)\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}\delta(A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}A_i\subseteq\delta(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{H\in\pi(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)}\delta(H)$, d. h. $\delta(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)$ $=\bigcap\limits_{i\in I}A_i$.

ii) Vor allen hat man $\bigcup\limits_{B\subseteq\delta(A)}\delta(B)\subseteq\delta(A)$. Für die umgekehrte Beziehung hat man aus iii) des 2.2. Satzes die Beziehungen $\delta(A)=\bigcup\limits_{H\in\pi(\delta(A))}\delta(H)\subseteq\bigcup\limits_{B\subseteq\delta(A)}\delta(B)\subseteq\delta(A)$, also gilt $\delta(A)=\bigcup\limits_{B\subseteq\delta(A)}\delta(B)$.

2.6. Satz. *Wenn $\mathscr{A}\subseteq P(X)$ eine linear geordnete bezüglich $\subseteq$ Menge ist, dann für jede Konvexe δ auf X gilt* $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}\delta(A)=\delta(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A)$ ([1]).

Beweis. Für alle $A\in\mathscr{A}$ gilt $\delta(A)\subseteq\delta(\bigcup\limits_{B\in\mathscr{A}}B)$, folglich gilt $\bigcup\delta(A)\subseteq\delta(\bigcup A)$. Für die umgekehrte Beziehung hat man: Für jede Menge $B\in\pi(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A)$ existieren $A_i\in\mathscr{A}$, $i=1, 2,\ldots,n$, so daß $B\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. Von der Linearität der Ordnung ist $A_B=\max\{A_i:i=1, 2,\ldots,n\}\in\mathscr{A}$. Also gilt:

$\delta(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A)=\bigcup\limits_{B\in\pi(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A)}\delta(B)\subseteq\bigcup\limits_{B\in\pi(\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}A)}\delta(A_B)\subseteq\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}}\delta(A)$. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Direkte Folgerung des Satzes ist, daß die Vereinigung von konvexen Mengen einer linear geordneten Familie ist wieder konvex.

3. Extremalpunkte

3.1. Definition. Ein Element $a \in A$, $A \subseteq X$, ist als Extremalpunkt von A zu bezeichnen, wenn für alle $B \in \pi(A)$ mit $a \in \delta(B)$ gilt $a \in B$.

Mit $E_\delta(A)$ wird die Menge aller Extremalpunkte von A bezüglich δ bezeichnet. Es gilt definitionsgemäß $E_\delta(A) \subseteq A$ und $a \in E_\delta(A)$ dann und nur dann, wenn für jede Menge $B \in \pi(A)$ mit $a \notin B$ folgt, daß $a \notin \delta(B)$.

3.2. Satz. *Für alle Mengen $A \subseteq X$ gilt es $E_\delta(\delta(A)) \subseteq E_\delta(A)$* ([1]).

B e w e i s. Es sei $a \in E_\delta(\delta(A))$, also $a \in \delta(A) = \bigcup_{D \in \pi(A)} \delta(D)$. Daraus folgt die Existenz einer Menge $D \in \pi(A) \subseteq \pi(\delta(A))$ mit $a \in \delta(D)$. Folglich, da $a \in E_\delta(\delta(A))$, ist $a \in D \subseteq A$; d. h. $a \in A$. Es sei nun eine Menge $B \in \pi(A) \subseteq \pi(\delta(A))$ mit $a \in \delta(B)$. Dann soll $a \in B$, denn $B \in \pi(\delta(A))$ und $a \in E_\delta(\delta(A))$, d. h. $a \in E_\delta(A)$, was unsere Behauptung war.

Natürlich im Falle eines Vektorraumes X und für $\delta(A)$ die gewöhnliche konvexe Hülle gilt $E_\delta(\delta(A)) = E_\delta(A)$). Aber in unserem Konvexitätsbegriff δ im allgemeinen Fall gilt die Gleichheit nicht, wie die nächsten Beispiele zeigen:

i) Es seien: $X = \mathrm{R}^2, \delta_b^* : \pi(X) \to P(X)$ mit $\delta_b^*(\{(x_i, y_i) \in \mathrm{R}^2 : i = 1, 2, \ldots, n\}) = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : m \leqq y \leqq M,\ x \in \mathrm{R}\}$, wobei $m = \min\{y_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, $M = \max\{y_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Offensichtlich ist δ_b^* eine $\pi -$ Konvexe und sei δ_b die von δ_b^* entsprechende Konvexe auf X. Es ist leicht zu bestätigen, daß $E_{\delta_b}(\delta_b(A)) = \emptyset$ ist für alle $A \subseteq X$, während z. B. für $A = \{(x, y)\}$ man hat $E_{\delta_b}(A) = \{(x, y)\} \neq \emptyset$.

