

ВЪРХУ НЯКОИ ИНТЕГРАЛНИ ПРЕДСТАВЯНИЯ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ПО РЕАЛНАТА ПОЛУОС

Н. Обрешков

В няколко по-раншни работи разгледах въпроса за представянето на функции по реалната полуос с интеграли от вида

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) \varphi(t) dt,$$

$$(2) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) d\omega(t).$$

В работите [1] и [2] функцията $\Phi(x)$ е дадена с интеграла

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} t^{\delta} e^{-t - \frac{x}{t}} dt,$$

а в работата [3] функцията $\Phi(x)$ е равна на

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\delta} u^{\alpha} e^{-t - u - \frac{x}{tu}} dt du.$$

В настоящата работа обобщавам предишните си резултати, като въвеждам функцията

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_p^{\alpha_p} \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 \dots u_p}\right) du_1 du_2 \dots du_p,$$

като $\exp(x)$ означава e^x . С разглеждания само в реална област при реални числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ получавам отначало асимптотична формула за функцията $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Намирам линейно диференциално уравнение, което се удовлетворява от $\Phi(x)$ и съответните оператори за решението на интегралните уравнения (1) и (2). Също така обобщавам и предишните си резултати за неравенства на производните на реални функции по реалната полуос.

I. Асимптотична формула за функцията $\Phi(x)$

Ще получим асимптотична формула за $x \rightarrow \infty$ за функцията

$$\Phi(x^{p+1}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots \dots u_p^{a_p} \exp \left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p} \right) du_1 du_2 \dots du_p.$$

Функцията

$$\varphi = u_1 + u_2 + \dots + u_p + \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p}$$

на положителните променливи $u_1, u_2, \dots, u_p$ за $u_1 = u_2 = \dots = u_p = x$ приема минимална стойност

$$m = (p+1)x.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно малко положително число и с D да означим куба, определен с неравенствата

$$(1-\varepsilon)x \leq u_i \leq (1+\varepsilon)x, \quad i=1, 2, \dots, p.$$

Ще изучим отначало интеграла

$$I = \int \int_D \dots \int u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_p^{a_p} \exp \left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p} \right) d\omega,$$

като с $d\omega$ означаваме (за късата) произведението $du_1 du_2 \dots du_p$. Очевидно ще имаме

$$(1) \quad A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_p^{a_p} K < I < B_1^{a_1} B_2^{a_2} \dots B_p^{a_p} K,$$

$$K = \int \int_D \int \exp \left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p} \right) d\omega,$$

като $A_s = (1-\varepsilon)x$ и $B_s = (1+\varepsilon)x$ при $a_s \geq 0$ и $A_s = (1+\varepsilon)x$, $B_s = (1-\varepsilon)x$ при $a_s < 0$, $s=1, 2, \dots, p$. По формулата на Тейлор получаваме

$$(2) \quad \varphi = (p+1)x + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} \right)_{u_1=x} (u_1-x)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_p^2} \right)_{u_p=x} (u_p-x)^2 \right. \\ \left. + 2 \sum_{i < j}^1 \dots p \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} \right)_{u_i=x} (u_i-x)(u_j-x) \right] + R \\ R = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (u_1-x) + \dots + \frac{\partial}{\partial u_p} (u_p-x) \right)^3 \varphi_{u_1=\zeta_1, \dots, u_p=\zeta_p}.$$

Тук за числата ζ_k , $k=1, 2, \dots, p$ имаме $|\zeta_k - x| < |u_k - x|$ и следователно $x(1-\varepsilon) < \zeta_k < x(1+\varepsilon)$. Остатъкът R е линейна комбинация с числени коефициенти от изрази от вида

$$\frac{(u_i - x)^3}{\zeta_i^3 U'}, \frac{(u_i - x)^2 (u_j - x)}{\zeta_i^2 \zeta_j U'}, U' = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_p.$$

Като вземем под внимание, че $|u_i - x| \leq \varepsilon x$, $\zeta_i > x(1 - \varepsilon)$, ще имаме

$$(3) \quad |R| < N \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{p+3} x} \left[\sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2 + \sum_{i < j}^{1 \dots p} |u_i - x| |u_j - x| \right],$$

като N е число, зависещо само от p . Известно е, че квадратичната форма

$$\sum_{\mu=1}^p x_\mu^2 - \frac{2}{p-1} \sum_{\mu < \nu}^{1 \dots p} x_\mu x_\nu$$

е положително дефинитна. Следователно ще имаме

$$(4) \quad \sum_{\mu < \nu}^{1 \dots p} x_\mu x_\nu \leq \frac{p-1}{2} \sum_{\mu=1}^p x_\mu^2,$$

и от (2) получаваме неравенството

$$|R| < N \frac{\varepsilon}{x(1 - \varepsilon)^{p+3}} \left(1 + \frac{p-1}{2} \right) \sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2.$$

Тогава оттук и (2) ще имаме

$$\varphi - (p+1)x \leq \frac{1}{x} g_p \sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2 + \frac{1}{x} \sum_{\mu < \nu} (u_\mu - x)(u_\nu - x),$$

(5)

$$\varphi - (p+1)x \geq \frac{1}{x} g'_p \sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2 + \frac{1}{x} \sum_{\mu < \nu} (u_\mu - x)(u_\nu - x),$$

като с g_p и g'_p сме означили числата

$$(6) \quad g_p = 1 + \frac{N\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{p+3}} \cdot \frac{p+1}{2}, \quad g'_p = 1 - \frac{N\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{p+3}} \cdot \frac{p+1}{2}.$$

Да разгледаме сега квадратичната форма

$$T_p = \sum_{\mu=1}^p x_\mu^2 + 2\lambda \sum_{\mu < \nu} x_\mu x_\nu,$$

където λ е реално число. Лесно виждаме, че ще имаме

$$T_p = A_1^{(p)} X_1^2 + A_2^{(p)} X_2^2 + \dots + A_p^{(p)} X_p^2,$$

като $A_1^{(p)}, A_2^{(p)}, \dots, A_p^{(p)}$ са числа, зависещи от p и

$$X_1 = x_1 + \lambda(x_2 + x_3 + \dots + x_p),$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(x_3 + x_4 + \dots + x_p),$$

$$X_3 = x_3 + \frac{\lambda}{1+2\lambda} (x_4 + \dots + x_p),$$

$$X_p = x_p.$$

Понеже T_p при $x_p = 0$ се свежда на формата T_{p-1} , то следват равенствата

$$(7) \quad A_1^{(p)} = A_1^{(p-1)} = 1, \quad A_2^{(p)} = A_2^{(p-1)}, \dots, \quad A_{p-1}^{(p)} = A_{p-1}^{(p-1)}$$

и от приравняване на коефициентите на x_p в двете части на T_p получаваме

$$(8) \quad A_1^{(p)} \lambda^2 + A_2^{(p)} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^2 + A_3^{(p)} \left(\frac{\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 + \dots + A_{p-1}^{(p)} \left(\frac{\lambda}{1+p-2\lambda} \right)^2 + A_p^{(p)} = 1.$$

Като вземем под внимание, че $A_1^{(2)} = 1$, $A_2^{(2)} = 1 - \lambda^2$ от (7) и (8), виждаме, че числата $A_\mu^{(p)}$, $\mu = 2, 3, \dots, p$, са рационални функции на λ .

