ВЪРХУ НЯКОИ ТОЧНИ НЕРАВЕНСТВА ЗА ДИОФАНТОВИТЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИТЕ ФОРМИ

Н. Обрешков

Да разгледаме линейната форма

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_k x_k - y$$

на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$, в която числата ω_p са произволни реални числа. Ако $t > 1$ е произволно реално число, то по една теорема на Дирихле съществуват цели числа $x'_p, p = 1, 2, \ldots, k$, не всички равни на нула, и цяло число y', които удовлетворяват неравенствата

$$|\omega_1 x'_1 + \ldots + \omega_k x'_k - y'| < \frac{1}{t^k},$$

$$|x'_p| < t, \quad p = 1, 2, \ldots, k.$$

Тази теорема уточних в по-раншна работа в следния смисъл; Нека n е произволно цяло положително число. Тогава съществуват цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, и цяло число y, за които имаме

$$|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_k x_k - y| < \frac{1}{(n+1)^k},$$

$$|x_p| < n, \quad p = 1, 2, \ldots, k.$$

Тук знакът на равенство се достига, и то за определени форми които посочих.

От друга страна съществува друга теорема на Дирихле, при която ограниченията за числата $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се отнасят и за числото y. Въпросната теорема гласи: Нека $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са реални числа, които по абсолютна стойност не надминават едно число a. Нека n е произволно положително цяло число. Тогава съществуват цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, за които имаме

$$(1) \qquad |a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k| < \frac{ak \cdot 2^{k-1}}{n^{k-1}},$$

$$|x_p| \leq n, \quad p = 1, 2, \ldots, k.$$

В една работа от 1903 г. Борел установява друга теорема в това направление, която гласи: Нека α и β са реални числа и N е произволно реално число >1. Тогава съществуват цели числа x, y и z, не всички равни на нула, за които имаме

$$\alpha x+\beta y+z<\theta\frac{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}{N^2},$$

$$x<N,\ |y|<N,\ |z|\leq N.$$

Тук θ е константа, независима от α, β и N, на която Борел не успява да даде най-добрата (минимална) стойност.

В една работа [2] установих следната точна теорема: Нека $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са произволни реални числа и n е произволно естествено число. Тогава съществуват цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, за които имаме

$$(2)\qquad |a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k|<\frac{n}{(n+1)^k-1}(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|),$$

$$|x_p|<n,\ p=1,2,\ldots,k.$$

Равенството се достига за определени форми, които посочих в цитираната работа.

Ако a означава най-голямото от числата $|a_1|$, $|a_2|, \ldots, |a_k|$, то от (2) получаваме

$$(3)\qquad |a_1x_1+\ldots+a_kx_k|<\frac{nka}{(n+1)^k-1}<\frac{ka}{n^{k-1}}.$$

Тази оценка е значително по-добра от оценката (1) при теоремата на Дирихле. Така отношението на дясната част в (3) към тази на (1) е равно на $\frac{1}{2^{k-1}}$.

В настоящата работа давам едно разширение на предишната ми теорема и разрешавам напълно открития досега въпрос за най-добрата стойност на константата θ на Борел, който въпрос е посочен и в съчинението по история на теория на числата от Диксон. Именно установявам, че тази най-добра стойност на θ е равна точно на единица.

Една теорема за линейните форми

I. Нека $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ са произволни $k+1$ реални числа и $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k$ са произволни естествени числа. Тогава съществуват $k+1$ цели числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, които удовлетворяват условията

$$|x_i|<n_i,\ i=0,1,2\ldots,k,$$

$$(1)\qquad |\omega_0x_0+\omega_1x_1+\ldots+\omega_kx_k|<\frac{n_0|\omega_0|+n_1|\omega_1|+\ldots+n_k|\omega_k|}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)-1}.$$

Знак на равенство в (1) имаме само тогава когато формата

$$f=\omega_0x_0+\omega_1x_1+\ldots+\omega_kx_k$$

е равна на формата

$$(1')\quad M\left[\frac{x_\alpha}{n_\alpha+1}\pm\frac{x_\beta}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)}\pm\frac{x_\gamma}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)(n_\gamma+1)}\pm\cdots\right].$$

Ще отбележим, че когато анулираме някой от коефициентите на формата f, ще имаме (1) със знака на неравенство. Например, ако $\omega_0=0$, достатъчно е да положим $x_0=1$, $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$. Следователно ще предполагаме по-нататък, че числата $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$ се отличават от нула. Понеже числата $x_0, x_1, \ldots, x_k$ могат да бъдат положителни и отрицателни, можем да се ограничим на форми от вида

$$\delta_1x_1+\delta_2x_2+\ldots+\delta_kx_k-x_0,$$

където числата $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ са положителни. Разглеждаме една мрежа K от точки M в пространството с $(k+1)$ измерения, на които правоъгълните координати са $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, като променливото x_s, $(s=0, 1, \ldots, k)$ взема стойностите $0, 1, 2, \ldots, n_s$. През всяка такава точка $x_0^{(s)}, x_1^{(s)}, \ldots, x_k^{(s)}$, където

$$s=0, 1, 2, \ldots, m, \quad m=(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)-1,$$

прекарваме хиперравнина с уравнение

$$x_0-x_0^{(s)}=\delta_1(x_1-x_1^{(s)})+\delta_2(x_2-x_2^{(s)})+\ldots+\delta_k(x_k-x_k^{(s)}).$$

Лесно се вижда, че хиперравнините

$$(2)\quad \begin{aligned} x_0&=\delta_1(x_1-n_1)+\delta_2(x_2-n_2)+\ldots+\delta_k(x_k-n_k),\\ x_0-n_0&=\delta_1x_1+\delta_2x_2+\ldots+\delta_kx_k \end{aligned}$$

са крайни и останалите хиперравнини се съдържат между тях. Разстоянието между двете хиперравнини (2) е равно на

$$d=\frac{n_0+n_1\delta_1+n_2\delta_2+\ldots+n_k\delta_k}{\sqrt{1+\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots+\delta_k^2}}$$

Ако $d_1, d_2, \ldots, d_m$ означават разстоянията между съседните хиперравнини, ще имаме

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=d,$$

откъдето следва, че ще има поне едно число d_p по-малко от $\frac{d}{m}$ или всичките числа $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ще са равни помежду си. Ако означим в първия случай с $x_0', x_1', \ldots, x_k'$ и $x_0'', x_1'', \ldots, x_k''$ точките, през които минават хиперравнините, на които разстоянието е равно на d_p, ще имаме

$$\left|x_0' - x_0'' - \delta_1(x_1' - x_1'') - \delta_2(x_2' - x_2'') - \ldots - \delta_k(x_k' - x_k'')\right|$$

$$< \frac{n_0 + n_1\delta_1 + n_2\delta_2 + \ldots + n_k\delta_k}{m}, \quad |x_i' - x_i''| \leq n_i, i = 0, 1, 2, \ldots, k$$

