ВЪРХУ НЯКОИ СВОЙСТВА НА РЕГУЛЯРНО-МОНОТОННИТЕ ФУНКЦИИ

Бл. Сендов

Съгласно дефиницията, дадена от С. Н. Бернштейн [1], една функция $f(x)$, дефинирана и безбройно много пъти диференцуема в интервала (0, 1), се нарича регулярно-монотонна, ако тя и производните ѝ не си менят знака в този интервал (различни производни могат да имат, разбира се, различни знаци). На всяка регулярно-монотонна функция може да се съпостави една редица ε

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots, \tag{1}$$

за която ε_n е или 1, или -1 и

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0; \; n=0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$0<x<1.$$

Обратно, ако си вземем една произволна редица ε, то има функции $f(x) \not\equiv 0$, които удовлетворяват условията (2). Такива са например полиномите на Абел-Гончаров [2] за възлите

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots; \quad x_n = \frac{|\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|}{2}, \tag{3}$$

които ние ще означаваме така:

$$P_0(x) = \varepsilon_0, \quad P_n(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0 \, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 \, dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1} \, dt_n; \tag{4}$$

$$n=0, 1, 2, \ldots,$$

където

$$\tau_k = \varepsilon_k \varepsilon_{k+1}; \qquad k=0, 1, 2, \ldots$$

За да се убедим, че полиномите (4) удовлетворяват условията (2), трябва да приложим няколкократно следната проста

Лема 1. Ако функцията $\varphi(t)$ е неотрицателна и интегруема в интервала [0, 1], то

$$\int_{x_k}^{x} \tau_k \varphi(t) \, dt \geqq 0 \qquad \text{при } x \varepsilon [0, 1].$$

Доказателство. Когато $x_k=0$, то $\tau_k=1$ и следователно

$$\int_{x_k}^{x} \tau_k \varphi(t)\,dt = \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt \geqq 0.$$

Когато $x_k=1$, то $\tau_k=-1$ и следователно

$$\int_{x_k}^{x} \tau_k \varphi(t)\,dt = -\int_{1}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{x}^{1} \varphi(t)\,dt \geqq 0.$$

Нека ни е дадена една редица ε. Ще означим с K_ε съвкупността от регулярно-монотонните функции $f(x)$, удовлетворяващи условията (2). Без ограничение на общността можем да смятаме, че

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1=1; \qquad (x_0=0), \tag{5}$$

защото ако $\varepsilon_0=-1$, вместо $f(x)$ ще вземем $-f(x)$, а ако $\varepsilon_1=-1$, то вместо $f(x)$ ще вземем $f(1-x)$. За в бъдеще ще смятаме условията (5) изпълнени.

Както отбелязахме, съвкупността K_ε не е празна, тъй като поне полиномите (4) принадлежат на нея.

Нека $f(x)$ е една произволна функция от K_ε. Съгласно интерполационната формула на Абел-Гончаров

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x) + R_n(x).$$

Остатъчният член $R_n(x)$ може да се напише във вида

$$R_n(x)=\int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\,dt_2 \ldots \int_{x_n}^{t_n} \tau_n \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

С помощта на лема 1 се проверява непосредствено, че $R_n(x)$ принадлежи на K_ε. Следователно ще имаме

$$\varepsilon_k f^{(n)}(x) \geqq \sum_{\nu=k}^{n} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)\, \varepsilon_k P_\nu^{(k)}(x);$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ldots; \qquad n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ldots$$

Но всички членове на сумата отдясно са неотрицателни и следователно редът

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) P_\nu(x)$$

е сходящ за всяко x от интервала (0, 1) и може да се диференцира почленно безбройно много пъти. От направените разсъждения се вижда, че функциите

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x)$$

и

$$R(x)=f(x)-F(x) \tag{6}$$

също принадлежат на K_ε. Функцията (6) удовлетворява още условията

$$R^{(n)}(x_n)=0; \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{7}$$

Да означим с K_ε^* съвкупността от всички функции, принадлежащи на K_ε, които удовлетворяват още условията (7).

Ние доказахме следната

Теорема 1. Всяка функция от K_ε може да се представи във вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu P_\nu(x)+R(x),$$

където a_ν $(\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ са неотрицателни константи

$$a_\nu=\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu),$$

а $R(x)$ е подходящо избрана функция от K_ε^*.