С несложни пресмятания при $\lambda = \frac{1}{2}$ получаваме от (7) и (8) стойностите $A_\nu^{(p)} = \frac{\nu+1}{2^\nu}$, $1 \leq \nu \leq p$ за тези коефициенти, т. е. имаме

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^p x_\mu^2 + \sum_{\mu < \nu} x_\mu x_\nu &= \left[x_1 + \frac{1}{2} (x_2 + \dots + x_p) \right]^2 + \frac{3}{4} \left[x_2 + \frac{1}{3} (x_3 + \dots + x_p) \right]^2 \\ &+ \frac{2}{3} \left[x_3 + \frac{1}{4} (x_4 + \dots + x_p) \right]^2 + \dots + \frac{p+1}{2p} x_p^2. \end{aligned}$$

Очевидно е тогава, че при достатъчно близки стойности на λ до $\frac{1}{2}$ формата T_p ще бъде положително дефинитна. Понеже числата g_p и g'_p при $\varepsilon \rightarrow 0$ клонят към 1, то ще има число $\varepsilon_0 > 0$, такова, че за $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ формите в десните части на (5) ще бъдат положително дефинитни. Предполагаме, че това условие за ε е изпълнено. За интеграла K ще имаме

$$(9) \quad K < e^{-(p+1)x} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{1}{x} g'_p \sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2 - \frac{1}{x} \sum_{\mu < \nu} (u_\mu - x)(u_\nu - x) \right) d\omega,$$

$$(10) \quad K \geq e^{-(p+1)x} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{1}{x} g_p \sum_{\mu=1}^p (u_\mu - x)^2 - \frac{1}{x} \sum_{\mu < \nu} (u_\mu - x)(u_\nu - x) \right) d\omega.$$

Ако положим

$$\begin{aligned} u_i - x &= \sqrt{x} \, t_i, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \sqrt{g_p A_1^{(p)}} [t_1 + \lambda (t_2 + \dots + t_p)] &= v_1, \\ \sqrt{g_p A_2^{(p)}} [t_2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} (t_3 + \dots + t_p)] &= v_2, \\ \sqrt{g_p A_p^{(p)}} t_p &= v_p, \quad \lambda = \frac{1}{2g_p}, \end{aligned}$$

интегралът (10) става

$$x^{\frac{p}{2}} \int \int_{D_p^*} \int \frac{1}{\sqrt{g_p A_1^{(p)} A_2^{(p)} \dots A_p^{(p)}}} e^{-v_1^2 - v_2^2 - \dots - v_p^2} dv_1 dv_2 \dots dv_p.$$

Тук D_p^* е съответната област на интегриране при новите променливи v_i , $1 \leq i \leq p$. При неограниченото растене на x областта D_p^* клони към цялото p -мерно пространство D и ще имаме

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int \int_{D_p^*} \int e^{-v_1^2 - v_2^2 - \dots - v_p^2} dv_1 dv_2 \dots dv_p = (\sqrt{\pi})^p.$$

Подобно за интеграла (9) имаме израза

$$x^{\frac{p}{2}} \int \int_{D_p^*} \int \frac{1}{\sqrt{g_p' A_1^{(p)} \dots A_p^{(p)}}} e^{-v_1^2 - v_2^2 - \dots - v_p^2} dv_1 dv_2 \dots dv_p.$$

Да поставим

$$u_i = x t_i, \quad 1 \leq i \leq p.$$

За функцията $\varphi = u_1 + u_2 + \dots + u_p + \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p}$ ще имаме

$$\psi = \frac{\varphi}{x} = t_1 + t_2 + \dots + t_p + \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_p}.$$

Да прекараме през точката $(1, 1, \dots, 1)$ произволен лъч

$$t_i - 1 = \varrho \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_p^2 = 1,$$

като ϱ се мени от 0 до такава стойност ϱ' , осигуряваща положителността на числата $t_1, t_2, \dots, t_p$. Имаме

$$t_1 + t_2 + \dots + t_p + \frac{1}{t_1 t_2 \dots t_p}$$

$$= U(\varrho), U'(\varrho) = \gamma_1 + \dots + \gamma_p - \frac{\gamma_1}{t_1^2 \dots t_p} - \dots - \frac{\gamma_p}{t_1 \dots t_{p-1} t_p^2},$$

$$U''(\varrho) = \frac{2}{t_1 t_2 \dots t_p} \left[\sum_{i=1}^p \left(\frac{\gamma_i}{t_i} \right)^2 + \sum_{i < j} \left(\frac{\gamma_i}{t_i} \right) \left(\frac{\gamma_j}{t_j} \right) \right] > 0.$$

Понеже $U'(0)=0$, то $U'(\varrho) > 0$ за $\varrho > 0$, т. е. $U(\varrho)$ е растяща функция. Ако следователно означим с m минималната стойност на $U(\varrho)$ по хиперсферата $(t_1 - 1)^2 + \dots + (t_p - 1)^2 = \varepsilon^2$, то $m > p+1$ и за всяка точка $(u_1, u_2, \dots, u_p)$, принадлежаща на областта D_ε , ще имаме

$$\varphi \geq mx.$$

Да означим с Δ областта от p -мерното пространство, дефинирана с

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_p^2 \leq R^2, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, p$$

и с C допълнителната област на D до тази област Δ . Тогава за интеграла

$$K_1 = \int \int_C \dots \int \exp \left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p} \right) du_1 du_2 \dots du_p$$

ще имаме ($x \rightarrow \infty$)

$$(12) \quad K_1 = O(R^p e^{-mx}) = o(x e^{-(p+1)x}).$$

Остава да се изучи интегралът

$$K_2 = \int \int_I \dots \int \exp \left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p} \right) du_1 du_2 \dots du_p,$$

където I означава областта

$$u_1 + u_2 + \dots + u_p \geq R, \quad u_s \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Очевидно имаме

$$K_2 < \int \int_{I'} \int \exp (-u_1 - u_2 - \dots - u_p) du_1 du_2 \dots du_p.$$

С трансформацията

$$u_1 = \varrho \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \quad \cos^2 \varphi_{p-2} \cos^2 \varphi_{p-1},$$

$$u_2 = \varrho \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \quad \cos^2 \varphi_{p-2} \sin^2 \varphi_{p-1},$$

$$u_3 = \varrho \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \quad \sin^2 \varphi_{p-2},$$

$$u_p = \varrho \sin^2 \varphi_1$$

горният интеграл се свежда на интеграла

$$j = L \int_R^{\infty} e^{-q} q^{p-1} dq.$$

По правилото на Хоспитал получаваме ($R \rightarrow \infty$)

$$j = O(R^p e^{-R})$$

и следователно

$$(13) \quad j = o(x^{\mu} e^{-(p+1)x}), \quad x \rightarrow \infty,$$

каквото и да е реалното число μ .

