

Provided for non-commercial research and educational use. Not for reproduction, distribution or commercial use.
--

Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic
reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or
posting to third party websites are prohibited.

For further information on Mathematica Balkanica visit the website of the journal
<http://www.mathbalkanica.info>

or contact:

Mathematica Balkanica - Editorial Office;
Acad. G. Bonchev str., Bl. 25A, 1113 Sofia, Bulgaria
Phone: +359-2-979-6311, Fax: +359-2-870-7273,
E-mail: balmat@bas.bg

Structure des Solutions Optimales d'un Problème avec un Critère Analytique

G.I. Jitomirskii[†], M.S. Radjef[‡]

Presented by P. Kenderov

We define a class of two criterion problems, for which the Pareto and Slater optimal solutions belong to the boundary of the set of decision (feasible solutions).

On met en évidence une classe de problèmes à deux critères, pour lesquels les solutions optimales de Slater et de Pareto appartiennent à la frontière de l'ensemble des décisions (solutions admissibles).

Considérons un problème à deux critères

$$(1) \quad \langle K, \{u(x, y), v(x, y)\} \rangle ,$$

où $K \in \text{Comp}(\mathbb{R}^2)$ - l'espace des sous-ensembles non vides et compacts de $\mathbb{R}^2$, les fonctions réelles $u(x, y), v(x, y)$ sont harmoniques conjuguées sur K , c'est-à-dire sur un ouvert $G \supset K$.

Comme la donnée d'une paire $\{u(x, y), v(x, y)\}$ de fonctions harmoniques conjuguées est équivalente à la donnée d'une fonction analytique

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

alors (1) peut être ainsi considéré comme un problème à un seul critère complexe:

$$(2) \quad \langle K, f(z) \rangle ,$$

où la fonction $f(z)$ est analytique sur K , K étant l'ensemble des décisions du problème (2).

Introduisons les notations pour $z' = x' + iy'$, $z'' = x'' + iy''$

$$\begin{aligned} f(z') > f(z'') &\leftrightarrow \begin{cases} u(x', y') > u(x'', y'') \\ ; \\ v(x', y') > v(x'', y'') \end{cases} \\ f(z') \geq f(z'') &\leftrightarrow \begin{cases} u(x', y') \geq u(x'', y'') \\ ; \\ v(x', y') \geq v(x'', y'') \end{cases} \\ f(z') \geq f(z'') &\leftrightarrow \begin{cases} u(x', y') \geq u(x'', y'') \\ \text{ou} \\ v(x', y') > v(x'', y'') \\ \begin{cases} u(x', y') > u(x'', y'') \\ ; \\ v(x', y') \geq v(x'', y'') \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$f(z') \not\geq f(z'')$, $f(z') \not\leq f(z'')$ et $f(z') \not\leq f(z'')$ signifient respectivement la non réalisation de $f(z') > f(z'')$, $f(z') \geq f(z'')$ et $f(z') \geq f(z'')$.

Définition 1. Une décision $z^s \in K$ et appelée [1] solution maximale de Slater pour le problème (2), si

$$(3) \quad f(z) \not\geq f(z^s), \quad \forall z \in K$$

Définition 2. Une décision $z^p \in K$ est appelée [1] solution maximale de Pareto pour le problème (2), si

$$(4) \quad f(z) \not\geq f(z^p), \quad \forall z \in K$$

D'une manière analogue, on peut définir les minimums de Slater et de Pareto.

Soient $K^s(K_s)$ -l'ensemble des décisions maximales (minimales) de Slater pour le problème (2) et $K^p(K_p)$ l'ensemble des décisions maximales (minimales) de Pareto pour le même problème. Alors, sur la base de (3) et (4)

$$(5) \quad K^p \subseteq K^s \quad (K_p \subseteq K_s).$$

De plus, nous avons les propositions suivantes [1] :

1) Les ensembles K^p et K_p sont non vides (et, par conséquent, $K^s \neq \emptyset$, $K_s \neq \emptyset$).

2) Les ensembles K^p et K_p (et donc K^s , K_s) sont extérieurement stables: pour tout $z \in K$ il existe $z^p \in K^p$ et $z_p \in K_p$ tels que $f(z^p) \geq f(z) \geq f(z_p)$.

3) Les ensembles K^s et K_s sont compacts (et, par conséquent, il en est de même pour les ensembles $f(K^s)$ et $f(K_s)$).