и (1) ще бъде удовлетворено със знака на неравенство. Във втория случай хиперравнините трябва да отсичат върху оста x_0 равни отсечки, което е еквивалентно, както лесно се вижда, на условието числата i дефинирани с равенството

$$x_0 - \delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 - \ldots - \delta_k x_k = -n_1\delta_1 - n_2\delta_2 - \ldots - n_k\delta_k + hi, \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{m}(n_0 + n_1\delta_1 + n_2\delta_2 + \ldots + n_k\delta_k), \tag{4}$$

да вземат за стойности числата от редицата

$$0, 1, 2, \ldots, m,$$

когато променливите $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ вземат съответно стойностите $0, 1, 2, \ldots, n_s$, $s = 0, 1, \ldots, k$. Ако въведем променливите

$$y_0 = x_0, \; y_i = n_i - x_i, \; 1 \leq i \leq k,$$

равенството (3) добива формата

$$\delta_0 y_0 + \delta_1 y_1 + \ldots + \delta_k y_k = hi, \tag{5}$$

като за общност сме въвели коефициента $\delta_0 = 1$. Тук променливите y_p, $p = 0, 1, \ldots, k$ вземат стойностите $0, 1, 2, \ldots, n_p$, $p = 0, 1, \ldots, k$. Нека ω е примитивен корен на уравнението

$$x^{m+1} = 1,$$

например

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{m+1}}.$$

Равенството

$$\sum_{\nu=0}^{m} \omega^\nu = 0$$

се преобразува лесно в равенството

$$\left[\omega^{\frac{\delta_0}{h}(n_0+1)} - 1\right]\left[\omega^{\frac{\delta_1}{h}(n_1+1)} - 1\right] \ldots \left[\omega^{\frac{\delta_k}{h}(n_k+1)} - 1\right] = 0.$$

Поне един от множителите вляво трябва да бъде равен на нула. Нека

$$\omega^{\frac{\delta_a}{h}(n_a+1)} - 1 = 0.$$

Ще имаме следователно

$$\frac{\delta_a}{h}(n_a+1)=K(m+1),$$

където K е цяло положително число. Оттук получаваме

$$h=\frac{\delta_a(n_a+1)}{K(m+1)}. \tag{6}$$

Със заместване в (5) ще имаме

$$\frac{n_0\delta_0}{\delta_a}+\ldots+\frac{\delta_{a-1}}{\delta_a}n_{a-1}+n_a+\ldots+\frac{\delta_k}{\delta_a}n_k=\frac{1}{K}\cdot\frac{m}{m+1}(n_a+1). \tag{7}$$

Понеже

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{n_a+1}{n_a}<2,$$

от (7) следва, че $K=1$ и това равенство приема формата

$$n_0\delta_0+\ldots+n_{a-1}\delta_{a-1}+n_{a+1}\delta_{a+1}+\ldots+n_k\delta_k=\frac{m_1}{m_1+1}\delta_a, \tag{8}$$

където m_1 означава числото

$$m_1=\frac{m+1}{n_a+1}-1.$$

За числото h от (6) ще имаме

$$h=\frac{\delta_a(n_a+1)}{m+1}=\frac{\delta_a}{m_1+1} \tag{9}$$

От равенството (5) със заместване на едно от числата y_0, $y_1,\ldots,y_k$ с единица и другите с нула получаваме

$$\delta_0=ht_0,\ldots,\ \delta_{a-1}=ht_{a-1},\ \delta_{a+1}=ht_{a+1},\ldots,\ \delta_k=ht_k, \tag{10}$$

като числата $t_0,\ldots,t_{a-1},t_{a+1},\ldots,t_k$ са цели. Като заместим получените стойности на числата $\delta_a,\ldots,\delta_{a-1},\delta_{a+1},\ldots,\delta_k$ в равенството (5), ще имаме

$$t_0y_0+\ldots+t_{a-1}y_{a-1}+(m_1+1)y_a+t_{a+1}y_{a+1}+\ldots+t_ky_k=i.$$

Съгласно условието, когато променливите y_p, $p=0,1,\ldots,k$ вземат съответно стойностите $0,1,2,\ldots,n_p$, $p=1,2,\ldots,k$, трябва горната линейна форма да взема стойностите $0,1,2,\ldots,m$. Ако на y_a даваме стойности $1,2,\ldots,n_a$, а на останалите променливи y_p всичките им възможни стойности, очевидно числата i са m_1+1 и броят им е $m-m_1$, т. е. стойностите на формата

$$t_0y_0+\ldots+t_{a-1}y_{a-1}+t_{a+1}y_{a+1}+\ldots+t_ky_k=i' \tag{11}$$

ще са числата от 0 до $\frac{m+1}{n_a+1}-1=m_1$, когато променливите $y_0,\ldots,$

$y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1}, \ldots, y_k$ вземат съответните си стойности. Нека тогава ω_1 е примитивен корен на уравнението

$$x^{m_1+1}=1.$$

Понеже $\sum_{\nu=0}^{m_1}\omega_1^{\nu}=0$, ще имаме

$$(12)\qquad \begin{aligned}&[\omega_1^{t_0(n_0+1)}-1]\ldots[\omega_1^{t_{\alpha-1}(n_{\alpha-1}+1)}-1]\,[\omega_1^{t_{\alpha+1}(n_{\alpha+1}+1)}-1]\\&\ldots[\omega_1^{t_k(n_k+1)}-1]=0.\end{aligned}$$

Поне един от множителите в лявата част на (11) трябва да е равен на нула. Нека например да имаме

$$\omega_1^{t_\beta(n_\beta+1)}-1=0.$$

Оттук следва, че

$$(13)\qquad t_\beta(n_\beta+1)=K'(m_1+1),$$

като K' е цяло число. От друга страна, като вземем предвид равенствата (10), равенството (8) става

$$(14)\qquad n_0t_0+\ldots+n_{\alpha-1}t_{\alpha-1}+n_{\alpha+1}t_{\alpha+1}+\ldots+n_kt_k=m_1.$$

Оттук и от (13) следва, че

$$K'<\frac{m_1}{m_1+1}\cdot\frac{n_\beta+1}{n_\beta},$$

откъдето получаваме, че $K'=1$, т. е.

$$(15)\qquad t_\beta=\frac{m_1+1}{n_\beta+1}=m_2+1,$$

като m_2 означава числото

$$\begin{aligned}m_2=\frac{m+1}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)}-1=(n_0+1)\ldots(n_{\alpha-1}+1)(n_{\alpha+1}+1)\\\ldots(n_{\beta-1}+1)\,(n_{\beta+1}+1)\ldots(n_k+1)-1.\end{aligned}$$

С просто пресмятане получаваме от (14) равенството

$$\begin{aligned}n_0t_0+\ldots+n_{\alpha-1}t_{\alpha-1}+n_{\alpha+1}t_{\alpha+1}+\ldots+n_{\beta-1}t_{\beta-1}\\+n_{\beta+1}t_{\beta+1}+\ldots+n_kt_k=m_1-n_\beta(m_2+1)=m_2.\end{aligned}$$