От релациите (1), (9), (10), (11), (12), (13) при фиксирано ε получаваме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\delta} e^{-(p+1)x} \Phi(x^{p+1}) &\geq A_{11}^{a_1} A_{21}^{a_2} \dots A_{p1}^{a_p} \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{g_p^{(p)} A_1^{(p)} A_2^{(p)} \dots A_p^{(p)}}}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\delta} e^{-(p+1)x} \Phi(x^{p+1}) &\leq B_{11}^{a_1} B_{21}^{a_2} \dots B_{p1}^{a_p} \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{g_p^{(p)} A_1^{(p)} A_2^{(p)} \dots A_p^{(p)}}}, \\ \delta &= a_1 + a_2 + \dots + a_p + \frac{p}{2}, \quad A_{s1} = \frac{1}{x} A_s, \quad B_{s1} = \frac{1}{x} B_s. \end{aligned}$$

Като поставим тук $\varepsilon \rightarrow 0$, получаваме окончателно

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\delta} e^{-(p+1)x} \Phi(x^{p+1}) = \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{p+1}}.$$

Така установихме асимптотичната формула за $\Phi(x)$

$$(14) \quad \Phi(x) \sim x^{\frac{\delta}{p+1}} e^{-(p+1)x} \frac{1}{\sqrt{p+1}} \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{p+1}}.$$

При случая на Лиувил, когато

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{p+1} - 1, \quad a_2 = \frac{2}{p+1} - 1, \dots, \quad a_p = \frac{p}{p+1} - 1, \\ \delta &= \frac{1+2+\dots+p}{p+1} - p + \frac{p}{2} = 0, \end{aligned}$$

тази формула съвпада със стойността на функцията $\Phi(x)$.

Ще намерим една формула за $\Phi'(x)$, която ще използваме, за да получим асимптотична формула за тази функция. Като поставим в израза за $\Phi(x)$, $u_1 = x\tau$, умножим двете части на полученото равенство с x^{-a_1-1} и диференцираме, получаваме

$$\frac{d}{dx} (x^{-\alpha_1-1} \Phi(x)) \\ = - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \tau^{\alpha_1+1} u_2^{\alpha_2} \dots u_p^{\alpha_p} \exp\left(-\tau x - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 u_2 \dots u_p}\right) d\omega.$$

Като възстановим променливото $u_1 = \tau x$, ще имаме по-нататък

$$x^{\alpha_1+2} \frac{d}{dx} [x^{-\alpha_1-1} \Phi(x)] = -\Phi_1(x),$$

като $\Phi_1(x)$ означава функцията

$$\Phi_1(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{\alpha_1+1} u_2^{\alpha_2} \dots u_p^{\alpha_p} \\ \cdot \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 u_2 \dots u_p}\right) du_1 du_2 \dots du_p,$$

която има същия вид като $\Phi(x)$, но α_1 е сменено с $\alpha_1 + 1$. Като приложим асимптотичната формула (14) за функцията $\Phi_1(x)$ от равенството

$$\Phi'(x) = \frac{1+\alpha_1}{x} \Phi(x) - \frac{1}{x} \Phi_1(x),$$

получаваме асимптотичната формула за $x \rightarrow \infty$

$$-\Phi'(x) \sim \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{p+1}} x^{\frac{\delta+1}{p+1}-1} e^{-(p+1)x^{\frac{1}{p+1}}}.$$

Едно просто пресмятане показва, че тази формула може да се получи направо от формулата (14) за $\Phi(x)$ с почленно диференциране. Може да се докаже, че и за производните на $\Phi(x)$ от кой да е ред могат да се получат асимптотични формули с почленно диференциране на (14), но на това не ще се спираме.

2. Диференциално уравнение за функцията $\Phi(x)$

Ще изведем едно диференциално уравнение, което се удовлетворява от функцията $\Phi(x)$. Да образуваме последователно функциите

$$\Phi_1(x) = L_{\alpha_1}(\Phi) = x^{\alpha_1+1} [x^{-\alpha_1} \Phi'(x)]',$$

$$\Phi_2(x) = L_{\alpha_2}(\Phi_1) = x^{\alpha_2+1} [x^{-\alpha_2} \Phi_1(x)]',$$

$$\Phi_p(x) = L_{\alpha_p}(\Phi_{p-1}) = x^{\alpha_p+1} [x^{-\alpha_p} \Phi_{p-1}(x)]'.$$

Ще установим, че $\Phi(x)$ е интеграл на линейното диференциално уравнение

$$(1) \quad \Phi_p(x) := (-1)^{p-1} \Phi(x).$$

За производната $\Phi'(x)$ получаваме

$$\begin{aligned} \Phi'(x) = & - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{a_1-1} u_2^{a_2-1} \dots u_p^{a_p-1} \\ & \cdot \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - \frac{x}{u_1 u_2 \dots u_p}\right) d\omega. \end{aligned}$$

Като поставим тук $u_1 = x\tau$, умножим с x^{-a_1} и диференцираме, получаваме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-a_1} \Phi'(x)] = & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \tau^{a_1} u_2^{a_2-1} \dots u_p^{a_p-1} \\ & \cdot \exp\left(-\tau x - u_2 - \dots - u_p - \frac{1}{\tau u_2 \dots u_p}\right) d\tau du_2 \dots du_p. \end{aligned}$$

Като възстановим променливото $u_1 = \tau x$, получаваме

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) = & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{a_1} u_2^{a_2-1} \dots u_p^{a_p-1} \\ & \cdot \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 \dots u_p}\right) d\omega. \end{aligned}$$

Изобщо ще докажем, че за всяко μ , $1 \leq \mu \leq p$ имаме

$$\begin{aligned} (2) \quad \Phi_\mu(x) = & (-1)^{\mu-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{a_1} \dots u_\mu^{a_\mu} u_{\mu+1}^{a_{\mu+1}-1} \dots u_p^{a_p-1} \\ & \cdot \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 \dots u_p}\right) d\omega. \end{aligned}$$