В [4] ние доказахме, че когато редицата ε е периодична, т. е. съществува цяло положително число q, такова, че

$$\varepsilon_{n+q}=\varepsilon_n \text{ при } n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

то съвкупността K_ε^* се състои от една функция с точност до умножение с константа. Нашата задача по-нататък ще бъде да докажем същото твърдение при следното предположение:

(A) Редицата ε съдържа безбройно много пъти една комбинация от p члена, която има вида

$$-s,\ s,\ s,\ s,\ldots,s,-s; \qquad s=\pm 1 \tag{8}$$

и $p\geqq 4$ (p е фиксирано цяло число). В следващото изложение ще предполагаме, че $s=1$. Случаят $s=-1$ се разглежда напълно аналогично.

Нека K_ε е една съвкупност от регулярно-монотонни функции, за която съответната редица ε удовлетворява условието (A).

Лема 2. Редицата от възли (3) съдържа безбройно много членове, равни на 0, и безбройно много членове, равни на 1.

Действително на комбинацията (8) от членове на редицата ε с p члена отговаря комбинацията

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ 1 \tag{9}$$

от членове на редицата (3), състояща се от $p-1$ члена. В комбинацията (9) се съдържат два члена, равни на 1, и поне един член, равен на 0. Доказателството на лемата следва от обстоятелството, че комбинацията (9) се повтаря безбройно много пъти в редицата (3).

Лема 3. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε, то

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_n f^{(n)}(x) < \infty. \tag{10}$$

Доказателство. Означената граница съществува, понеже функцията $f(x)$ е монотонна. Да допуснем, че

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_n f^{(n)}(x) = \infty. \tag{11}$$

Ще докажем тогава, че и

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_{n+1} f^{(n+1)}(x) < \infty.$$

Да допуснем противното. В такъв случай

$$\sup |f^{(n+1)}(x)| < \infty$$

поне тогава, когато x се мени между $\frac{1}{2}$ и $1-x_n$. От друга страна имаме

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(x) - f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)| + |f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)| = x - \frac{1}{2} \, | \, |f^{(n+1)}(\eta)| + |f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)|,$$

където η е между $\frac{1}{2}$ и x. Следователно получаваме

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2} \sup |f^{(n+1)}(x)| + |f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)|,$$

когато x е между $\frac{1}{2}$ и $1-x_n$, което противоречи на (11).

По същия начин от нашето допущане (11) следва, че

$$\lim_{x\to 1-x_n} \varepsilon_{n+k} f^{(n+k)}(x) = \infty \text{ при } k = 2, 3, 4, \ldots$$

Като имаме предвид последното и обстоятелството, че за всяка функция $f(x)$, принадлежаща на K_ε, $f^{(n)}(x)$, расте по абсолютна стойност, когато x се движи от x_n към $1-x_n$, ще получим, че всички членове на редицата (3) от известно място нататък са равни помежду си. Това обаче противоречи на лема 2. С това лемата е доказана.

Доказаната лема 3 ни дава право да предполагаме без ограничение на общността, че всички функции от K_ε са дефинирани и непрекъснати заедно с всичките си производни в затворения интервал [0, 1].

Лема 4. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε, то за всяко цяло положително число k важи неравенството

$$|f^{(k)}(x)| \leq M_k f(1) \text{ при } x \varepsilon \left[\frac{1}{3k}, 1 - \frac{1}{3k}\right], \tag{12}$$

където M_k е положителна константа, зависеща от k, но независеща от $f(x)$.

При доказателството ще използуваме, че ако $f(x)$ принадлежи на K_ε, то $|f^{(n)}(x)|$ расте, когато x се движи от x_n към $1-x_n$.