Равенството (11) приема формата

$$\begin{aligned}t_0y_0+\ldots+t_{\alpha-1}y_{\alpha-1}+t_{\alpha+1}y_{\alpha+1}+\ldots+t_{\beta-1}y_{\beta-1}+y_\beta(m_2+1)\\+t_{\beta+1}y_{\beta+1}+\ldots+t_ky_k=i'.\end{aligned}$$

Като се ограничим на стойности на $y_\beta\geq 1$, то, както преди се вижда, че формата

$$t_0 y_0 + \ldots + t_{\alpha-1} y_{\alpha-1} + t_{\alpha+1} y_{\alpha+1} + \ldots + t_{\beta-1} y_{\beta-1}$$
$$+ t_{\beta+1} y_{\beta+1} + \ldots + t_k y_k = t''$$

ще трябва да взема стойностите от 0 до m_2, когато променливите $y_0, \ldots, y_{\beta-1}, y_{\beta+1}, \ldots, y_k$ вземат съответните си стойности. Както постъпихме досега, виждаме, че за някое число t_γ ще трябва да имаме

$$t_\gamma = \frac{m_2+1}{n_\gamma+1} = \frac{m+1}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)(n_\gamma+1)}. \tag{16}$$

Продължаваме така, докато изчерпим всичките числа t_ν. За последното t_σ ще се получи, че числата $t_\sigma y_\sigma$, когато y_σ взема за стойности числата 0, 1, 2,..., n_σ, ще трябва да бъдат същите числа от 0 до n_σ, т. е. t_σ трябва да бъде равно на 1. От равенствата (10), (15), (16) се убеждаваме тогава, че действително числата $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ ще трябва да имат формата, показана в теоремата I.

Обратно, нека формата $\sum_0^k \omega_i x_i$ да е от вида (1'). Ще покажем, че в (1) ще имаме знак на равенство. Можем без ограничение да разгледаме само формата

$$f = \frac{x_0}{n_0+1} + \frac{x_1}{(n_0+1)(n_1+1)} + \quad + \frac{x_k}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)},$$

където променливото x_p взема стойностите $0, 1, 2, \ldots, n_p$, $0 \leq p < k$, като се изключва системата $x_0 = x_1 = \quad = x_k = 0$. Дясната част на неравенството (1) в случая е равна на

$$\frac{\frac{n_0}{n_0+1} + \frac{n_1}{(n_0+1)(n_1+1)} + \ldots + \frac{n_k}{(n_0+1)\ldots(n_k+1)}}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)-1}$$
$$= \frac{1}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)}.$$

От друга страна не е трудно да се види, че при въпросните значения на променливите минимумът на абсолютната стойност на формата

$$\varphi = (n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1) f$$
$$= (n_1+1)\ldots(n_k+1)\, x_0 + (n_2+1)\ldots(n_k+1)\, x_1 + \ldots + x_k$$

е равен на единица. Действително формата φ не може да вземе стойност, равна на нула. Наистина, ако допуснем, че за някои значения на променливите φ е равна на нула, то от равенството

$$(n_1+1)\ldots(n_k+1)\, x_0 + (n_2+1)\ldots(n_k+1)\, x_1$$
$$+ \ldots + (n_k+1)\, x_{k-1} + x_k = 0 \tag{17}$$

следва, че x_k се дели на n_k+1, т. е. $x_k = 0$. Но тогава, като премахнем множителя n_k+1 в (17), от полученото равенство следва

аналогично, че и $x_{k-1}=0$ и т. н. От друга страна лесно се проверява, че формата φ взема стойност 1 при

$$x_0=1,\ x_1=-n_1,\ x_2=-n_2,\ldots,\ x_k=-n_k.$$

Определяне на константата на Борел

Както споменах, Борел е установил в 1903 г. следната теорема: Нека α и β са произволни реални числа и $N\geqq 1$ е произволно число. Тогава съществуват три цели числа, не всички равни на нула, за които имаме

$$(1)\qquad |\alpha x+\beta y+z|<\frac{\theta}{N^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2},$$

$$(2)\qquad |x|\leqq N,\quad |y|\leqq N,\quad |z|\leqq N.$$

Тук θ е константа, независима от числата α, β и N. Стойността на θ не е известна. В една работа установих точна теорема в тази посока, която за три променливи се свежда на следното твърдение: Нека α и β са произволни реални числа и n е цяло положително число. Тогава съществуват три цели числа x, y и z, не всички равни на нула, за които имаме

$$(3)\qquad |\alpha x+\beta y+z|\leqq\frac{1+|\alpha|+|\beta|}{(n+1)^2+n+2}.$$

Като вземем под внимание неравенството на Коши-Буняковски (поточно частен случай от него), получаваме от (3) неравенството

$$|\alpha x+\beta y+z|<\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}{(n+1)^2}$$

От това се вижда, че за θ ще имаме неравенството $\theta<\sqrt{3}$. Ще покажем сега, че $\theta\geqq 1$. Да разгледаме линейната форма

$$f=(n+1)^2x+(n+1)y+z,$$

като на x, y и z даваме значения $0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm n$, n цяло положително число, като x, y и z не са едновременно равни на нула. Лесно се вижда, че f не се анулира при тези стойности на променливите. Наистина, ако $f=0$, от равенството

$$(n+1)^2x+(n+1)y+z=0$$

следва, че z се дели на $n+1$, т. е. $z=0$. Но тогава ще имаме

$$(n+1)x+y=0$$

и оттук следва, че $y=0$ и следователно и $x=0$. При $x=1, y=z=-n$ формата f приема стойността

$$f=(n+1)^2-(n+1)n-n=1.$$

Съгласно (1) трябва да имаме

$$1<\theta\,\frac{\sqrt{(n+1)^4+(n+1)^2+1}}{n^2}.$$

Като поставим тук n да расте неограничено, получаваме $\theta\geqq 1$. С това установихме за θ следните неравенства:

$$1\leqq\theta<\sqrt{3}.$$

Сега ще установим, че константата θ е равна на единица, с което разрешаваме открития въпрос за стойността на тази константа.

Ако поне едно от числата α и β е нула, неравенството (1) е очевидно ($\theta>0$). Следователно можем да предполагаме, че числата α и β са различни от нула и с промяна на знака на някое от променливите при нужда можем в разглежданията да се ограничим на положителни α и β.