Допускаме, че това равенство е вярно за някое μ , $1 \leq \mu \leq p-1$. Ще докажем, че то остава вярно и за $\mu+1$. Именно полагаме $u_{\mu+1} = \tau x$, умножаваме двете части на полученото равенство с $x^{-a_{\mu+1}}$ и диференцираме. Така получаваме равенството

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^{-a_{\mu+1}} \Phi_\mu(x)] = & (-1)^\mu \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{a_1} \dots u_\mu^{a_\mu} \tau^{a_{\mu+1}} \dots u_p^{a_p-1} \\ & \cdot \exp\left(-u_1 - \dots - \tau x - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 u_2 \dots u_p}\right) d\tau \dots du_p. \end{aligned}$$

Възстановяваме променливото $u_{\mu+1} = \tau x$ и умножаваме с $x^{a_{\mu+1}+1}$. Очевидно така получаваме ново равенство, което следва от (2) формално със смяна на μ с $\mu+1$. При $\mu = p$ равенството (2) се свежда на уравнението (1).

3. Решение на особено интегрално уравнение

Предварително ще разгледаме някои въпроси от сходимостта на интеграли от вида

$$(1) \quad \int_A^\infty \Phi(xt) \varphi(t) dt,$$

където $A > 0$, $\varphi(t)$ е интегрируема във всеки интервал $(0, T)$, $T > 0$, функция в смисъл на Лебег.

I. Ако интегралът (1) е сходящ за едно $x = x_0 > 0$, то той е сходящ за всяко $x > x_0$.

Да поставим

$$\int_x^\infty \Phi(x_0 t) \varphi(t) dt = g(x).$$

Тогава имаме

$$\varphi(x) = -\frac{g'(x)}{\Phi(x_0 x)}.$$

С интегриране по части при $x_1 > x_0$ получаваме

$$(2) \quad \int_A^B \varphi(t) \Phi(x_1 t) dt = -g(B) \frac{\Phi(x_1 B)}{\Phi(x_0 B)} + g(A) \frac{\Phi(x_1 A)}{\Phi(x_0 A)} \\ + \int_A^B g(t) \frac{d}{dt} \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} dt.$$

Като използваме асимптотичните формули за $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$, получаваме за $t \rightarrow \infty$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} = x_1 \frac{\Phi'(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} - x_0 \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} \frac{\Phi'(x_0 t)}{\Phi(x_0 t)} \\ = O \left[\exp \left\{ (p+1) \left[(x_0 t)^{\frac{1}{p+1}} - (x_1 t)^{\frac{1}{p+1}} \right] \right\} \right].$$

Понеже $g(t)$ е ограничена функция, от (2) и (3) следва сходимостта на интеграла (1) за $x_1 > x_0$.

II. Ако интегралът (1) е сходящ за $x = x_0$, то интегралът

$$(4) \quad \int_A^\infty \varphi(t) t^{\frac{\delta}{p+1}} e^{-(p+1)(xt)^{\frac{1}{p+1}}} dt$$

е сходящ за всяко $x > x_0$. Обратно, от сходимостта на интеграла (4) за $x = x'$ следва сходимостта на интеграла (1) за всяко $x > x'$.

Доказателството е аналогично на предишното.

Ще разгледаме сега интегралното уравнение

$$(5) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) \varphi(t) dt$$

където $f(x)$ е дадена функция и $\varphi(t)$ е търсената функция, която предполагаме интегрируема по Лебег във всеки интервал $(0, T)$, $T > 0$. Ако $f(x)$ е произволна функция, допускаща съответни производни, да образуваме функцията

$$Uf(x) = f_1(x),$$

получена с последователно прилагане на операторите

$$L_{a_1}(f) = x^{a_1+1} [x^{-a_1} f'(x)]' = \varphi_1,$$

$$L_{a_2}(\varphi_1) = x^{a_2+1} [x^{-a_2} \varphi_1(x)]' = \varphi_2,$$

$$L_{a_3}(\varphi_2) = x^{a_3+1} [x^{-a_3} \varphi_2(x)]' = \varphi_3,$$

$$L_{a_p}(\varphi_{p-1}) = x^{a_p+1} [x^{-a_p} \varphi_{p-1}(x)]' = \varphi_p = f_1(x).$$

Ще установим следната теорема:

I. Нека $\varphi(t)$ е интегрируема по Лебег функция във всеки интервал $(0, T)$, $T > 0$, и интегралът в (5) да е сходящ за някое число $x = x_0 > 0$. Да образуваме последователно функциите $f_n(x)$, получени с прилагане на оператора U , т. е.

$$f_0(x) = f(x), f_1(x) = Uf(x), f_2(x) = Uf_1(x),$$

Тогава за всяка точка на непрекъснатост α на функцията $\varphi(t)$ имаме граничното равенство

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n(p-1)} e^{(p+1)n}}{\alpha^{n+1} (\sqrt[2]{2\pi})^{p+1} n^{\delta_1}} f_n\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha), \quad \delta_1 = \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-1}{2}.$$

На основание на предишните теореми интегралите, получени с диференциране на дясната част на (5), ще са сходящи за $x > x_0$ и представят съответните производни на $f(x)$, т. е. за $x > x_0$ имаме

$$f'(x) = \int_0^\infty \Phi'(xt) t \varphi(t) dt,$$

$$f''(x) = \int_0^\infty \Phi''(xt) t^2 \varphi(t) dt,$$

От тези равенства, като вземем под внимание уравнението (1) § 2, получаваме

$$f_1(x) = (-1)^{p-1} \int_0^\infty t \Phi(xt) \varphi(t) dt.$$

Прилагайки по-нататък оператора U , получаваме въобще

$$(7) \quad f_n(x) = (-1)^{n(p-1)} \int_0^\infty t^n \Phi(xt) \varphi(t) dt.$$

Да пресметнем интеграла

$$A_n = \int_0^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt.$$

Имаме

$$A_n = \left(\frac{a}{n^{p+1}}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} y^n \Phi(y) dy.$$

Със смяната $y = u_1 \dots u_p \tau$ получаваме

$$\begin{aligned} (8) \quad A_n &= \left(\frac{a}{n^{p+1}}\right)^{n+1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tau^n u_1^{a_1+n+1} \dots u_p^{a_p+n+1} \\ &\quad \cdot \exp(-u_1 - \dots - u_p - \tau) du_1 \dots du_p d\tau \\ &= \left(\frac{a}{n^{p+1}}\right)^{n+1} \Gamma(n+1) \Gamma(a_1+n+2) \dots \Gamma(a_p+n+2). \end{aligned}$$