$$2f(1) \geqq \left| f\left(1-x_1-\frac{\tau_1}{3k^2}\right)-f\left(1-x_1-\frac{\tau_1}{6k^2}\right)\right| = \frac{1}{6k^2}|f'(\xi_1)| \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{6k^2}|f'(x)|$$

$$\text{за } x \varepsilon \left[\frac{1}{3k^2}, 1-\frac{1}{3k^2}\right]$$

или

$$|f'(x)| \leqq M_k^{(1)} f(1)$$

$$\text{при } x \varepsilon \left[\frac{1}{3k^2}, 1-\frac{1}{3k^2}\right].$$

$$2M_k^{(1)} f(1) \geqq \left|f'\left(1-x_2-\frac{2\tau_2}{3k^2}\right)-f'\left(1-x_2-\frac{2\tau_2}{6k^2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{6k^2}|f''(\xi_2)| \geqq \frac{1}{6k^2}|f''(x)|$$

$$\text{за } x \varepsilon \left[\frac{2}{3k^2}, 1-\frac{2}{3k^2}\right]$$

или

$$|f''(x)| \leqq M_k^{(2)} f(1) \quad \text{при} \quad x \varepsilon \left[\frac{2}{3k^2}, 1-\frac{2}{3k^2}\right].$$

Като продължим по този начин, достигаме до (12).

Лема 5. Ако

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{13}$$

е една редица от функции, принадлежащи на K_ε, за които

$$f_n(1) < A;\ M = 1, 2, 3, \ldots,$$

то от нея може да се избере една сходяща поредица

$$f_{n_1}(x),\ f_{n_2}(x),\ f_{n_3}(x), \ldots, f_{n_m}(x), \ldots \to f(x) \varepsilon K_\varepsilon,$$

за която съществуват още и границите

$$\lim_{m\to\infty} f_{n_m}^{(k)}(x) = f^{(k)}(x); \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

за всяко x от затворения интервал [0, 1].

Доказателство. От редицата (13) може да се избере подредицата

$$f_{0,0}(x),\ f_{0,1}(x),\ f_{0,2}(x), \ldots, f_{0,n}(x), \ldots,$$

сходяща в точката $x = \frac{1}{2}$, защото

$$0 \leq f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq A.$$

Да си образуваме редицата

$$f'_{0,0}(x),\ f'_{0,1}(x),\ f'_{0,2}(x), \ldots,\ f'_{0,n}(x), \ldots$$

Съгласно (12) тази редица от монотонни функции е равномерно ограничена в интервала $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и следователно от нея може да се избере подредицата

$$f'_{1,0}(x),\ f'_{1,1}(x),\ f'_{1,2}(x), \ldots,\ f'_{1,n}(x), \ldots,$$

сходяща за всяко x от интервала $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Да си образуваме редицата

$$f''_{1,0}(x),\ f''_{1,1}(x),\ f''_{1,2}(x), \ldots,\ f''_{1,n}(x), \ldots$$

Съгласно (12) тази редица е равномерно ограничена в интервала $\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$ и от нея може да се избере подредицата

$$f''_{2,0}(x),\ f''_{2,1}(x),\ f''_{2,2}(x), \ldots,\ f''_{2,n}(x), \ldots,$$

сходяща за всяко x от интервала $\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$.

Продължаваме този процес неограничено. Образуваме си след това редицата

$$f_{0,0}(x),\ f_{1,1}(x),\ f_{2,2}(x), \ldots,\ f_{n,n}(x), \ldots$$

За краткост тази редица ще означаваме пак с

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{14}$$

От начина, по който построихме редицата (14), е ясно, че тя удовлетворява условията на лемата за всяко x от отворения интервал (0, 1). Ще докажем, че редицата (14) е сходяща и за краищата на този интервал

Нека

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ при } x \varepsilon (0,\ 1). \tag{15}$$

Очевидно $f(x)$ принадлежи на K_ε и съгласно лема 3 можем да смятаме $f(x)$ дефинирана в затворения интервал [0, 1], при което $f(0) = f(+0)$, $f(1) = f(1-0)$. Ще докажем, че (15) е в сила и за краищата на интервала (0, 1).

Преди туй ще докажем, че

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |f_n(0)| \leq B < \infty.$$

Да допуснем противното, т. е. че за една подредица на редицата (14)

$$\lim_{k\to\infty}\ |f_{n_k}(0)| = \infty.$$

Но тогава и

(16) $$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| f_{n_k}^{(m)}(0) \right| = \infty; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Действително, да допуснем, че (16) не е вярно и нека m_0 е най-малкото цяло положително число, за което

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| f_{n_k}^{(m_0)}(0) \right| < M.$$

