Mathematica Balkanica

Mathematical Society of South-Eastern Europe
A quarterly published by
the Bulgarian Academy of Sciences – National Committee for Mathematics

Mathematica Balkanica

New Series Vol.10, 1996, Fasc.4

Mèthode des itérations applique aux équations du type I.N. Vécua de l'orde supérieur aux coèficients analytiques

Dragan Dimitrovski†, *Miloje Rajović*††, *Rade Stojiljković*†††

Presented by P. Kenderov

Sans difficultés principielles, on peut élargir le mèthode des séries aréolaires, le mèthode de la suptitution analytique, et les mèthodes des itérations- les approximations successives, aux équations du type Vécua de l'orde supérieur. Dans quelques cas on donne les solutions éfectives et explicites jusqu'à une approximation arbitraire, au cas des coèficients analytiques.

On propose deux mèthodes de l'intégration de l'équation de Vécua: 1. les séries aréolaries, 2. les itérations vau cas des équations de Vécua d'orde supérieur, avec une vivtesse de la convergence et une appréciation facile du reste.

1.L'équation de I.N. Vécua

$$\frac{\partial W}{\partial z} = AW + B\bar{W} + F \tag{1}$$

$W = U(x,y) + iV(x,y)$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $z \in G$ - une région fermée et finie au plan des complèxes, Γ - frontière de G, les coèficients $A(z,\bar{z})$, $B(z,\bar{z})$, $F(z,\bar{z})$ sont les fonctions analytiques par rapport aux variables z, $\bar{z}$, habituelement est résolue:

1°. d'un méthode des séries aréolaries [1]

$$A = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} z^i \bar{z}^j,\ B = \sum_{0}^{\infty} b_{ij} z^i \bar{z}^j,\ F = \sum_{0}^{\infty} f_{ij} z^i \bar{z}^j, \tag{2}$$

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} z^i \bar{z}^j \tag{3}$$

anisi qu'on obtient la solution dans la forme d'une série dépendente des coèficients et d'élement d'éntigration arbitriare $\Phi(z)$ - une fonction analytique arbitraire, dans un role de la "constane" d'intégration

$$\begin{aligned}
W(z,\bar{z}) &= \Phi(z) + \textstyle\int A\Phi d\bar{z} + \int Ad\bar{z} \int A\Phi d\bar{z} + \int Ad\bar{z}\int Ad\bar{z}\int A\Phi d\bar{z} + \dots \\
&\textstyle\int B\bar{\Phi}dz + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}\bar{\Phi}d\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int \bar{B}\Phi dz + \dots \\
&+ \textstyle\int Ad\bar{z}\int B\bar{\Phi}d\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{A}\bar{\Phi}dz + \int Ad\bar{z}\int Adz\int B\Phi d\bar{z} + \\
&+ \textstyle\int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int \bar{A}\bar{\Phi}d\bar{z} + \dots \\
&+ \textstyle\int Fd\bar{z} + \int Ad\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{F}dz + \\
&+ \textstyle\int Ad\bar{z}\int AAd\bar{z}\int Fd\bar{z} + \int Bd\bar{z}\int \bar{B}dz\int Fd\bar{z} + \dots
\end{aligned} \tag{4}$$

La série converge dans la région G où les coèficients A, B, F sont analytiques par rapport à z, $\bar{z}$.

2° ou d'un mèthode des équations intègrales de Vécua [2], [3], par les itérations, avec quoi on obtient une représentation de la solution

$$W(z,\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\int\int_G \frac{A(\zeta)W(\zeta) + B(\zeta)\bar{W}(j)}{\zeta - Z} d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\int\int_G \frac{F(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z} + \Psi(z) \tag{5}$$

ou, das le cas $F = 0$

$$W = \Phi(z)e^{w(z)}, \quad \Phi - \text{ analytique par rapport} \tag{6}$$

avec

$$w(z) = \frac{1}{\pi}\int\int_G \left(A(\zeta) + B(\zeta)\frac{\overline{W(\zeta)}}{W(\zeta)} \right) \frac{d\xi du}{\zeta - z}, \quad (\zeta = \xi + i\eta \in G) \tag{7}$$

Ici noius posons le problème suivant: est-ce que les procédés semblables auront lieu dans le cas des équations du type Vécua d'ordre supérieure? Au commencement, indiquons que l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + A(z)W = 0$$

présente une équation aréolaire simple de second ordre,qui est analogue à une équation différentielle ordinaire $y" + \lambda y = 0$ aux coèficients constants.