На основание на формулата на Стирлинг от (8) за $n \rightarrow \infty$ получаваме асимптотичната формула за A_n :

$$A_n \sim \frac{\alpha^{n+1} n^{\delta_1} (\sqrt{2\pi})^{p+1}}{e^n (p+1)}, \quad \delta_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_p + \frac{p-1}{2},$$

откъдето имаме

$$(9) \quad g_n = \frac{1}{A_n} \sim \frac{e^n (p+1)}{\alpha^{n+1} (\sqrt{2\pi})^{p+1} n^{\delta_1}} = g'_n.$$

Нека n^{p+1} е $> x_0 \alpha$ и $\varepsilon > 0$ е произволно малко число. Ще докажем, че при фиксирани α и ε имаме

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_0^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) \varphi(t) dt = 0.$$

Имаме

$$j_n = g_n \int_0^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) \varphi(t) dt = g_n \int_0^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} + g_n \int_{\frac{\alpha}{n^{p+1}}}^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} = j'_n + j''_n.$$

Понеже $\Phi(x) < M$, то за j_n получаваме

$$|j'_n| < M g_n \left(\frac{a}{n^{p+1}}\right)^n \int_0^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} |\varphi(t)| dt = O\left(\frac{\alpha^n}{n^{(p+1)n}} \cdot \frac{e^{(p+1)n}}{n^{\delta_1} \alpha^{n+1}}\right) = o(1),$$

където M е константа, независима от n . От предишното неравенство следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} j'_n = 0$. За интеграла j''_n получаваме

$$|j''_n| < M \frac{e^{(p+1)n} n^{\delta}}{\alpha^{n+1} n^{\delta_1}} \int_0^{\frac{\alpha - \varepsilon}{n^{p+1}}} |\varphi(t)| t^{n + \frac{\delta}{p+1}} \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] dt,$$

като M' е константа, независима от n . За функцията

$$\psi(t) = t^{n+\frac{\delta}{p+1}} \exp \left[-(p+1)n \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]$$

имаме

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{1}{t} \left(n + \frac{\delta}{p+1} \right) - n t^{\frac{1}{p+1}-1} a^{-\frac{1}{p+1}}.$$

Производната $\psi'(t)$ се анулира за $t_0 = a \left(1 + \frac{\delta}{n(p+1)} \right)^{p+1}$ и $\psi(t)$ е растяща функция за $0 < t < t_0$ и намаляваща за $t > t_0$. Следователно при достатъчно големи n тази функция е растяща за $t \leq a - \varepsilon$. Така получаваме неравенството

$$|j_n''| < M'' e^{(p+1)n} n^{\delta-\delta_1} (a-\varepsilon)^{\frac{\delta}{p+1}} \lambda^{n(p+1)} e^{-(p+1)n\lambda}, \quad \lambda = \left(\frac{a-\varepsilon}{a} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Оттук имаме

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|j_n''|} \leq (\lambda e^{1-\lambda})^{p+1}.$$

Понеже $\lambda e^{1-\lambda} < 1$, то следва от (11) граничното равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} j_n'' = 0$,

с което доказателството на (10) се привършва.

Ще докажем сега и граничното равенство

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi \left(\frac{n^{p+1}}{a} t \right) \varphi(t) dt = 0.$$

Понеже интегралът (5) е сходящ за $x = c > 0$, то функцията

$$h(x) = \int_x^{\infty} \varphi(t) \Phi(ct) dt$$

е ограничена. Като вземем под внимание, че

$$\varphi(x) = -\frac{h'(x)}{\Phi(cx)},$$

то за интеграла

$$T_n = g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi \left(\frac{n^{p+1}}{a} t \right) \varphi(t) dt$$

получаваме

$$\begin{aligned}
T_n &= -g_n \int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha} t\right) \frac{h'(t)}{\Phi(ct)} dt \\
&= g_n (\alpha+\varepsilon)^n \Phi\left[\frac{n^{p+1}}{\alpha} (\alpha+\varepsilon)\right] \frac{h(\alpha+\varepsilon)}{\Phi[c(\alpha+\varepsilon)]} \\
&\quad + g_n \int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty} h(t) \frac{d}{dt} \left[t^n \frac{\Phi\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha} t\right)}{\Phi(ct)} \right] dt = l'_n + l''_n.
\end{aligned}$$

Като поставим $\alpha+\varepsilon = \alpha r^{p+1}$, $r > 1$, за l'_n имаме

$$|l'_n| < M''' n^{\delta-\delta_1} e^{(p+1)n} r^{n(p+1)} e^{-(p+1)n r},$$

M''' константа, откъдето имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|l'_n|} \leq (e^{1-r} r)^{p+1} < 1,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} l'_n = 0$. За l''_n имаме

$$\begin{aligned}
l''_n &= n g_n \int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty} h(t) t^{n-1} \frac{\Phi\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha} t\right)}{\Phi(ct)} dt \\
&\quad + g_n \int_{\alpha+\varepsilon}^{\infty} h(t) t^n \frac{d}{dt} \frac{\Phi\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha} t\right)}{\Phi(ct)} dt = h'_n + h''_n.
\end{aligned}$$

Като въведем означенията

$$\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha} = r^{p+1}, \quad t = \alpha u^{p+1}, \quad \theta = (c\alpha)^{\frac{1}{p+1}}$$

и използваме асимптотичната формула (14), § 1, получаваме

$$|h'_n| < M_1 e^{(p+1)n} n^{1+\delta-\delta_1} \int_r^{\infty} n^{n(p+1)} e^{-(p+1)u(n-\theta)} du,$$

като M_1 е константа, независима от n . По-нататък ще имаме

$$\begin{aligned}
\int_r^{\infty} u^{n(p+1)} e^{-(p+1)u(n-\theta)} du &= \int_0^{\infty} (r+v)^{n(p+1)} e^{-(p+1)(r+v)(n-\theta)} dv \\
&= e^{-(p+1)r(n-\theta)} r^{n(p+1)} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{v}{r}\right)^{n(p+1)} e^{-(p+1)v(n-\theta)} dv \\
&= e^{-(p+1)r(n-\theta)} r^{n(p+1)} \frac{1}{n-\theta} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\tau}{r(n-\theta)}\right)^{n(p+1)} e^{-(p+1)\tau} d\tau \\
&< e^{-(p+1)r(n-\theta)} r^{n(p+1)} \frac{1}{n-\theta} \int_0^{\infty} e^{-(p+1)\tau} \left(1 + \frac{1}{r}\right) (1+\tau)^{\theta(p+1)} d\tau.
\end{aligned}$$