Но редицата $\{f_{n_k}^{(m_0)}(x)\}$ е сходяща за всяко $x \varepsilon (0, 1)$ и следователно има константа N, независеща от k, за която

$$\left| f_{n_k}^{(m_0)}(x) \right| \leq N \text{ при } x \varepsilon \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Тогава

$$\left| f_{n_k}^{(m_0-1)}(0) \right| \leq \left| f_{n_k}^{(m_0-1)}(0) - f_{n_k}^{(m_0-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| + \left| f_{n_k}^{(m_0-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| f_{n_k}^{(m_0)}(\xi) \right| + \left| f_{n_k}^{(m_0-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq L,$$

където $\xi \varepsilon \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Константата L може да се избере така, че да не зависи от k, защото редицата $\left\{ f_{n_k}^{(m_0-1)}(x) \right\}$ е сходяща. Следователно

$$\lim_{k\to\infty} \left| f_{n_k}^{(m_0-1)}(0) \right| \leq L.$$

Последното неравенство обаче противоречи на избора на m_0, следователно (16) е изпълнено. От (16) следва, че

(17) $$1 = x_1 = x_2 = x_3 = \cdot \qquad = x_n = \cdot$$

тъй като редицата $\{f_{n_k}^{(m)}(x)\}$ е сходяща при всяко цяло положително m и $x \varepsilon (0, 1)$, а $\left| f_{n_k}^{(m)}(x) \right|$ расте, когато x се движи от x_m към $1 - x_m$. Но условието (17) противоречи на лема 2, следователно

(18) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| f_n(0) \right| \leq B < \infty.$$

По същия начин се установява, че

(19) $$\overline{\lim} \left| f_n^{(m)}(0) \right| \leq B_m < \infty; \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\overline{\lim} \left| f_n^{(m)}(1) \right| \leq C_m < \infty; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Да разгледаме разликата

$$f_n(0) - f(0) \leq \left| f_n(0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x) \right| + \left| f(x) - f(0) \right| =$$

$$= x \left| f_n'(\xi) \right| \left| f_n(x) - f(x) \right| + x \left| f'(\eta) \right| \leq$$

$$\leq x \left| f_n'(\xi) \right| + \left| f_n(x) - f(x) \right| + x \left| f'(1 - x_1) \right|.$$

Тъй като функциите $f'_n(x)$ са монотонни, можем да изберем ν толкова голямо, че при $n>\nu$

$$f'_n(x) < B_1+C_1 \text{ за всяко } x \varepsilon [0, 1].$$

Тогава при $n>\nu$

$$|f_n(0)-f(0) < x(B_1+C_1)+|f_n(x)-f(x)|+x|f'(1-x_1)$$

Дясната страна на последното неравенство може да се направи произволно малка, когато изберем x достатъчно малко и след това n достатъчно голямо. Следователно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

Същите разсъждения могат да се направят и за редиците $\{f_n^{(m)}(0)\}$ $m=1, 2, 3, \ldots$ и $\{f_n^{(m)}(1)\}$; $m=0, 1, 3, \ldots$ С това лемата е доказана.

Следствие 1. Съвкупността K_ε^* съдържа поне една функция $R(x)$, която не е тъждествено равна на нула и $R(1)=1$.

Доказателство. Разглеждаме редицата

$$\tilde{P}_1(x), \tilde{P}_2(x), \tilde{P}_3(x), \ldots, \tilde{P}_n(x), \ldots,$$

където $\tilde{P}_n(x)=\dfrac{P_n(x)}{P_n(1)}$. Съгласно доказаната лема от нея може да се избере сходяща подредица

$$\tilde{P}_{n_1}(x), \tilde{P}_{n_2}(x), \tilde{P}_{n_3}(x), \ldots, \tilde{P}_{n_m}(x), \ldots,$$

за която

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{P}_{n_m}^{(k)}(x)=R^{(k)}(x); \; k=0, 1, 2, \ldots$$

при всяко $x \varepsilon [0, 1]$.