L'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + A(z)W = 0$$

présente quelque certaine des équations réelles de Hill, Lamé et Mathié. Toutes les deux équations ci -dessus ne sont pas les équations Vécua.

Première véritable équations, qu'on pouvrait appeler une équation Vécua de l'ordre supérieure, est comme ci

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + A(z, \bar{z}) \cdot \bar{W} = 0 \tag{8}$$

car elle contient la conjugaison de la fonction inconnue.

$$W = \rho e^{i\varphi},\ \bar{W} = \rho e^{-i\varphi} = \rho e^{i\varphi} \cdot e^{-2i\varphi} = W \cdot e^{-2i\varphi} =$$

$$= W \cdot e^{-2iarctg v/u} = W \cdot e^{-2iarctg \frac{W-\bar{W}}{i(W+\bar{W})}}$$

on peut conclure que l'équation (8) n'est pas linéaire, mais trancendente, parce que l'opération $\bar{W}$ est de telle nature, c'est à dire la rotation de l'argument, tandis que le modul reste le même. C'est pourquoi il arrive ici une diférence considérable parmis les équations aréolares, qui sont les analogies du type de Vécua, qui sont une chose spécifique.

Si l'on marque avec $\hat{\int}$ opération inverse de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, on a comme l'on le connait

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}\right) = -A\bar{W}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = -\hat{\int} A\bar{W} = -\int A\bar{W} d\bar{z} + \Phi_2(z)$$

Si l'on introduit l' opérateur

$$\hat{T}W = \Phi_2(z) - \int A\bar{W} d\bar{z} \tag{9}$$

on demontre faciliment qi'il présente un opérateur de la contraction au cas de coèficient $A(z, \bar{z})$ arbitraire. On a ensuite

$$\begin{aligned} W &= \hat{\int}\left[-\hat{\int} A\bar{W}\right] = \hat{\int}\left[\Phi_2 - \int A\bar{W} d\bar{z}\right] \\ &= \Phi_1(z) + \int \Phi_2(z) d\bar{z} - \int\left(\int A\bar{W} d\bar{z}\right) d\bar{z} \end{aligned} \tag{10}$$

Il est facile de vérifier:

Théorème *L'opérateur*

$$T^2W = \Phi_1 + \Phi_2\bar{z} - \int\int A(z,\bar{z})\bar{W}d\bar{z}^2 \tag{11}$$

est un opérateur de la contraction pour chaque élection analytique de Φ_1, Φ_2, A. *En remplacant* W *avec (1) dans (11), on peut définir la suite* T^1W, T^2W, $T^3W, \dots T^nW$, *et demontrer que* T^nW *est un opérateur de la contraction, suivant les procédés traditionelles de l'Analyse. Suivant le théorème de Cauchy, l'équation analytique possède une solution analytique aussi, et comme le deuxième membre dans* T^nW *est continu, il suit qu'il vaut pour (8) le mèthode des itérations. En posant* $W_1 = T^2W$, *on aura*

$$W_2 = \Phi_1 + \Phi_2\bar{z} - \int\int A\left[\overline{\Phi_1 + \Phi_2\bar{z} - \int\int A\bar{W}d\bar{z}^2}\right]d\bar{z}^2 =$$

$$= \Phi_1 + \Phi_2 - \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z} - \int\int A\bar{\Phi}_2 z d\bar{z}^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}W\bar{z}^2$$

où le dernier membré jout le role du reste. Son appréciation est de l'orde

$$|R_2| \leq |A^2| \cdot |W| \cdot |z|^5/5!$$

On a dans la continué

$$W_3 = \Phi_1 + \Phi_2\bar{z} - \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 - \int\int A\bar{\Phi}_2 d\bar{z}^2 +$$

$$+ \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_1 dz^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_2\bar{z}dz^2$$

$$- \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}dz^2 \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 - \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}dz^2 \int\int A\Phi_2 z d\bar{z}^2$$

$$+ R_3$$

où le reste est donné avec

$$R_4 =$$

$$\int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}dz^2 \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{A}W(z,\bar{z})dz^2.$$

Un pas plus loin, on obtient la quatrième approximation de la solution

(12)

$$
\begin{aligned}
W_4 \; &\approx W(z,\bar{z}) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\bar{z} - \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 - \int\int A\bar{\Phi}_2 z d\bar{z}^2 \\
&+ \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_1 dz^2 + \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_2 \bar{z} dz^2 - \\
&- \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} d\bar{z}^2 \int\int A\Phi_1 d\bar{z}^2 - \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A\Phi_2 z d\bar{z}^2 + \\
&+ \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_1 dz^2 + \\
&+ \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_2 \bar{z} dz^2 \\
&- \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 \\
&- \int\int A dz^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A\bar{\Phi}_2 z d\bar{z}^2 \\
&+ \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_1 d\bar{z}^2 \\
&+ \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A}\Phi_2 \bar{z} dz^2 \\
&- \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} d\bar{z}^2 \int\int A\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 \\
&- \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \\
&\times \int\int A\Phi_2 dz d\bar{z}^2 + R_4
\end{aligned}
$$