За h'_n получаваме така неравенството

$$|h'_n| < M_2 e^{(p+1)n} n^{\delta+1-\delta_1} e^{-(p+1)r(n-\theta)} r^{n(p+1)} \frac{1}{n-\theta} \int_0^\infty e^{-(p+1)\tau} \left(1 - \frac{1}{r}\right) (1+\tau)^{\theta(p+1)} d\tau,$$

откъдето получаваме

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|h'_n|} \leq (re^{1-r})^{p+1}.$$

Следователно ще имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n = 0.$$

Остава да се изследва интегралът

$$h''_n = g_n \frac{n^{p+1}}{a} \int_{a+\varepsilon}^\infty t^n h(t) \frac{\Phi' \left(\frac{n^{p+1}}{a} t \right)}{\Phi(ct)} dt - c g_n \int_{a+\varepsilon}^\infty h(t) t^n \frac{\Phi'(ct) \Phi \left(\frac{n^{p+1}}{a} t \right)}{\Phi^2(ct)} dt = \omega_n - \eta_n.$$

На основание на асимптотичните формули за $\Phi(x)$ и за $\Phi'(x)$ получаваме неравенствата

$$|\omega_n| < K'' g_n n^{\delta+1} \int_{a+\varepsilon}^\infty t^n \exp \left[-(p+1)n \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{1}{p+1}} + (p+1)(ct)^{\frac{1}{p+1}} \right] dt, \\ |\eta_n| < K''' g_n n^\delta \int_{a+\varepsilon}^\infty t^n \exp \left[-(p+1)n \left(\frac{t}{a} \right) + (p+1)(ct)^{\frac{1}{p+1}} \right] dt,$$

като K'' и K''' са константи. В десните части имаме интеграли от подобна форма на предишните и по подобен начин намираме граничните равенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\omega_n|} \leq (re^{1-r})^{p+1}, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\eta_n|} \leq (re^{1-r})^{p+1},$$

от които следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} h''_n = 0$.

Като разгледаме специално функцията $\varphi(t) = 1$ и вземем под внимание, че интегралът

$$\int_0^\infty \Phi(ct) dt$$

е сходящ за $c > 0$, от (10) и (12) получаваме

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_0^{a-\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt = 0.$$

От предишните гранични равенства следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ ще имаме

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt = 1.$$

Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и $\varepsilon > 0$ е така избрано, че

$$(15) \quad |\varphi(t) - \varphi(a)| < \eta,$$

за $|t - a| \leq \varepsilon$. Имаме

$$(16) \quad g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) \varphi(t) dt = \varphi(a) g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt \\ + g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n [\varphi(t) - \varphi(a)] \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt = A'_n + B'_n.$$

На основание на (15) ще имаме

$$(17) \quad |B'_n| < \eta g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt.$$

От (10), (12), (13), (14), (17) следва по познат път граничното равенство (6).

От самото доказателство се вижда, че ако $\varphi(t)$ е непрекъснатата функция за $0 < t_0 < t < t_1$, то за $t_0 + \varepsilon \leq t \leq t_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ граничното равенство е изпълнено равномерно.

Теорема I може да се обобщи. Именно вместо непрекъснатостта на $\varphi(t)$ за $t = a$ да предположим, че

$$(18) \quad \int_a^{a+h} |\varphi(t) - \varphi(a)| dt = o(|h|), \quad h \rightarrow 0.$$

Тогава граничното равенство (6) остава в сила за $t = a$.

Очевидно ще трябва да се изучи само интегралът

$$i_n = g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n [\varphi(t) - \varphi(a)] \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt.$$

Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и $\varepsilon > 0$ е така избрано, че

$$(19) \quad \left| \int_a^{a+h} |\varphi(t) - \varphi(a)| dt \right| < \eta |h|, \quad |h| \leq \varepsilon.$$

Да разгледаме интеграла

$$i'_n = g_n \int_a^{a+\varepsilon} t^n [\varphi(t) - \varphi(a)] \Phi\left(\frac{n^{p+1}}{a} t\right) dt.$$

Като означим с

$$G(x) = \int_a^x \varphi(t) - \varphi(a) dt$$

за i'_n получаваме неравенството $k = \frac{\delta}{p+1}$,

$$\begin{aligned} (20) \quad i'_n &< M g_n n^\delta \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k} G'(t) \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] dt \\ &= M g_n n^\delta G(a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{n+k} \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{a+\varepsilon}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] \\ &\quad - M g_n n^\delta \int_a^{a+\varepsilon} G(t) t^{n+k-1} \left[(n+k) - n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] e^{-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}} dt \\ &= \delta_n - M g_n n^\delta \delta'_n. \end{aligned}$$

Като поставим $a+\varepsilon = a r^{p+1}$ ($r > 1$), получаваме както преди

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\delta_n} \leq (r e^{1-r})^{p+1} < 1,$$

откъдето следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Интегралът δ'_n представяме така:

$$\begin{aligned} (21) \quad \delta'_n &= n \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} G(t) \left[1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] dt \\ &\quad + k \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} G(t) \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] dt = \gamma'_n + k \gamma''_n. \end{aligned}$$

На основание на (19) за γ'_n имаме

$$|\gamma'_n| < \eta n \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} (t-a) \left[\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}} - 1\right] \exp\left[-(p+1)n\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right] dt.$$

Като въведем променливото $t = a u^{p+1}$, получаваме

(22)

$$|\gamma'_n| < \eta n a^{n+k-1} (p+1) \int_1^r u^{(p+1)(n+k-1)+p} (u^{p+1}-1)(u-1) e^{-(p+1)na} du.$$

Като вземем под внимание, че

$$u^{p+1} - 1 = (u-1)(u^p + u^{p-1} + \dots + u + 1) < (p+1)r^p(u-1),$$

от (22) получаваме

$$(23) \quad |\gamma'_n| < \eta n \alpha^{n+k+1} (p+1)^2 \nu \int_1^r u^{(p+1)n} (u-1)^2 e^{-(p+1)nu} du,$$

$$\nu = \max (1, r^{2p+(p+1)(k-1)}).$$

Да разгледаме интеграла

$$\tau_n = \int_1^r u^{(p+1)n} (u-1)^2 e^{-(p+1)nu} du = \int_1^r (u-1)^2 e^{-n(p+1)h(u)} du,$$

$$h(u) = u - \log u.$$

Лесно установяваме неравенството $u > 1$,

$$h(u) > 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2.$$

Следователно за τ_n ще имаме

$$\tau_n < e^{-n(p+1)} \int_1^r (u-1)^2 e^{-\frac{p+1}{2}n(u-1)^2} du$$

$$< e^{-n(p+1)} \int_1^\infty (u-1)^2 e^{-\frac{p+1}{2}n(u-1)^2} du = e^{-(p+1)n} \frac{\sqrt{\pi}}{4 \left(\frac{p+1}{2}n\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Оттук получаваме

$$|\gamma'_n| < \eta n \alpha^{n+k+1} (p+1)^2 \nu e^{-(p+1)n} \frac{\sqrt{\pi}}{4 \left(\frac{p+1}{2}n\right)^{\frac{3}{2}}},$$