Функцията $R(x)$ удовлетворява условията (7), защото при $n_m>k$, $P_{n_m}^{(k)}(x_k)=0$. Също така

$$R(1)=\lim_{x\to 1} R(x)=1,$$

тъй като $\tilde{P}_n(1)=1$; $n=0, 1, 2, \ldots$

Лема 6. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε^* и $f(1)=1$, то уравнението

$$f^{(k)}(x)-\tilde{P}_n^{(k)}(x)=0; \; n=1, 2, 3, \ldots \tag{20}$$

има точно един корен ξ_k от отворения интервал (0, 1), когато $k=1, 2, 3, \ldots$

Доказателство.

$$f(0)=\tilde{P}_n(0)=0,$$

$$f(1)=\tilde{P}_n(1)=1$$

и следователно съгласно теоремата на Рол има поне една точка $\xi_1 \varepsilon (0, 1)$, за която

$$f'(\xi_1) = \tilde{P}'_n(\xi_1).$$

Ако $n \geqq 2$, то освен това и

$$f'(x_1) = \tilde{P}'_n(x_1) = 0,$$

следователно има поне една точка $\xi_2 \varepsilon (0, 1)$, за която

$$f''(\xi_2) = \tilde{P}''_n(x_2).$$

Като продължим тези разсъждения, установяваме, че уравнението (20) има поне един корен, когато $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Да допуснем сега, че уравнението (20) има при някое $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ два различни корена от отворения интервал (0, 1). Тогава с теоремата на Рол установяваме, че и уравнението

$$f^{(n)}(x) - \tilde{P}^{(n)}_n(x) = 0 \tag{21}$$

има също два различни корена ξ' и ξ'' от отворения интервал (0, 1). Но $\tilde{P}^{(n)}_n(x)$ е константа и следователно

$$f^{(n)}(\xi') = f^{(n)}(\xi'').$$

От последното следва, че съществува точка $\xi \varepsilon (0, 1)$, за която $f^{(n+1)}(\xi) = 0$. От монотонността на $f^{(n+1)}(x)$ следва, че $f^{(n+k)}(x) = 0$ при всяко x между ξ и x_{n+1} и $k = 1, 2, 3, \ldots$ Но съгласно лема 2 може да се намери цяло положително число k_0, за което $x_{n+k_0} \neq x_{n+1}$. Функцията $f^{(n+k_0)}(x)$ е монотонна и се анулира в двата края на интервала [0, 1], следователно $f^{(n+k_0)}(x) \equiv 0$. От последното следва, че $f(x) \equiv 0$. Това обаче противоречи на условието $f(1) = 1$. С това лемата е доказана.

Лема 7. Ако $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат на K^*_s и уравнението

$$f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x) = 0; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

има корен $\xi_{k_0} \varepsilon (0, 1)$ при някое цяло неотрицателно k_0, то същото уравнение има корен $\xi_k \varepsilon (0, 1)$ и за всяко цяло $k > k_0$.

Доказателството се извършва индуктивно. Нека

$$f^{(k)}(\xi_k) = g^{(k)}(\xi_k); \qquad k \geqq k_0, \qquad \xi_k \varepsilon (0, 1).$$

Освен това

$$f^{(k)}(x_k) = g^{(k)}(x_k) = 0.$$

Съгласно теоремата на Рол има точка $\xi_{k+1} \varepsilon (0, 1)$, за която

$$f^{(k+1)}(\xi_{k+1}) = g^{(k+1)}(\xi_{k+1}).$$

С това лемата е доказана.

Ние предположихме в началото, че редицата ε съдържа безбройно много пъти една комбинация с p члена от вида (8) и $p \geqq 4$.

Нека

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdot \qquad < n_k < \cdot$$

е една редица от индекси, за която

$$-1 = \varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2} = \varepsilon_{n_3} = \qquad = \varepsilon_{n_k} = \cdot$$

ε_{n_k} са първите членове на комбинацията (8). Тогава

$$\varepsilon_{n_k+m} = 1 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, -2,$$

$$\varepsilon_{n_k} = \varepsilon_{m_k+p-1} = -1 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$x_{n_k+m} = 0 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, -3,$$

$$x_{n_k} = x_{n_k+p-2} = 1 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Горните равенства ще използуваме често нататък.