I. Да предположим, че

$$\alpha+\beta\leqq 1+\frac{1}{N+1}. \tag{4}$$

Според една прецизна форма на теоремата на Дирихле, която ние получихме, съществуват две цели числа x_0, y_0, които не са едновременно равни на нула, за които имаме

$$\alpha x_0+\beta y_0+z_0<\frac{1}{(n+1)^2},\quad n=[N], \tag{5}$$

$$x_0<n,\quad |y_0<n.$$

Тук z_0 е подходящо цяло число. За това число z_0 имаме от (4) и (5)

$$|z_0|<\alpha|x_0|+\beta|y_0|+\frac{1}{(n+1)^2}\leqq(\alpha+\beta)n+\frac{1}{(n+1)^2}\leqq$$

$$<n+\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}=n+\frac{1}{(n+1)^2}[(n+1)^2-1]<n+1,$$

т. е. $|z_0|<n$. Очевидно ще имаме

$$|\alpha x_0+\beta y_0+z_0|<\frac{1}{N^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}.$$

II. Нека сега

$$\alpha+\beta>1+\frac{1}{N+1},\quad \alpha\leqq 1,\quad \beta\leqq 1.$$

По една теорема на Малер [5] съществуват три цели числа x_0, y_0 и z_0, за които имаме

$$|\alpha x_0+\beta y_0+z_0|\leqq\frac{4}{3}\,\frac{1}{N^2},$$

$$|x_0|\leqq N,\quad |y_0|\leqq N,\quad |z_0|\leqq N,\quad |x_0|+|y_0|+|z_0|>0.$$

Да означим с D областта, заградена от окръжността

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{7}{9}$$

и правата

$$\alpha+\beta=1+\frac{1}{N+1}.$$

Ако точката (α, β) е извън D, ще имаме

$$\frac{4}{3}<\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$$

и неравенството (1) ще бъде в сила с константата $\theta=1$.

Можем да предположим, че $\beta \neq \alpha$. Действително, ако $\beta=\alpha$, достатъчно е да положим $x=1$, $y=-1$, $z=0$. Нека β е по-голямото от двете числа. Очевидно ще трябва да разгледаме случая, когато $\beta>1$. Да поставим $\beta=\frac{1}{\sigma}$, $\frac{\alpha}{\beta}=\omega$. Следователно $0<\sigma<1$, $0<\omega<1$. Ако точката (σ, ω) лежи вън от D, съществуват три цели числа, не всички равни на нула, за които имаме

$$|\sigma z_0+\omega x_0+y_0|<\frac{1}{N^2}\sqrt{1+\sigma^2+\omega^2}, \tag{7}$$

$$|x_0|\leq N, \quad |y_0|\leq N, \quad |z_0|\leq N.$$

От (7) получаваме

$$|\alpha x_0+\beta y_0+z_0|<\frac{1}{N^2}\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$$

и неравенството (1) е установено с $\theta=1$. Остава да се разгледа случаят, когато точката (σ, ω) лежи в D, т. е. имаме

$$\sigma+\omega>1+\frac{1}{N+1},$$

$$\sigma^2+\omega^2\leq\frac{7}{9}.$$

За α и β ще имаме съответните неравенства

$$1+\alpha>\beta\left(1+\frac{1}{N+1}\right) \tag{8}$$

$$1+\alpha^2\leq\frac{7}{9}\beta^2.$$

На първото неравенство (8) може да се даде следната форма:

$$1+\alpha>\beta+\frac{1+\alpha}{N+2}.$$

Нека N е произволно положително число и t е реално число. Да означим с K куба в пространството, на който върховете имат ортогоналните координати $\pm N$, $\pm N$, $\pm N$, и с L_t равнината с уравнение

$$\alpha x+\beta y+z=t,$$

като α и β са произволни положителни числа. С просто пресмятане виждаме, че тази равнина пресича ръбовете на куба K в точките

$$M_1\left(\frac{N\beta-N+t}{\alpha},\ -N,\ N\right),\quad M_2\left(-N,\ \frac{N\alpha-N+t}{\beta},\ N\right),$$

$$M_3(-N,\ N,\ N\alpha-N\beta+t),\qquad M_4\left(\frac{N+t-N\beta}{\alpha},\ N,-N\right),$$

$$M_5\left(N,\ \frac{N+t-N\alpha}{\beta},\ -N\right),\quad M_6(N,\ -N,\ N\beta-N\alpha+t).$$

Ако числата α, β, N, t удовлетворяват неравенствата

$$\alpha+1>\beta+\frac{t}{N}, \tag{9}$$

$$\alpha+\beta>1+\frac{t}{N}, \tag{10}$$

лесно се убеждаваме, че фигурата $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ е шестоъгълник с успоредни срещулежащи страни. Нека сега пресечем куба с равнината

$$\alpha x+\beta y+z=-t.$$

Неравенствата (9) и (10) остават в сила, когато сменим t с $-t$. Тогава съответният шестоъгълник $M_1'M_2'M_3'M_4'M_5'M_6'$ ще се дава с върховете си

$$M_1'\left(\frac{N\beta-N-t}{\alpha},\ -N,\ N\right),\quad M_2'\left(-N,\ \frac{N\alpha-N-t}{\alpha},\ N\right),$$

$$M_3'(-N,\ N,\ N\alpha-N\beta-t),\qquad M_4'\left(\frac{N-t-N\beta}{\alpha},\ N,\ -N\right),$$

$$M_5'\left(N,\ \frac{N-t-N\alpha}{\beta},\ -N\right),\quad M_6'(N,\ -N,\ N\beta-N\alpha-t).$$

С непосредствена проверка виждаме, че точките M_1' и M_4, M_2' и M_5, M_3' и M_6, M_4' и M_1, M_5' и M_2, M_6' и M_3 са симетрични по две спрямо началото на координатната система, т. е. двата шестоъгълника са симетрични спрямо това начало.

Да означим с S_t шестоъгълника $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Нека k е произволно положително число, като предположим, че са изпълнени неравенствата

$$\alpha+1>\beta+\frac{k}{N^3}, \tag{11}$$

(12) $$\alpha+\beta > 1+\frac{k}{N^3}.$$

От предишните разглеждания следва тогава, че тялото U, определено с неравенствата

(13) $$|\alpha x+\beta y+z| \leq \frac{k}{N^3},$$

(14) $$|x| \leq N, \quad |y| \leq N, \quad |z| \leq N,$$

представлява призма U с основи S_{-t_0}, и S_{t_0}, $t_0 = \frac{k}{N^2}$. Тази призма е симетрична спрямо началото, т. е. има център, съвпадащ с началото на координатната система.

Да означим с N_0 положително число, което удовлетворява неравенството

15) $$(1+\alpha)\frac{N_0^3}{N_0+2} > k.$$

Тогава неравенството (11) ще бъде изпълнено за всяко $N \geq N_0$ при предположение, че е изпълнено неравенството (15). Но както вече приехме, ние разглеждаме точно тези стойности на α, β и N, за които (11) е в сила. С непосредствено сравнение виждаме, че неравенството (12) се свежда на неравенството $\beta > 1$. Понеже за всяка точка от хиперболата

(16) $$\frac{7}{9}\beta^2 = \alpha^2+1$$

в първия квадрант при $\alpha > 0$ имаме $\beta > \sqrt{\frac{9}{7}} > 1$, следва верността на неравенството $\beta > 1$.