Wir unterstreichen, daß im Bezug auf dieser Konvexe die einpunktigen Mengen sind nicht konvex.

ii) Es seien: $X = \mathrm{R}^2$, $\delta_r^* : \pi(X) \to P(X)$ mit $\delta_r^*(\{(x_i, y_i) \in \mathrm{R}^2 : i = 1, 2, \ldots, n\}) = S_m \cap S_M \cap K_1 \cap K_2$, wobei $S_m = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 \geqq m^2\}$, $S_M = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq M^2\}$, $K_1 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x \geqq m_1,\ y \in \mathrm{R}\}$, $K_2 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x \in \mathrm{R}, y \geqq m_2\}$, $m = \min\{(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} : i = 1, 2, \ldots, n\}$, $M = \max\{(x_i^2 + y_i^2)^{1/2} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ $m_1 = \min\{x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ und $m_2 = \min\{y_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Es ist leicht festzustellen, daß δ_r^* eine $\pi -$ Konvexe ist und δ_r sei die von δ_r^* entsprechende Konvexe auf X. Vor allem ist jede einpunktige Menge in diesem Fall konvex. Nun für $x, y \in \mathrm{R}$ mit $0 < x < y$ und $A = \{(x, x), (y, y)\} \in \mathrm{R}^2$ hat man $E_{\delta_r}(\delta_r(A)) = \{(x, x)\}$ und $E_{\delta_r}(A) = A$, d. h. $E_{\delta_r}(\delta_r(A)) \neq E_{\delta_r}(A)$.

3.3. Satz. *Es sei δ eine Konvexe auf X. Dann gilt es:*

i) $E_\delta(A) = A$ *für alle $A \subseteq X$ dann und nur dann, wenn $\delta = \delta_s$.*

ii) $E_\delta(A) = \emptyset$ *für alle $A \subseteq X$ dann und nur dann, wenn $\delta = \delta_\mu$.*

B e w e i s. Die erste Behauptung ist fast offenbar. Für die zweite Behauptung es seien δ eine Konvexe mit $E_\delta(B) = \emptyset$ für alle $B \subseteq X$ und eine nicht leere Menge $A \subseteq X$. Für jedes $a \in A$ gibt es dann ein $B_a \in \pi(A)$ mit $a \notin B_a$, während $a \in \delta(B_a)$; d. h. $\delta(A) = X$ oder $\delta = \delta_\mu$. Denn aus der Annahme $\delta(A) \neq X$ gäbe es ein $x \in X$ mit $x \notin \delta(A) = \bigcup_{D \in \pi(A)} \delta(D)$, also $x \notin \delta(D)$ für alle $D \in \pi(A)$, folglich $x \notin \delta(B_a)$ desto mehr $x \notin B_a$. Wir bemerken nun, daß für jede $B \in \pi(\{x\} \cup B_a)$ mit $x \notin B$ gilt $B \in \pi(B_a) \subseteq \pi(A)$, also $x \notin \delta(B)$, nämlich $x \in E_\delta(\{x\} \cup B_a)$; d. h. $E_\delta(\{x\} \cup B_a) \neq \emptyset$; Widerspruch!

Umgekehrt es seien $:\delta=\delta_\mu$, eine nichtleere Menge $A\subseteq X$, ein $a\in A$ und ein $B\in\pi(A)$ mit $a\notin B$. Dann gilt $a\in X=\delta(B)$; d. h. $E_\delta(A)=\emptyset$.

3.4. Satz. *Es seien $:\delta$ eine Konvexe auf X, eine Menge $A\subseteq X$ und ein $a\in A$. Dann gilt $:a\in E_\delta(A)$ dann und nur dann, wenn $a\notin\delta(A\setminus\{a\})$.*

Beweis. Es sei ein $a\in E_\delta(A)$ mit $a\in\delta(A\setminus\{a\})=\bigcup_{D\in\pi(A\setminus\{a\})}\delta(D)$. Es soll dann ein $D\in\pi(A\setminus\{a\})$ existieren mit $a\in\delta(D)$ und $a\notin D$, das eben bedeutet, daß $a\notin E_\delta(A)$, was der Annahme $a\in E_\delta(A)$ widersprücht.