откъдето следва неравенството

$$Mg_n n^3 |\gamma'_n| < M' r,$$

като M' е константа, независима от n и η . За γ''_n имаме

$$\gamma''_n < \eta \int_a^{a+r} t^{n+k-1} (t-a) \exp \left[- (p+1)n \left(\frac{t}{a} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right] dt.$$

Със смяната $t = a u^{p+1}$ получаваме

$$\gamma''_n < \eta \alpha^{n+k+1} (p+1) \nu \int_1^r u^{n(p+1)} (u-1) e^{-(p+1)nu} du$$

$$\nu = \max. (1, r^{(k-1)(p+1)+p}),$$

като $r = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p+1}} > 1$. Както преди имаме по-нататък

$$\int_1^r u^{n(p+1)} (u-1) e^{-(p+1)nu} du < \int_1^\infty u^{n(p+1)} (u-1) e^{-(p+1)nu} du$$

$$< e^{-n(p+1)} \int_1^\infty (u-1) e^{-\frac{n}{2}(p+1)(u-1)^2} du = e^{-n(p+1)} \frac{1}{n(p+1)}$$

откъдето следва, че

$$Mg_n n^{\delta} \gamma_n'' < L \frac{\eta}{\sqrt{n}},$$

като L е константа, независима от n . Така граничното равенство (6) е установено. От самото извеждане следва, че това равенство е равномерно изпълнено във всеки интервал $0 < a \leq \alpha \leq b$, ако условието (18) е равномерно изпълнено в интервала.

По една теорема на Лабег следва, че (6) е изпълнено почти за всички $\alpha > 0$.

4. Някои предложения за производните на реални функции и приложения за интегрални представяния

Нека $f(x)$ е реална функция, която за $x > a > 0$ допуска до p -та производна и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ са произволни реални числа, лежащи между -1 и 0 . Да предположим, че тези числа са наредени в следния ред

$$-1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_p < 0$$

Да образуваме редица от функции

$$f_0(x) = f(x), f_1(x), \dots, f_n(x),$$

дефинирани с рекурентните зависимости

$$x^{\alpha_1+1} [x^{-\alpha_1} f_{v-1}'(x)]' = \varphi_{v,1}(x),$$

$$x^{\alpha_2+1} [x^{-\alpha_2} \varphi_{v,1}(x)]' = \varphi_{v,2}(x),$$

$$x^{\alpha_{p-1}+1} [x^{-\alpha_{p-1}} \varphi_{v,p-2}(x)]' = \varphi_{v,p-1}(x),$$

$$x^{\alpha_p+1} [x^{-\alpha_p} \varphi_{v,p-1}(x)]' = \varphi_{v,p}(x) = f_v(x).$$

Като следваме пътя на доказателство, употребено вече от мен в цитираните работи, доказваме следната теорема:

II. Нека $(-1)^{(p-1)n} f_n(x) \geq 0$ за $x > a$. Освен това да предположим, че за една редица $\{y_v\}$ от неограничено растящи числа границата

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(y_v) = c$$

съществува. Тогава имаме

$$(-1)^{\nu(p-1)} f_{\nu}(x) \geq 0, \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad x > a,$$

$$(-1)^{\nu(p-1)} f'_{\nu}(x) \leq 0, \quad 0 \leq \nu \leq n-1, \quad x > a,$$

$$(-1)^{\nu(p-1)+\tau} \varphi_{\nu, p-\tau}(x) \geq 0, \quad 1 \leq \tau \leq p-1, \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha_{\mu}} \varphi_{\nu, \mu-1}(x) = 0, \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad 2 \leq \mu \leq p$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha_1} f'_{\nu}(x) = 0, \quad 0 \leq \nu \leq n-1.$$

Следвайки употребения от мен начин в предишните ми работи, можем да намерим явен израз на функцията $f(x)$ посредством $f_n(x)$. Да разгледаме сега интегралното уравнение

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) d\omega(t),$$

където $\omega(t)$ е монотонно растяща функция за $t > 0$. С граничен преход по напълно аналогичен начин, който употребих в предишните си работи, получаваме следната теорема:

III. Необходимото и достатъчно условие, уравнението (1) да има решение $\omega(t)$, което да е монотонно растяща функция за $t \geq 0$ и ограничена, се състои в следното: $f(x)$ да клони към определена граница, когато x расте неограничено, $f(x)$ да допуска производни от произволен ред за $x > 0$, $f(0) = f(+0)$ и редицата от функции

$$f_0(x) = f(x), f_1(x), f_2(x), \dots,$$

дефинирани с рекурентната зависимост

$$f_n(x) = Lf_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

да удовлетворява на условията

$$(-1)^{n(p-1)} f_n(x) \geq 0$$

при $x > 0$. При това предполагаме, че числата $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ са различни помежду си и са между -1 и 0 .

Ако се освободим от условието $\omega(t)$ да бъде ограничена, теоремата остава в сила, като се премахва само условието $f(0) = f(+0)$.

Ще отбележим, че в същност ние разглеждаме една трансформация с помощта на функцията $\Phi(x)$, обобщаваща трансформацията на Лаплас и Бесел. В друга работа ще дам някои приложения на тази трансформация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Обрешков. Върху някои свойства на реалните функции, дефинирани върху реалната полуос, Годишник на Соф. университет, т. 47, 1950/51, 1951/52, стр. 109—134.
2. Н. Обрешков. Върху някои представяния с интеграли на реални функции, Известия на Математическия институт, т. I, 1953, стр. 83—109.
3. Н. Обрешков. Върху някои интегрални представяния на функции във връзка с диференциални уравнения, Известия на Математическия институт, том I, книга 2, 1954, стр. 3—32.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА РЕАЛЬНОЙ ПОЛУОСИ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

Через $\Phi(x)$ обозначим функцию, определенную при $x > 0$ интегралом

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_p^{a_p} \exp(-u_1 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 \dots u_p}) du_1 \dots du_p,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_p$ произвольные действительные числа. Через $\exp(x)$ обозначена функция e^x . Функция

$$\varphi = u_1 + u_2 + \dots + u_p + \frac{x^{p+1}}{u_1 u_2 \dots u_p}$$

положительных переменных $u_1, u_2, \dots, u_p$ принимает свое минимальное значение $\varphi_0 = (p+1)x$ для $u_1 = u_2 = \dots = u_p = x$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное малое число и обозначим через D куб в p -мерном пространстве, выраженный неравенствами

$$(1-\varepsilon)x \leq u_i \leq (1+\varepsilon)x, \quad i=1, 2, \dots, p$$

и через D_1 обозначим остальную область интегрирования в (1). Разложив интеграл

$$\Phi(x^{p+1}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\varphi} u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_p^{a_p} du_1 du_2 \dots du_p$$