Да пресметнем сега обема V на призмата U. Проекцията на S_t върху равнината xOy има лице S'_t, равно на

$$S'_t = 4N^2 - \frac{N^2}{\alpha\beta}[(\alpha+\beta-1)^2+t^2].$$

Следователно обемът V на призмата ще бъде равен на

$$V = \int_{t_1}^{t_2} S'_t dt = 8k - \frac{2k}{\alpha\beta}(\alpha+\beta-1)^2 - \frac{2}{3\alpha\beta}\frac{k^3}{N^4}.$$

По една теорема на Минковски от геометрията на числата, ако е изпълнено неравенството

$$k - \frac{k}{4\alpha\beta}(\alpha+\beta-1)^2 - \frac{k^3}{12\alpha\beta N^4} \geq 1,$$

в U ще има поне една точка от пространствената целочислена мрежа точки, различна от началото, т. е. неравенството (13) ще има реше-

ние в цели стойности на x, y и z, не всички равни на нула, които удовлетворяват неравенствата (14). Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно число и N_1 е такова, че за $N \geq N_1$ да имаме

$$\frac{k^3}{12\alpha\beta N^4} < \varepsilon. \tag{17}$$

Да положим освен това

$$k = \frac{1+\varepsilon}{1-A},$$

като A означава израза

$$A = \frac{(\alpha+\beta-1)^2}{4\alpha\beta}$$

Да разгледаме кривата с уравнение

$$4\alpha\beta-(\alpha+\beta-1)^2=0, \tag{18}$$

като α и β са координати относно една Декартова система. Непосредствено виждаме, че тази крива е парабола, допираща се до координатните оси в точките (1, 0) и (0, 1) и лежаща в първия квадрант. Частта от правата с уравнение

$$\beta=\alpha+1,$$

лежаща в първия квадрант, лежи вътре в параболата и следователно областта D, заградена от тази права и хиперболата Γ с уравнение

$$\frac{7}{9}\beta^2=\alpha^2+1, \tag{19}$$

ще лежи вътре във въпросната парабола. Ще отбележим, че областта D съдържа областта D_N, заградена от правата $1+\alpha=\beta\left(1+\frac{1}{N+1}\right)$ и хиперболата Γ (в първия квадрант). При някои стойности на N областта D_N може да е празна съвкупност. За простота на разглежданията ще предполагаме, че точката (α, β) лежи в D. Тогава очевидно $1-A$ е положително число. Да положим

$$\lambda\beta^2=\alpha^2+1. \tag{20}$$

Да изследваме сега в кой случай ще имаме неравенството

$$k=\frac{1+\varepsilon}{1-A}<\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}. \tag{21}$$

Като поставим

$$\mu=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

това неравенство приема формата

$$4\alpha\beta-(\alpha+\beta-1)^2-4\alpha\mu>0. \tag{22}$$

Ако D_λ е областта, заградена от правата $\beta=\alpha+1$ и хиперболата (19) (в първия квадрант), лесно виждаме, че D_λ от празна расте до D, когато λ расте от $\frac{1}{2}$ до $\frac{7}{9}$. Ако изберем $1+\varepsilon$ по-малко от $\sqrt{1+\lambda^2}$, то $\mu<1$. Кривата с уравнение

$$4\alpha\beta-(\alpha+\beta-1)^2-4\alpha\mu=0$$

е парабола, лежаща в първия квадрант и минаваща през точката (0, 1), в която се допира до ординатната ос. Ще покажем, че областта D_λ лежи вътре в тази парабола, т. е. имаме неравенството (22). Да намерим допирната точка на правата $\beta=\alpha+u$ (успоредна на правата $\beta=\alpha+1$) с параболата (19). За координатите ѝ α_1 и β_1 получаваме

$$\alpha_1=\omega=\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}.\ \beta_1=\frac{\omega}{\lambda}$$

Очевидно ще трябва да установим неравенството

$$4\alpha_1\beta_1-(\alpha_1+\beta_1-1)^2-4\alpha_1\mu>0$$

за $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{7}{9}$. С прости преобразувания това неравенство се свежда на неравенството

$$2\mu<1+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}},$$

което със заместването $\frac{1}{\lambda}=u$ става

$$2(1+\varepsilon)<\sqrt{2+\frac{1}{u^2}\left(1+u-\frac{u}{2}\sqrt{u-1}\right)}=\varphi(u),$$

като за u имаме $\frac{9}{7}\leq u\leq 2$. За простота на разглежданията разширяваме този интервал до $1<u\leq 2$. За $\varphi'(u)$ получаваме

$$\varphi'(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\left(u-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2}\frac{3u^2-2u+1}{\sqrt{u-1}}\right).$$

Да разгледаме функциите

$$g(u)=u-\frac{1}{u^2},\qquad h(u)=\frac{1}{2}\frac{3u^2-2u+1}{\sqrt{u-1}}$$

Функцията $g(u)$ расте от нула до $2-\frac{1}{4}$ при растенето на u от 1 до 2. Уравнението $h'(u)=0$ се свежда на

$$9u^2-14u+3=0,$$

на което коренът, който лежи в интервала (1, 2), е равен на

$$u_1=\frac{7+\sqrt{22}}{9}.$$

Функцията $h(u)$ ще има минимум в $(1, 2)$, равен на $h(u_1)$. Но имаме

$$h(u_1) > 2.$$

Действително това неравенство се свежда на неравенството

$$4u_1^2 > 9(u_1 - 1),$$

което очевидно е удовлетворено, понеже $u_1 < 1{\cdot}3$. Следователно $\varphi'(u) < 0$ за $1 < u \leqq 2$, т. е. функцията $\varphi(u)$ е намаляваща. Минимумът ѝ ще е равен на $\varphi(2) = \sqrt{5}$ и следователно за ε ще имаме неравенството

$$1 + \varepsilon < \sqrt{\frac{5}{4}}.$$

За $\varepsilon = \frac{1}{9}$ това неравенство се удовлетворява.

Ще трябва да намерим максималната стойност на функцията

$$T = \frac{(\alpha+\beta-1)^2}{4\alpha\beta}$$

в областта D_N, заградена от хиперболата $\frac{7}{9}\beta^2 \quad \alpha^2 + 1$ и правата $\beta = m(\alpha+1)$, $m = \frac{N+1}{N+2}$, в първия квадрант. За пресечените точки на предните криви получаваме

$$\alpha_{1,2} = \frac{7m^2 \mp 3\sqrt{14m^2 - 9}}{7m^2}.$$

Следователно, за да съществува областта D_N, ще трябва за m да имаме

$$m > \sqrt{\frac{9}{14}}, \qquad N + 1 \geqq \frac{1}{\sqrt{\frac{14}{9}} - 1}$$

Едно пресмятане ни показва, че

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{14}{9}} - 1} = 4{\cdot}0452.$$