Le résidu ayant la forme

$$
\begin{aligned}
R_4 \; &= \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \\
\times \quad & \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} dz^2 \int\int A d\bar{z}^2 \int\int \bar{A} W(z,\bar{z}) dz^2
\end{aligned}
$$

qui permet une appreéciation facile. On peut être content par la seconde, troisième, ou éventuellement la quatrieme approximation.

Les conséquences. Les définitions et les introductions des nouvelles fonctions spéciales.

I. Fonction exponentielle conjuguée. L'équation de Vécua

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + \Lambda \cdot \bar{W} = 0$$

definit une nouvelle fonction exponentielle z_l, comme l'on l'a demontré dans [1]. Un essai d'introduction de la p-fonction exponentielle est faite chez Položii [4]. où l'on emploi le symbole ${}^pe^z$.

Une exponentielle semblable nous définisson avec l'èquation

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + A(z)\bar{W} = 0$$

où $A(z)$ est une fonction analytique par rapport à z. On la marquera par

$${}_A^{\bar{z}}l^z$$

tandis que l'équation $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z,\bar{z})\bar{W} = 0$ définit les autres classes des fonctions.

II. Le cosinus et le sinus aréolaire conjuiguées. Si dans (8) on prend $A(z,\bar{z}) = 1$, l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + \Lambda \cdot \bar{W} = 0$$

introduit naturellement un $\sin_A \bar{z}$ et un $\cos_A \bar{z}$. Prendnt $\Phi_1 \equiv 1$ et $\Phi_2 \equiv 0$ on a suivant la définition

$$\cos_A \bar{z} \overset{=}{\text{def}} 1 - \frac{\bar{z}^2}{2!} + \frac{\bar{z}^2}{2!}\frac{z^2}{2!} - \frac{\bar{z}^6}{6!} + \frac{\bar{z}^4}{4!}\frac{z^4}{4!} - \dots$$

Par l'analogie, prenant $\Phi_1 \equiv 0$, $\Phi_2 \equiv 1$ on a suivant la définition

$$\sin_A \bar{z} \overset{=}{\text{def}} \bar{z} - z\frac{\bar{z}^2}{2!} + \frac{z^2}{2!}\frac{z^3}{3!} - \frac{z^3}{3!}\frac{\bar{z}^4}{4!} + \dots$$

III. Les fonction hyperboliques conjuiguées. Avec une élection $A(z,\bar{z}) = 1$, $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = 0$ on a

$$ch_A\bar{z} \overset{=}{\text{def}} 1 + \frac{\bar{z}^2}{2!} + \frac{\bar{z}^2}{2!}\frac{z^2}{2!} - \frac{\bar{z}^6}{6!}\dots$$

et ensuite en prenant $A(z,\bar{z}) = 1$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 1$

$$sh_A\bar{z} \overset{=}{\text{def}} \bar{z} + z\frac{z^3}{3!} + \frac{z^2}{2!}\frac{\bar{z}^3}{3!} + \frac{z^2}{2!}\frac{\bar{z}^3}{3!} + \dots$$

d'où l'on peut prende par définition quelque analogie de la formule de Euler

$${}_A^{\bar{z}}e = ch_A\bar{z} - sh_A\bar{z}$$

Les fonctions conjuiguées de Bessel, fonctions cylindriques et les autres.

En prenant $A(z, \bar{z}) = \bar{z}$, au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + \bar{z} \cdot \bar{W} = 0$$

et de sa solutin prise dans (12) on peut introduitre les variantes des fonctions de Bessel. C'est la même chose dans le cas $A(z, \bar{z}) = z$, A juissant maintenant le role d'une constante par rapport à l'operation $\partial \bar{z}$ et $\int d\bar{z}$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + z \cdot \bar{W} = 0\,.$$

ainsi que l'on aura les fonctions de Bessel et les fonctions associées des classes diverses au sens de la catégorie de la trancendence.

On peut faire la même chrose au cas d'un coèficient plus général "constant" $A(z)$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + A(z)\bar{W} = 0$$

ainsi que l'on obtient une nouvelle trginomètrie complèxe.