Ще докажем следното неравенство

$$\frac{p-2}{(p-1)!} P_{n_k}(1) \geqq P_{n_k+p-2}(1). \tag{22}$$

Действително

$$P_{n_k+p-2}(x) = \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1}\, dt_{n_k} \int_{t_{n_k}}^{1} dt_{n_k+1} \int_{0}^{t_{n_k+1}} dt_{n_k+2} \ldots \tag{23}$$

$$\int_{0}^{t_{n_k+p-3}} dt_{n_k+p-2} = \frac{1}{(p-3)!} \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1}\, dt_{n_k} \int_{t_{n_k}}^{1} t^{p-3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{(p-2)!} \int_{x_0}^{x} \tau_1\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1} (1 - t^{p-2})\, dt$$

или

$$P_{n_k+p-2}(x) = \frac{1}{(p-2)!} P_{n_k}(x) - \frac{1}{(p-1)!} \int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \tag{24}$$

$$\ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1} dt^{p-1}.$$

От друга страна

$$\int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1}\, dt^{p-1} = \int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}^{p-1}} \tau_{n_k-1}\, du < \tag{25}$$

$$\int_{x_0}^{x} \tau_0\, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1\, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1}\, du = P_{n_k}(x).$$

Използували сме лема 1, $x_{n_k-1}^{p-1} = x_{n_k-1}$ и $0 \leqq t_{n_k-1}^{p-1} \leqq t_{n_k-1}$.

От (24) и (25) получаваме

$$P_{n_k+p-2}(x) \geqq \frac{p-2}{(p-1)!} P_{n_k}(x). \tag{26}$$

От (26) при $x=1$ получаваме (22).

Лема 8. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε^*, то

$$|f^{(n)}(1-x_n)| \leqq |f^{(n+1)}(1-x_{n+1})|; \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

Доказателство.

$$f^{(n)}(1-x_n)| = |f^{(n)}(1-x_n) - f^{(n)}(x_n)| = |1-2x_n| \, |f^{(n+1)}(\xi) \leqq$$
$$\leqq |f^{(n+1)}(1-x_{n+1})$$

Лема 9. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε^*, то

$$-f^{(n_k)}(0) \geqq \frac{f(1)}{P_{n_k}(1)} \geqq 0; \quad k=1, 2, 3, \ldots$$

Доказателство.

$$f(1) = \int_{x_0}^{1} \tau_0 \, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 \, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1} \, \varepsilon_{n_k} f^{(n_k)}(t) \, dt \leqq$$

$$\leqq \varepsilon_{n_k} f^{(n_k)}(0) \int_{x_0}^{1} \tau_0 \, dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 \, dt_2 \ldots \int_{x_{n_k-1}}^{t_{n_k-1}} \tau_{n_k-1} \, dt = -f^{(n_k)}(0) P_{n_k}(1).$$

Лема 10. Ако $f(x)$ принадлежи на K_ε^*, то

$$f^{(n_k+p-3)}(1) \leqq \frac{f(1)}{P_{n_k+p-2}(1)}; \qquad k=1, 2, 3, \ldots$$

Доказателство. Може да смятаме, че $f(1) \neq 0$, защото в противен случай лемата е очевидна. Да разгледаме функцията

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}; \qquad g(1)=1.$$

Съгласно лема 6 уравненията

$$\varphi(x) = g^{(n_k+p-3)}(x) - \tilde{P}_{n_k+p-2}^{(n_k+p-3)}(x) = 0 \text{ и}$$
$$\varphi'(x) = 0$$

имат по един корен ξ' и $\xi'' \varepsilon (0, 1)$. При това лесно е да се съобрази, че $0 < \xi'' < \xi'$ и

$$\tilde{P}_{n_k+p-2}^{(n_k+p-3)}(x) = \frac{1}{P_{n_k+p-2}(1)} \varepsilon_{n_k+p-2} \int_0^x dt = \frac{x}{P_{n_k+p-2}(1)}$$

Ще докажем, че $\varphi(1) \leqq 0$. Да допуснем противното. Тогава

$$\varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(\xi') = (1-\xi') \varphi'(\eta') > 0,$$

където $\eta' > \xi' > \xi'' > 0$.

Също така

$$\varphi'(\eta')-\varphi'(\eta')-\varphi'(\xi'')=(\eta'-\xi'')\varphi''(\eta'')>0,$$

следователно

$$\varphi''(\eta'')>0.$$

Последното обаче противоречи на условието

$$\varphi''(x)=g^{(n_k+p-1)}(x)\leq 0;\quad x\varepsilon[0,\ 1].$$

Следователно

$$\varphi(1)=g^{(n_k+p-3)}(1)-\frac{1}{P_{n_k+p-2}(1)}\leq 0$$

или

$$g^{(n_k+p-3)}(1)=\frac{f^{(n_k+p-3)}(1)}{f(1)}\leq\frac{1}{P_{n_k+p-2}(1)}$$

С това лемата е доказана.