4) Les ensembles $K^s(K_s)$ et $K_p(K_p)$ sont intérieurement stables:

$$f(z'') \not\supseteq f(z') \quad \forall z', z'' \in K^s(K_s)$$

et

$$f(z'') \not\supseteq f(z') \quad \forall z', z'' \in K^p(K_p)$$

Les décisions maximales (minimales) de Slater et de Pareto seront appelées dorénavant solutions optimales du problème (2). Dans ce papier, on étudie la structure des solutions optimales pour le problème (2). Concrètement, on montre que les solutions optimales se trouvent sur la frontière de l'ensemble K .

Théorème 1. *Si la fonction $f(z)$, analytique sur le compact K , n'est pas identiquement égale à une constante, alors*

$$(6) \quad K^s \subseteq \text{Fr } K \quad (K_s \subseteq \text{Fr } K),$$

où $\text{Fr } K$ est la frontière topologique de K dans $\mathbb{R}^2$.

Preuve. Remarquons que pour deux nombres complexes $A = a(1 + i)$ ($a > 0$ est une constante réelle positive) et $B = b_1 + ib_2$ tels que

$$|B| < \frac{\sqrt{2}}{2}|A| = a,$$

on a l'inégalité vectorielle

$$(7) \quad A + B > 0.$$

Démontrons l'inclusion (6). Supposons le contraire : soit z^s une certaine décision maximale de Slater n'appartenant pas à la frontière de l'ensemble K . Alors z^s est un point intérieur de K et par conséquent $f(z)$ peut être représentée par une série de Taylor dans un certain voisinage $U(z^s) \subset K$

$$(8) \quad f(z) = f(z^s) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z - z^s)^n, \quad \forall z \in U(z^s),$$

où

$$A_n = \frac{f^{(n)}(z^s)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Par hypothèse $f(z)$ n'est pas identiquement égale à une constante. Par conséquent, parmi les nombres complexes A_n ($n \in \mathbb{N}$) on peut trouver, au moins, un nombre différent de zéro. Soit $n = n_0$ -le plus petit nombre tel que $A_n \neq 0$. Alors, en tenant compte de (8) on obtient

$$(9) \quad f(z) - f(z^s) = (z - z^s)^{n_0} [A_{n_0} + \varphi(z)], \quad \forall z \in U(z^s),$$

avec

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_0+k} (z - z^s)^k.$$

Comme $\varphi(z)$ est continue au point z^s et $\varphi(z^s) = 0$, alors, sans perte de généralité, on peut considérer

$$(10) \quad |\varphi(z)| < \frac{\sqrt{2}}{2} |A_{n_0}|, \quad \forall z \in U(z^s)$$

Choisissons, maintenant un point $z^* \in U(z^s)$ tel que

$$(z^* - z^s)^{n_0} A_{n_0} = a(1 + i),$$

où $a > 0$. Ceci est équivalent à exhiber un $z^* \in U(z^s)$, tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} |(z^* - z^s)^{n_0} A_{n_0}| = a$$

et $n_0 \arg(z^* - z^s) + \arg A_{n_0} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, où k est un nombre entier.

Alors, d'après (10)

$$|(z^* - z^s)^{n_0} \varphi(z^*)| < \frac{\sqrt{2}}{2} |(z^* - z^s)^{n_0} A_{n_0}| = a.$$

D'où, en utilisant (7), on obtient

$$(z^* - z^s)^{n_0} A_{n_0} + (z^* - z^s)^n \varphi(z^*) > 0,$$

avec $z^* \in U(z^s)$.

L'inégalité vectorielle ainsi obtenue est, d'après (9), équivalente à la relation $f(z^*) > f(z^s)$ pour un certain point $z^* \in U(z^s) \subset K$. Mais alors la décision z^s n'est pas une solution maximale de Slater du problème (2), ce que contredit le choix de $z^s \in K^s$.

Conséquence 1. Si la fonction $f(z)$, analytique sur le compact K , n'est pas identiquement égale à une constante, alors

$$K^p \subseteq Fr K \quad (K_p \subseteq Fr K).$$

Ces inclusions découlent directement des relations (5) et (6).