Dans ce sens, l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} + B(\bar{z})A(z)\bar{W} = 0$$

est une généralisation de quelques fonctions conjuiguées de Hill, Lamé et Mathieu, dépendentes de deux variables complèxes z et $\bar{z}$.

Par ce procédure on peut élargir considérablement les espaces des fonctions transcendentes élémentaires dans le plan des complèxes.

L'équation de Vécua du II-ième ordre aux coèficients analytiques.

Considerons l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{z}^2} = A(z, \bar{z})W + B(z, \bar{z})\bar{W} + F(z, \bar{z})$$

au coèficients analytiques

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} z^i \bar{z}^J, \; C = \sum_{i,j} b_{ij} z^i \bar{z}^J, \; F = \sum_{i,j} f_{ij} z^i \bar{z}^J$$

Au moyen du mèthode des séries aréolaires

$$W(z, \bar{z}) = \sum_{i,j} c_{i,j} z^i \bar{z}^j$$

ou avec un mèthode de la supstitution analytique (en réalité l'itération) on peut obtenir facilement les approximations de la solution analytique. A partir de

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \int (AW + B\bar{W} + F)d\bar{z} + \Phi_1(z)$$

on a la première intègrale

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \int (AW + B\bar{W} + F)$$

et aussi la seconde

$$W = \int\int AW + B\bar{W} + F)d\bar{z}^2 + \Phi_1(z)\bar{z} + \Phi_2(z)$$

d'où par les itérations on a la solution

$$\begin{aligned} W(z,\bar{z}) &= \Phi_2 + \int\int A\Phi_2 d\bar{z}^2 + \int\int B\bar{\Phi}_2 d\bar{z}^2 \\ &+ \int\int Ad\bar{z}^2 + \int\int \Phi_2 d\bar{z}^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int B\bar{\Phi}_2 d\bar{z}^2 + \\ &+ \int\int Bd\bar{z}^2 + \int\int \bar{A}\bar{\Phi}_2 dz^2 + \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int \bar{B}\Phi_2 dz^2 \\ &+ \Phi_1\bar{z} + \int\int \bar{z}A\Phi_1 d\bar{z}^2 + \int\int zB\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 + \\ &+ \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int \bar{z}A\Phi_1 d\bar{z}^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int zB\bar{\Phi}_1 d\bar{z}^2 + \\ &+ \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int z\bar{A}\Phi_1 dz^2 + \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int B\Phi_1 \bar{z} dz^2 \\ &+ \int\int Fd\bar{z}^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int Fd\bar{z}^2 + \int\int Vd\bar{z}^2 \int\int \bar{F}dz^2 \\ &+ \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int Fd\bar{z}^2 + \int\int Ad\bar{z}^2 \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int \bar{F}dz^2 \\ &+ \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int \bar{A}dz^2 \int\int \bar{F}dz^2 + \int\int Bd\bar{z}^2 \int\int \bar{B}dz^2 \int\int Fd\bar{z}^2 + R_2 \end{aligned}$$

où le résidu R_2 possède la mème forme que R_4 pour la solution (12).

Les possibilités. Sans difficultés on peut élargrir ce méthode à une équation arbitraire linéaire (c'est à dire pséudo-linéaire) du type Vécua de n-ième orde avec la conjuigaison de la fonction $\bar{W}$

$$F\left(z, \bar{z}, W(z,\bar{z})\overline{W(z,\bar{z})}, \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}, ..., \frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n}\right) = 0$$

aux coèficients analytiques. Les conséquence sont les solutions générales dans la forme des séries des coèficients, des classe

Litterature

1. B. Ilievski. Certaines solutions analytiques d'une classe des équations Vécua. *Bulletin Mathèmatique de la SMI de la République Macédoine*, **14(XL)**, 1990, Skopie, 79-86.

2. I.N. Vecua. Obobshtenie analyticheskie funkcii. *Nauka*, Moskva, 1988.

3. I.N. Vecua. Sistemi diferencialnih uravnenii elipticheskovo tipa i granichnie zadachi s primeneniam v teorii obolochek. *Mattem. Sbornik*, **31 (73)**, 1951, Moskva, 217-314.

4. G.N. Polozii. P-anal. i $(p,2)$-anal. f-cii. Kiev, 1969.

†*L'Institut de Mathématique,*
Faculté des sciences,
Skopie,
Rèpublique Macédoine, b.p. 162

††*L'Institut de Mathématique,*
Kraljevo,
Rep. Yugoslavia

†††*École Pédagogique supérieure,*
Gnjilane
Serbie,
Yougoslavie

Recu à 13.04.1994