Лема 11. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са две функции от K_ε^*, при което

$$f(1)=1,\quad g(1)=\varrho<\frac{p-2}{(p-1)!},$$

то функцията

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

принадлежи на K_ε^*.

Доказателство. Функциите $-f^{(n_k)}(x)$ и $-g^{(n_k)}(x)$ са неотрицателни, монотонно намаляващи и вдлъбнати в интервала [0, 1], защото $\varepsilon_{n_k}=-1$, $\varepsilon_{n_k+1}=\varepsilon_{n_k+2}=1$. Освен това

(28) $$f^{(n_k)}(1)=g^{(n_k)}(1)=0 \text{ и}$$

(29) $$|g^{(n_k+1)}(1)|<|f^{(n_k)}(0)|.$$

Равенствата (28) са очевидни, защото $x_{n_k}=1$. Неравенството (29) се получава от лемите 8, 9, 10 и неравенството (22). Наистина

$$|g^{(n_k+1)}(1)|\leq|g^{(n_k+p-3)}(1)|\leq\frac{g(1)}{P_{n_k+p-2}(1)}<$$

$$<\frac{p-2}{(p-1)!}\cdot\frac{(p-1)!}{p-2}\cdot\frac{1}{P_{n_k}(1)}\leq|f^{(n_k)}(0)|.$$

От вдлъбнатостта на функциите $-f^{(n_k)}(x)$ и $-g^{(n_k)}(x)$ и (28) следва, че

$$-f^{(n_k)}(x)\leq(1-x)|f^{(n_k)}(0)|$$

$$-g^{(n_k)}(x)\leq(1-x)|g^{(n_k+1)}(1)|$$

От последните неравенства и (29) следва, че уравнението

$$f^{(n_k)}(x)-g^{(n_k)}(x)=0$$

няма корени във вътрешността на интервала (0, 1). Но тогава съгласно лема 7 уравнението

$$f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)=0; \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

няма корени в интервала (0, 1) за никое n, защото редицата от индекси $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ е неограничена. С това е доказано, че функцията $h(x)$ и производните ѝ не си менят знака в интервала [0, 1]. Освен това $h^{(n)}(x_n)=f^{(n)}(x_n)-g^{(n)}(x_n)=0$

и
$$h(1)=f(1)-g(1)>1-\frac{p-2}{(p-1)!}>0.$$

Ще докажем индуктивно, че за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_n h^{(n)}(x)\geqq 0 \text{ при } x\varepsilon[0, 1]$$

При $n=0$

$$\varepsilon_0 h(x)=h(x)\geqq 0.$$

Нека

$$\varepsilon_n h^{(n)}(x)\geqq 0,$$

тогава

$$\varepsilon_n h^{(n)}(1-x_n)=\varepsilon_n[h^{(n)}(1-x_n)-h^{(n)}(x_n)]=$$
$$=\varepsilon_n(1-2x_n)h^{(n+1)}(\xi).$$

Но

$$\varepsilon_n(1-2x_n)=\varepsilon_n(1-|\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}|)=\varepsilon_{n+1},$$

следователно

$$\varepsilon_{n+1} h^{(n+1)}(x)\geqq 0; \quad x\varepsilon[0, 1].$$

С това лемата е доказана.

Да означим с $R_\varepsilon(x)$ една функция, принадлежаща на K_ε^* и удовлетворяваща условието $R_\varepsilon(1)=1$. Такава функция сигурно има съгласно следствие 1.

Лема 12*. Всяка функция $f(x)$ от K_ε^* може да се представи във вида

(30) $$f(x)=AR_2(x),$$

където $A=f(1)$ е неотрицателна константа.