Следователно, ако N е по-малко от $3{\cdot}0452$, не ще е нужно да разглеждаме предните допълнителни области. Предполагаме значи, че $N > 3{\cdot}045$. За да намерим максимума на функцията T в D_N, пресичаме тази област с правите

$$\beta = m(\alpha + u), \quad u < 1.$$

За пресечните точки $A_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $A_2(\alpha_2, \beta_2)$ на тези прави и хиперболата получаваме

$$\alpha_{1,2} = \frac{7m^2u \mp \sqrt{63m^2(u^2+1) - 81}}{9 - 7m^2}.$$

Очевидно при фиксирано m ще трябва да имаме

$$u \geq \sqrt{\frac{9}{7m^2}-1}=u_0.$$

При фиксирано u получаваме с диференциране спрямо α

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\alpha}=\frac{\alpha[2+(1-m)u]+u(1-mu)}{\alpha\beta(\alpha+\beta-1)},$$

откъдето се вижда, че за разглежданите стойности на α и β производната е положителна и следователно функцията T е растяща. По отсечката A_1A_2 T ще приема максимална стойност за точката $A_2(\alpha_2, \beta_2)$. Да означим тази стойност с $f(u)$, т. е. ще имаме

$$f(u)=\frac{(\alpha_2+\beta_2-1)^2}{4\alpha_2\beta_2},$$

$$\alpha_2=\frac{7m^2+3\sqrt{14m^2-9}}{9-7m^2},\quad \beta_2=m(\alpha_2+u).$$

Ще трябва да намерим максимума на $f(u)$, когато u варира между u_0 и 1. С диференциране спрямо u получаваме

$$(23)\qquad f'(u)=\frac{d\alpha_2}{du}\cdot\frac{\alpha_2[2+u(1-m)]+u(1-mu)}{\alpha_2(\alpha_2+u)(\alpha_2+\beta_2-1)}+\frac{1+\beta_2-\alpha_2}{(\alpha_2+u)(\alpha_2+\beta_2-1)}.$$

Тук очевидно $\frac{d\alpha_2}{du}>0$ и множителят на тази производна в (23) е също положителен. Другият член (23) е положителен, защото

$$1+\beta_2-\alpha_2>0$$

(правата $\beta=\alpha-1$ не пресича хиперболата (19). Следователно $f(u)$ приема максималната си стойност M за $u=1$. Така получаваме, че максималната стойност M на функцията T в областта D_N е равна на

$$M=\frac{(\alpha+\beta-1)^2}{4\alpha\beta},\quad \alpha=\frac{7m^2+3\sqrt{14m^2-9}}{9-7m^2},\quad \beta=m(\alpha+1).$$

За простота вместо областта D_N да разгледаме областта D, заградена от хиперболата и правата $\beta=\alpha+1$. Очевидно D съдържа D_N. При това свойствата на производните в D_N остават в сила и за D и следователно максималната стойност M' на функцията T в D ще бъде равна на

$$M'=\frac{(\alpha+\beta-1)^2}{4\alpha\beta},\quad \alpha=\frac{7+\sqrt{45}}{2},\quad \beta=\alpha+1,\quad M'=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7+\sqrt{45}}{9+\sqrt{45}}.$$

Очевидно $\frac{1}{1-M'}<7{\cdot}9$. Ще трябва да изследваме сега за кои стойности на N неравенството

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{1-M'}\right)^3 < 12\varepsilon\alpha\beta N^4$$

ще бъде изпълнено. Ако α' е абсцисата на по-близката до ординатната ос пресечна точка на правата $\beta=\alpha+1$ с хиперболата $\frac{7}{9}\beta^2=\alpha^2+1$, за нея получаваме

$$\alpha^2-7\alpha+1=0.$$

откъдето се вижда, че $\alpha'>\frac{1}{7}$. Очевидно за β имаме $\beta>1$. Както видяхме, за ε можем да приемем $\varepsilon=\frac{1}{9}$. Следователно (17) ще бъде изпълнено, ако е в сила неравенството

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3(7\cdot 9)^3<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}\cdot 12N^4.$$

С пресмятане намираме, че това неравенство е сигурно изпълнено за

$$N\geqq 7\cdot 72.$$

При това при съответното k веднага се вижда, че неравенството (15) е изпълнено за $N_0=7$.

Нека сега $N\leqq 7\cdot 72$. Понеже при растенето на N, т. е. на m, областта D_N се разширява, като включва в себе си областите, отговарящи на по-малко m, то можем да се ограничим на стойности на N, равни на 7·72. Но тогава за α и β намираме стойностите

$$\alpha=3\cdot 01528,\quad \beta=3\cdot 6022$$

и след това за максимума M получаваме

$$M=0\cdot 7263<0\cdot 73.$$

Неравенството (17) се свежда на следното:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3\left(\frac{100}{27}\right)^3<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{7}\cdot 12\,N^4$$

и с пресмятане на N намираме

$$N\geqq 4\cdot 374.$$

Неравенството (15) за $N_0=3$ също се удовлетворява.

Нека $N\leqq 4\cdot 4$, т. е. приемаме $N=4\cdot 4$. Намираме

$$\alpha=1\cdot 976,\quad \beta=2\cdot 512,\quad M=0\cdot 6131<0\cdot 62$$

и неравенството (15) се свежда на

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3\left(\frac{100}{38}\right)^3<\frac{12}{63}N^4,$$

от което получаваме $N \geq 3{\cdot}385$. Неравенството (17) за $N_0 = 3$ се удовлетворява. Най-сетне нека $N \leq 3{\cdot}4$ или само $N = 3{\cdot}4$. Намираме

$$\alpha = 1{\cdot}442, \ \beta = 1{\cdot}9898, \ M = 0{\cdot}5152 < 0{\cdot}52$$

и неравенството (15) се свежда на

$$\left(\frac{10}{9}\right)^3 \left(\frac{100}{48}\right)^3 < \frac{12}{63} N^4,$$

което се удовлетворява за $N > 1{\cdot}6$. Също неравенството (17) се удовлетворява за $N_0 = 3$.

Върху някои линейни сравнения

На Туе се дължи следната теорема:

Нека a и b са цели числа и m е произволно естествено число. Тогава сравнението

$$ax + by \equiv 0 \pmod{m} \tag{1}$$

има винаги решение в цели числа x и y, не едновременно равни на нула, за които имаме

$$|x| < \sqrt{m}, \quad |y| < \sqrt{m}.$$

Доказателство на теоремата на Туе е дадено с принципа на Дирихле от Нагел [3], който изследва и въпроса за броя на решенията на (1) при m просто число. Същата теорема е обобщена от други автори [4] за повече променливи. Именно имаме теоремата:

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са произволни цели числа и m е естествено число. Тогава сравнението

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k \equiv 0 \pmod{m} \tag{2}$$

има винаги решение в цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, които удовлетворяват условията

$$|x_p| < \sqrt[k]{m}, \ p = 1, 2, \ldots, k.$$

Ще покажем, че тези теореми следват лесно от теоремите за диофантовите апроксимации на линейни форми. Именно в една по-ранна работа дадох следната прецизна форма на теоремата на Дирихле за линейните форми:

Нека $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ са произволни реални числа и n е естествено число. Тогава съществуват k цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, и цяло число y, които удовлетворяват неравенствата

$$|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_k x_k - y| \leq \frac{1}{(n+1)^k}. \tag{3}$$

При това знакът равенство се достига за определени форми, които посочих.