на два по областям D и D_1 , перейдя к соответствующим верхним и нижним пределам и оставив, чтобы ε стремилось к нулю, получаем для $\Phi(x^{p+1})$ асимптотическую формулу ($x \rightarrow \infty$)

$$\Phi(x^{p+1}) \sim \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt{p+1}} x^\delta e^{-(p+1)x}, \quad \delta = a_1 + a_2 + \dots + a_p + \frac{p}{2},$$

откуда для функции $\Phi(x)$ получаем формулу

$$\Phi(x) \sim \frac{(\sqrt{2\pi})^p}{\sqrt[p]{p+1}} x^{\frac{\delta}{p+1}} e^{-(p+1)x^{\frac{1}{p+1}}}$$

Пусть $F(x)$ произвольная функция, имеющая производные до соответствующего порядка. Выразим оператор LF следующим последовательным образом

$$F_1(x) = x^{a_1+1} [x^{-a_1} \Phi'(x)]',$$

$$F_2(x) = x^{a_2+1} (x^{-a_2} F_1(x))',$$

$$F_p(x) = x^{a_p+1} [x^{-a_p} F_{p-1}(x)]' = LF(x).$$

Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\Phi(x) = (-1)^{p-1} \Phi(x).$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$(2) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) \varphi(t) dt,$$

где $f(x)$ — данная функция и $\varphi(t)$ — искомая функция, которая, предположим, интегрируема по Лебегу во всех интервалах $(0, T)$, $T > 0$.

1. Пусть интеграл (2) сходящийся при $x=c>0$. Составим последовательность функций (такие существуют), применяя последовательно оператор L . Будем иметь

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x) = Lf(x), \quad f_2(x) = Lf_1(x), \dots$$

Тогда для каждой точки непрерывности $x=\alpha$ функции $\varphi(x)$ имеем предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n(p-1)} e^{(p+1)n}}{\alpha^{n+1} (\sqrt{2\pi})^{p+1} n^{\delta_1}} f_n\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha), \quad \delta_1 = \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-1}{2}.$$

Отметим, что условие непрерывности при $x=\alpha$ можно заменить более общим условием, а именно

$$\int_0^{\alpha+\tau} |\varphi(t) - \varphi(\alpha)| dt = o(|\tau|), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$(3) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) d\omega(t),$$

где $\omega(t)$ монотонная возрастающая функция при $t > 0$.

II. Необходимое и достаточное условие, чтобы уравнение (3) имело решение $\omega(t)$, которое является монотонно возрастающей функцией при $t \geq 0$ и ограниченной, состоит в следующем: $f(x)$ стремится к определенному пределу, когда x неограниченно возрастает, $f(x)$ имеет производные произвольного порядка при $x > 0$, $f(0) - f(+0)$ и последовательность функций

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \dots$$

выраженные рекуррентной зависимостью

$$f_n(x) = Lf_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

удовлетворяет условию

$$(-1)^{n(p-1)} f_n(x) \geq 0,$$

при $x > 0$. При этом предполагаем, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ различаются между собой и находятся между -1 и 0 .

SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS INTEGRALES DE FONCTIONS RÉELLES SUR LE DEMI-AXE RÉEL

N. Obrechhoff

RÉSUMÉ

Désignons par $\Phi(x)$ la fonction, déterminée pour $x > 0$ par

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_p^{a_p} \exp(-u_1 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 \dots u_p}) du_1 \dots du_p,$$

où $\exp(x)$ désigne la fonction e^x et les nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont réelles. Pour $x \rightarrow \infty$ nous démontrons la formule asymptotique

$$\Phi(x) \sim \frac{(1/2\pi)^p}{\sqrt[p]{p+1}} x^{\frac{p}{p+1}} e^{-(p+1)x^{\frac{1}{p+1}}}, \quad \varrho = a_1 + a_2 + \dots + a_p + \frac{p}{2}.$$

Introduisons l'opérateur LF , défini de la manière suivante

$$F_1 = x^{a_1+1} (x^{-a_1} F)' ,$$

$$F_2 = x^{a_2+1} (x^{-a_2} F_1)' ,$$

$$F_p = x^{a_p+1} (x^{-a_p} F_{p-1})' = LF.$$

La fonction $\Phi(x)$ satisfait à l'équation

$$L\Phi(x) = (-1)^{p-1} \Phi(x).$$

Considérons l'équation intégrale

$$(1) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) \varphi(t) dt ,$$

où $f(x)$ est donnée et $\varphi(t)$ est la fonction cherchée, qui est L — intégrable dans chaque intervalle $(0, T)$, $T > 0$.

I. Supposons que l'intégrale (1) est convergente pour un $x=c>0$. Introduisons la suite des fonctions $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., définies par les relations

$$f_n(x) = L f_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Alors pour chaque nombre $x = a$, pour lequel la fonction $\varphi(x)$ est continue, ou aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n(p-1)} e^{(p+1)n}}{a^{n+1} (\sqrt{2\pi})^{p+1} n^{p+1}} f_n\left(\frac{n^{p+1}}{a}\right) = \varphi(a), \quad \varrho_1 = \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-1}{2}.$$

Remarquons que la condition de la continuité de la fonction $\varphi(x)$ peut être remplacée par la condition

$$\int_a^{a+\tau} |\varphi(t) - \varphi(a)| dt = o(\tau), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(2) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) d\omega(t),$$

où $\omega(t)$ est une fonction bornée non décroissante pour $t \geq 0$.

II. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (2) ait une solution $\omega(t)$, satisfaisante aux conditions citées, consiste en ceci: $f(x)$ tend vers une limite finie lorsque x augmente indéfiniment, $f(x)$ est indéfiniment dérivable pour $x > 0$, $f(0) = f(+0)$ et les fonctions

$$f_0(x) = f(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \dots,$$

définies par les relations

$$f_n(x) = L f_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

satisfont aux inégalités

$$(-1)^{n(p-1)} f_n(x) \geq 0$$

pour $x > 0$. On suppose que les nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont différents entre eux et sont contenus entre -1 et 0 . Dans la démonstration nous avons suivi une méthode directe et en restant toujours dans le domaine réel. Les théorèmes I et III (du texte bulgare) peuvent être aussi tirer des résultats, exposés dans le livre: Í. I. Hirschman and D. V. Widder „The Convolution Transform“, Princeton, 1955.