Für die umgekehrte Richtung sei $a\in A$ mit $a\notin\delta(A\setminus\{a\})=\bigcup_{D\in\pi(A\setminus\{a\})}\delta(D)$, nämlich $a\notin\delta(D)$ für jedes $D\in\pi(A\setminus\{a\})$. Für jedes $D\in\pi(A)$ mit $a\notin D$ gilt $a\notin\delta(D)$, was mit $a\in E_\delta(A)$ gleichbedeutend ist.

3.5. Korollar. *Es seien δ eine Konvexe auf X, eine konvexe Menge $A\subseteq X$ und ein $a\in A$. Dann gilt $:a\in E_\delta(A)$ dann und nur dann, wenn $\delta(A\setminus\{a\})=A\setminus\{a\}$.*

Beweis. Es sei ein $a\in E_\delta(A)$. Dann ist $a\notin\delta(A\setminus\{a\})$, folglich für jedes $b\in\delta(A\setminus\{a\})$ gilt $b\neq a$ und existiert es ein $B\in\pi(A\setminus\{a\})$ mit $b\in\delta(B)\subseteq\delta(A)=A$; d. h. $b\in A\setminus\{a\}$, oder $\delta(A\setminus\{a\})=A\setminus\{a\}$.

Umgekehrt es sei ein $a\in A=\delta(A)$ mit $\delta(A\setminus\{a\})=A\setminus\{a\}$. Dann gilt $a\notin A\setminus\{a\}$ $=\delta(A\setminus\{a\})$ und folglich ist $a\in E_\delta(A)$.

4. Topologische Konvexen

Es sei $(X,\mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und für eine Menge $A\subseteq X$ es sei $\mathfrak{U}(A)$ $=\{U\in\mathfrak{T}:A\subseteq U\}$.

4.1. Definition. Eine Funktion $\delta:P(X)\to P(X)$ wird als topologische Konvexe bezeichnet, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

i) δ ist eine Konvexe auf X.

ii) Es gilt $\delta(\overline{\delta(A)})\subseteq\overline{\delta(A)}$ für alle $A\subseteq X$.

iii) Es gilt $\delta(A)\in\mathfrak{T}$ für alle $A\in\mathfrak{T}$.

4.2. Satz. *Jede topologische Konvexe δ auf $(X,\mathfrak{T})$ hat folgende Eigenschaften:*

i) Die abgeschlossene Hülle einer konvexen Menge ist eine konvexe Menge.

ii) Das Innere einer konvexen Menge ist eine konvexe Menge.

Beweis. Der ist offenbar, weil für eine Menge $B\subseteq X$ mit $\delta(B)=B$ gilt $\delta(\bar B)=\delta(\overline{\delta(B)})=\overline{\delta(B)}=\bar B$ bzw. aus $\mathring{B}\in\mathfrak{T}$ folgt $\delta(\mathring{B})\in\mathfrak{T}$, während $\mathring{B}\subseteq\delta(\mathring{B})\subseteq\delta(B)=B$ und dadurch hat man $\mathring{B}\subseteq\delta(\mathring{B})\subseteq B$; d. h. es gilt die Behauptung $\delta(\mathring{B})=\mathring{B}$.

4.3. Bemerkungen. Über die erwähnten Konvexen δ_ε, δ_μ, δ_{x_0}, δ_b, δ_r auf einem topologischen Raum $(X,\mathfrak{T})$ ist leicht festzustellen, daß: δ_ε, δ_μ sind topologische Konvexen auf $(X,\mathfrak{T})$ für beliebige Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, δ_{x_0} ist eine topologische Konvexe auf $(X,\mathfrak{T}_{x_0})$ mit $\mathfrak{T}_{x_0}=\{A\subseteq X:x_0\in A\}\cup\{\emptyset\}$, während δ_{x_0} ist keine topologische Konvexe auf $(X, \mathfrak{T}^{x_0})$ mit $\mathfrak{T}^{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \notin A\} \cup \{X\}$ und δ_b, δ_r sind topologische Konvexe auf R^2, der mit der üblichen Topologie versehen ist.

Literatur

[1] B. Fuchssteiner. Verallgeneinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman. *Math. Ann.* 186, 1970, 149–154.
[2] H. H. Schaefer. Topological vector spaces. Macmillam 1966.

Department of Mathematics
University of Athens
GREECE

Deposiert am 21.01.1992