За да установим, че сравнението (2) има решения от разглеждания вид, да означим с n цялото число $\left[\sqrt[k]{m}\right]$. Съгласно (3) неравенството

$$\left|\frac{a_1}{m}x_1+\frac{a_2}{m}x_2+\ldots+\frac{a_k}{m}x_k-y\right|<\frac{1}{(n+1)^k} \tag{4}$$

има решение в цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, които по абсолютна стойност не надминават n, и в цяло число y. Но очевидно $\frac{1}{(n+1)^k}<\frac{1}{m}$ и като умножим (4) с m, ще получим неравенството

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k-my<1.$$

Понеже вляво числото е цяло, следва, че

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=my,$$

с което теоремата на Туе и обобщението ѝ са установени.

Следвайки същия път на доказателство, можем да установим следното по-нататъшно обобщение на теоремата на Туе:

III. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са произволни цели числа и m е естествено число. Нека $n_1, n_2, \ldots, n_k$ са произволни естествени числа, като произведението $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)$ надминава m. Тогава сравнението

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k\equiv 0 \pmod m \tag{5}$$

има решение в цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, които удовлетворяват неравенствата

$$|x_1|\leq n_1,\ |x_2|\leq n_2, \ldots,\ |x_k|\leq n_k.$$

За доказателство използуваме едно обобщение на теоремата на Дирихле, което получихме в една друга наша работа. Именно имаме теоремата:

Нека $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ са произволни реални числа и $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ са произволни естествени числа. Тогава съществуват цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, и цяло число y, за които имаме

$$|\omega_1x_1+\omega_2x_2+\ldots+\omega_kx_k-y|<\frac{1}{(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1)}, \tag{6}$$

$$|x_1|\leq n_1,\ |x_2|\leq n_2, \ldots,\ |x_k|\leq n_k.$$

Достатъчно е да приложим неравенството (6) за формата

$$\frac{a_1}{m}x_1+\frac{a_2}{m}x_2+\ldots+\frac{a_k}{m}x_k-y,$$

за да получим теоремата III.

Условията в теоремата не могат да се подобрят. Действително нека да имаме

$$(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1)\leq m.$$

Да предположим, че сравнението (5) има решение в цели числа $x_1, x_2, \dots, x_k$, удовлетворяващи условията $x_p \leq n_p$, $1 \leq p \leq k$, каквито и да са целите числа $a_1, a_2, \dots, a_k$. Тогава сравнението

$$(7)\qquad \begin{aligned} &x_1+(n_1+1)x_2+(n_1+1)(n_2+1)x_3+\dots \\ &+(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{k-1}+1)x_k \equiv 0 \pmod m \end{aligned}$$

ще има решение в цели числа $x_1, x_2, \dots, x_k$, за които имаме

$$|x_p| \leq n_p,\ p=1,2,\dots,k,\ \sum_{p=1}^{k}|x_p|>0.$$

Но тогава абсолютната стойност на лявата част в (7) не надминава числото

$$\begin{aligned} n_1+(n_1+1)n_2+(n_1+1)(n_2+1)n_3+\dots+(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{k-1}+1)n_k = \\ =(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_k+1)-1 \quad m-1, \end{aligned}$$

т. е. е по-малка от m. Следователно (7) става

$$\begin{aligned} &x_1+(n_1+1)x_2+(n_1+1)(n_2+1)x_3+\dots \\ &+(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_{k-1}+1)x_k=0. \end{aligned}$$

Оттук следва, че x_1 се дели на n_1+1, т. е. $x_1=0$. Така получаваме равенството

$$x_2+(n_2+1)x_3+\dots+(n_2+1)\dots(n_{k-1}+1)x_k=0,$$

от което аналогично следва, че $x_2=0$ и т. н. до $x_k=0$.

В същото направление можем да установим и следната теорема:

IV. Нека $a_1, a_2, \dots, a_k$ са произволни цели числа и m е естествено число. Нека $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са произволни естествени числа, на които сумата надминава числото $m-1$. Тогава сравнението

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_kx_k \equiv 0 \pmod m$$

има винаги решение в цели неотрицателни числа $x_1, x_2, \dots, x_k$, не всички равни на нула, които удовлетворяват условията

$$0 \leq x_1 \leq \lambda_1,\ 0 \leq x_2 \leq \lambda_2, \dots,\ 0 \leq x_k \leq \lambda_k.$$

При това условието $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k>m-1$ не може да се замести с по-слабото условие $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_k \leq m-1$.

В по-ранишна работа доказах следната теорема:

Нека $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ са произволни реални числа и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ са произволни естествени числа. Тогава съществуват цели неотри-

цателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не всички равни на нула, и цяло число y, за които имаме, $x_p \leq \lambda_p$, $1 \leq p \leq k$

$$|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_k x_k - y| < \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + 1}$$

Равенството при това се постига за определени форми, които посочих в моята работа [2]. За да докажем теорема IV, прилагаме теоремата за формата

$$\frac{a_1}{m} x_1 + \frac{a_2}{m} x_2 + \ldots + \frac{a_k}{m} x_k - y.$$

Съгласно въпросната теорема неравенството

$$\left|\frac{a_1}{m} x_1 + \frac{a_2}{m} x_2 + \ldots + \frac{a_k}{m} x_k - y\right| \leq \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + 1} \tag{8}$$

ще има решение в цели неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и в цяло число y, удовлетворяващи условията

$$0 \leq x_i \leq \lambda_i, \; i = 1, 2, \ldots, k, \; \sum_{i=1}^{k} x_i > 0.$$

От (8) очевидно следва сравнението

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_k x_k \equiv 0 \pmod{m}.$$

Втората част на теоремата IV следва непосредствено, като разгледаме сравнението

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \equiv 0 \pmod{m}. \tag{9}$$

Ако $x_1, x_2, \ldots, x_k$ е решение на (9) с условията

$$0 \leq x_i \leq \lambda_i, \; i = 1, 2, \ldots, k, \tag{10}$$

то, понеже $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k \leq m - 1$, лявата част на (9) не надминава $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k < m$ и следователно ще имаме равенството

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0,$$

от което и (10) следва, че $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

В цитираната работа [5] Малер установява следната теорема:

Нека a е реално число, $-1 < a < 1$ и N е реално число ≥ 1. Тогава съществуват цели числа x и y, не едновременно равни на нула, за които имаме

$$|ax + y| \leq \frac{1}{N}, \tag{11}$$

$$|x| \leq N, \; |y| < N.$$

Множителят 1 вдясно не може да се намали.