Exemple 1. Considérons le problème (2) avec un critère linéaire $f(z) = Az + B$, où $A \neq 0$ et B sont des nombres complexes.

a) Soit K - la boule unité fermée:

$$K = \{z / |z| \leq 1\}.$$

Alors

$$K^p = K^s = \{z / z = e^{i\varphi}, -\arg A \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \arg A\}$$

$$K_p = K_s = \{z / z = e^{i\varphi}, \pi - \arg A \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi - \arg A\}.$$

b) Soit K - un carré unité fermé :

$$K = \{z = x + iy / x, y \in [-1, 1]\}.$$

Posons l'angle $\varphi = \arg A$. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1 + iy / y \in [-1, 1]\}, & K_2 &= \{x - i / x \in [-1, 1]\}, \\ K_3 &= \{-1 + iy / y \in [-1, 1]\}, & K_4 &= \{x + i / x \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

Selon les notations adoptées, nous aurons

$$K^p = \begin{cases} \{(1, 1)\} & , \text{ si } \varphi = 0; \\ K_1 & , \text{ si } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ \{(1, -1)\} & , \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ K_2 & , \text{ si } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi; \\ \{(-1, -1)\} & , \text{ si } \varphi = \pi; \\ K_3 & , \text{ si } \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\ \{(-1, 1)\} & , \text{ si } \varphi = \frac{3\pi}{2}; \\ K_4 & , \text{ si } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi; \end{cases} \quad K^s = \begin{cases} K_4 \cup K_1 & , \text{ si } \varphi = 0; \\ K_1 & , \text{ si } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ K_1 \cup K_2 & , \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ K_2 & , \text{ si } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi; \\ K_2 \cup K_3 & , \text{ si } \varphi = \pi; \\ K_3 & , \text{ si } \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\ K_3 \cup K_4 & , \text{ si } \varphi = \frac{3\pi}{2}; \\ K_4 & , \text{ si } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

$$K_p = \begin{cases} \{(-1, -1)\} & , \text{ si } \varphi = 0; \\ K_3 & , \text{ si } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ \{(-1, 1)\} & , \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ K_4 & , \text{ si } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi; \\ \{(1, 1)\} & , \text{ si } \varphi = \pi; \\ K_1 & , \text{ si } \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\ \{(-1, -1)\} & , \text{ si } \varphi = \frac{3\pi}{2}; \\ K_2 & , \text{ si } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi; \end{cases} \quad K_s = \begin{cases} K_2 \cup K_3 & , \text{ si } \varphi = 0; \\ K_3 & , \text{ si } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ K_3 \cup K_4 & , \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ K_4 & , \text{ si } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi; \\ K_4 \cup K_1 & , \text{ si } \varphi = \pi; \\ K_1 & , \text{ si } \pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}; \\ K_1 \cup K_2 & , \text{ si } \varphi = \frac{3\pi}{2}; \\ K_2 & , \text{ si } \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Exemple 2. Etudions le problème (2) avec un critère défini par une fonction puissance

$$f(z) = z^n, \text{ où } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Soit $K = \{z / |z| \leq 1\}$.

Alors

$$K^p = K^s = \bigcup_{j=0}^{n-1} L_j,$$

où

$$L_j = \{ z = e^{i\varphi} / \varphi \in [\frac{2\pi}{n}j, \frac{2\pi}{n}j + \frac{\pi}{2n}] \},$$

$$K_p = K_s = \bigcup_{j=0}^{n-1} l_j,$$

où

$$l_j = \{ z = e^{i\varphi} / \varphi \in [\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}j, \frac{3\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}j] \}, j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Remarque. Dans ce papier, les propriétés des fonctions analytiques ont été utilisées pour la première fois dans l'étude des problèmes multicritères. Dans le cas des problèmes à deux critères (1), il a été possible de déterminer la structure des solutions optimales de Pareto et de Slater. On a montré que ces solutions optimales se trouvent sur la frontière de l'ensemble des décisions. Autrement dit les valeurs de Pareto et de Slater des critères ne se réalisent qu'aux points frontières de K . En utilisant une démarche analogue les auteurs s'attelleront à étudier les structures des points-selle et de maximin vectoriels [2].

Remerciements. Les auteurs remercient le Professeur V. I. Zhukovski pour ses suggestions et ses remarques sur le présent travail.

References

- [1] V. V. Podinovskii, V. D. Noguïn. Les solutions optimales de Pareto dans les problèmes multi-critères. *M. Nauka*, 1982. (en russe).
- [2] V. I. Zhukovski, V. S. Molostvov. L'optimization multi-critère des systèmes avec des conditions d'information incomplètes. *Institut International de Recherche sur les problèmes de Commande. M.* 1990. (en russe).

†Institut Pédagogique
Orekhovo-Zouevskii C. E. I.
Orekhovo-Zouevo
ROSSIA

Received 21.04.1992

‡L. A. M. O. S.
Centre Universitaire de Béjaia
Route Targua Ouzemour
Béjaia 06000
ALGERIE