Неравенството (11) не е вярно. Никога не може да има в него знак на равенство. Точната теорема е следната:

V. Нека a е произволно реално число, но $|a|\leq 1$ и нека n е произволно естествено число. Тогава съществуват цели числа x и y, не едновременно равни на нула, за които имаме

$$|ax+y|\leq\frac{1}{n+1}, \tag{12}$$

$$|x|\leq n,\quad |y|\leq n.$$

Знакът равенство се достига само за числата $a=\pm\frac{b}{n+1}$, където b е произволно цяло положително число, взаимно просто с $n+1$ и по-малко от него.

Действително по една теорема, която установихме в предишни работи, неравенството

$$|ax+y|\leq\frac{1}{n+1} \tag{13}$$

се удовлетворява за цяло число x, удовлетворяващо условието $1\leq|x|\leq n$ и цяло подходящо число y. Но тогава от (13) имаме

$$|y|\leq|a|.|x|+\frac{1}{n+1}\leq n+\frac{1}{n+1},\quad |y|\leq n.$$

Колкото за втората част на теоремата относно знака на равенство, тя следва непосредствено от цитираната ми теорема.

В работата ми [1] установих следната теорема: Нека ω е едно произволно ирационално число и

$$\omega=a_1+\frac{1|}{|a_2}+\frac{1|}{|a_3}+\dots$$

е развитието му във верижна дроб. Тогава между всеки три последователни приближени дроби

$$\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}},\quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad \frac{P_n}{Q_n}$$

има поне една $\frac{p}{q}$, за която имаме

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\sqrt{a_n^2+4}}.$$

От тази обща теорема получавам като частни случаи теоремата на Борел и Хурвиц и други известни теореми. Съдържанието на работата ми бе изложено и в реферативните списания по математика. По-късно, в 1955 г., М. Мюлер в една работа [6] доказва същата моя теорема и извежда някои следствия, получени и от мене, без да споменава моята работа. А очевидно приоритетът на въпросната теорема принадлежи на мене.

Постъпила на 1. 4. 1956.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Обрешков. Върху апроксимацията на ирационалните числа. Годишник на Софийския университет, том XLV, 1948—1949, стр. 179—199.
2. Н. Обрешков. Върху апроксимацията на линейните форми. Известия на Математическия институт при БАН, том I, книга 2, 1954, стр. 35—44.
3. T. Nagell. Sur un théorème d'Axel Thue. Arkiv för Matematik, Bd. 1, 1951, 481—496.
4. Lars Fjellsted. Einige Sätze über lineare Kongruenzen. Arkiv för Matematik, Bd. 3, 1956, 271—275.
5. K. Mahler. On a Problem in Diophantine Approximations. Archiv der Mathematik, Bd. VI, 1955, 208—214.
6. Max Müller. Über die Approximation reeller Zahlen durch die Näherungsbrüche ihres regelmässigen Kettenbruchs. Archiv der Mathematik. Bd. VI, 1955, 253—258.

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В 1903 году Борел установил следующую теорему: Пусть α и β произвольные действительные числа и N произвольное число $\geqq 1$. Тогда существуют три целых числа x, y и z, не все равные нулю, для которых имеем

$$|\alpha x+\beta y+z|<\theta\frac{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}{N^2},$$

$$|x|\leqq N,\quad |y|\leqq N,\quad |z|\leqq N.$$

Здесь θ константа, независимая от числа α, β и N. Наилучшее значение константы θ неизвестно. Этот факт отмечен и в сочинении Диксона по истории теории чисел.

В настоящей работе устанавливаю, что это значение θ равно точно единице.

Доказываю и следующую теорему:

Пусть $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k$ произвольные действительные числа и $n_0, n_1, \ldots, n_k$ произвольные положительные целые числа. Тогда существуют $k+1$ целых числа $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, не все равные нулю, для которых имеем

$$|\omega_0 x_0+\omega_1 x_1+\ldots+\omega_k x_k|<\frac{n_0\omega_0+n_1\omega_1+\ldots+n_k\omega_k}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)-1},$$

$$|x_i|\leqq n_i,\ i=1,\ 2,\ldots,\ k.$$

Знак равенства достигается только для форм

$$M\left[\frac{x_\alpha}{n_\alpha+1}\pm\frac{x_\beta}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)}\pm\frac{x_\gamma}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)(n_\gamma+1)}\pm\cdots\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{x_\sigma}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)}\right],$$

где $M\neq 0$ произвольное число и $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \sigma$ обозначают числа $0, 1, 2, \ldots, k$.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS PRÉCISES POUR L'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE DES FORMES LINÉAIRES

N. Obrechkoff

RÉSUMÉ

En 1903 Borel a énoncé le théorème suivant:

Soient α et β des nombres réels arbitraires et N un nombre arbitraire ≥ 1. Alors ils existent trois nombres entiers x, y et z, non tous égaux à zéro et un nombre θ, indépendant des nombres α, β et N tels que l'on ait

$$\alpha x+\beta y+z<\theta\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{N^2},\quad x\leq N,\quad y\leq N,\quad z\leq N.$$

La valeur meilleure de la constante θ de Borel n'était pas connue. Dans ce travail nous démontrons que cette valeur est égale à l'unité.

Nous démontrons aussi le théorème suivant:

Soient $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ des nombres réels arbitraires et soient $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k$ des nombres arbitraires mais entiers et positifs. Alors ils existent $k+1$ nombres entiers $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$, qui satisfont aux conditions suivantes:

$$(2)\qquad \omega_0x_0+\omega_1x_1+\ldots+\omega_kx_k\quad\frac{n_0\omega_0+n_1\omega_1+\ldots+n_k\omega_k}{(n_0+1)(n_1+1\ldots(n_k+1)-1},$$

$$x_i\leq n_i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ k,\ \sum_{i=0}^{k}x_i>0.$$

On a le signe d'égalité dans (2) seulement dans le cas où la forme $f=\omega_0x_0+\omega_1x_1+\ldots+\omega_kx_k$ est égale à la forme

$$M\left[\frac{x_\alpha}{n_\alpha+1}\pm\frac{x_\beta}{(n_\alpha+1)(n_\beta+1)}\pm\quad\pm\frac{x_\sigma}{(n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_k+1)}\right],$$

où M est un nombre réel arbitraire différent de zéro et $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ est une permutation arbitraire des nombres $0, 1, 2, \ldots, k$.

Comme application des inégalités pour les formes linéaires nous démontrons aussi quelques résultats pour les congruences linéaires.

Citons par exemple le théorème suivant:

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des nombres entiers et m un nombre entier et positif. Soient encore $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des nombres entiers et positifs et supposons que

$$(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_k+1)>m. \tag{2}$$

Alors la congruence

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k\equiv 0 \pmod{m}$$

a au moins une solution en nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_k$, non tous nuls, qui satisfont aux inégalités

$$|x_1|\leq\lambda_1,\ |x_2|\leq\lambda_2, \ldots,\ |x_k|\leq\lambda_k.$$

La condition (2) ne peut être remplacée par la condition moins restrictive $(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_k+1)\leq m$.

En particulier, on obtient un théorème de Thue.