Доказателство. Нека $f(x)$ принадлежи на K_ε^*. Съгласно лема 11 съществува положителна константа C, такава, че функцията

$$h(x)=R_\varepsilon(x)-Cf(x)$$

да принадлежи на K_ε^*. Да означим с C_0 най-голямата от константите C, за които функцията $h(x)$ принадлежи на K_ε^*. Такава най-голяма константа очевидно съществува, защото съвкупността K_ε^* е затворена. Ще докажем, че

(31) $$h(x)=R_\varepsilon(x)-C_0 f(x)\equiv 0.$$

* Тази лема първоначално доказах, използувайки теоремата за конусите на проф. Я. А. Тагамлицки [3]. След преглеждане на ръкописа, последният ми обърна внимание, че тази лема може да се докаже директно. Тук излагам директното доказателство. Ползувам се от случая да благодаря на др. проф. Я. А. Тагамлицки за направените бележки.

Да допуснем противното. Тогава

$$h(1)=R_r(1)-C_0 f(1)>0$$

и съгласно лема 11 съществува положителна константа ϱ, такава, че функцията

$$h_1(x)=h(x)-\varrho f(x)$$

принадлежи на K_r^*. Но

$$h_1(x)=R_2(x)-C_0 f(x)-\varrho f(x)=R_r(x)-(C_0+\varrho) f(x).$$

Последното обаче противоречи на избора на числото C_0. Следователно изпълнено е тъждеството (31), а от него следва представянето (30).

С това е доказана следната

Теорема 2. Ако редицата

$$x_0=0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n,\ldots \qquad (x_n \text{ е или } 0 \text{ или } 1)$$

съдържа безбройно много пъти една комбинация от вида 1, 0, 0, 0, . . . , 0, 1, която има поне 3 члена, то има една и само една функция $R_r(x)$, която заедно с производните си не си изменя знака в интервала [0, 1] и удовлетворява условията:

$$R_r^{(n)}(x_n)=0;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{32}$$

$$R_r(1)=1. \tag{33}$$

Нека отбележим, че не е необходимо да искаме функцията $R_r(x)$ да удовлетворява условията (2), защото това следва от (32) и (33), както се вижда от края на доказателството на лема 11.

Да разгледаме редицата от полиномите

$$\tilde{P}_1(x),\ \tilde{P}_2(x),\ \tilde{P}_3(x),\ldots,\ \tilde{P}_n(x),\ldots;\quad P_n(1)=1. \tag{34}$$

Съгласно лема 5 от тази редица можем да си изберем сходяща подредица

$$\tilde{P}_{n_1}(x),\ \tilde{P}_{n_2}(x),\ \tilde{P}_{n_3}(x),\ldots,\ \tilde{P}_{n_m}(x),\ldots,$$

чиято граница принадлежи на K_r^*. Като имаме предвид лема 12 и условието $\tilde{P}_n(1)=1$, следва, че

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{P}_{n_m}(x)=R_r(x).$$

Лесно е да се съобрази, че редицата (34) е сходяща и

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_n(x)=R_r(x). \tag{35}$$

Действително, ако редицата (34) при някое фиксирано $x\varepsilon(0, 1)$ има точка на сгъстяване различна от $R_r(x)$, то от тази редица ще може да се избере подредица, която да е сходяща към някоя функция $Q(x)$ от K_r^*, различна от $R_r(x)$ и удовлетворяваща условието

$Q(1)=1$. Това обаче противоречи на лема 12. Следователно редицата (34) е сходяща и има граница $R_\varepsilon(x)$.

Като имаме предвид доказаното и теорема 1, можем да изкажем следната

Теорема 3. Всяка функция $f(x)$ от конуса K_ε, за който редицата ε удовлетворява условието (A), може да се представи във вида

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu)P_\nu(x)+A\lim_{\nu\to\infty}\frac{P_\nu(x)}{P_\nu(1)},$$

където A е неотрицателна константа.

Сега ще дадем една друга редакция на условието (A), като го изразим с помощта на редицата

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,\ \lambda_n,\ldots, \tag{36}$$

която се дефинира по следния начин: λ_1 е най-голямото цяло число, за което $x_0=x_1=x_2=\quad=x_{\lambda_1}=0$, λ_2 е най-голямото цяло число, за което $x_{\lambda_1+1}=x_{\lambda_1+2}=x_{\lambda_1+3}=\ldots=x_{\lambda_1+\lambda_2}=1$, λ_3 е най-голямото цяло число, за което $x_{\lambda_1+\lambda_2+1}=x_{\lambda_1+\lambda_2+2}=\ldots=x_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}=0$ и т. н.

С. Н. Бернштейн използува за характеристика на регулярно-монотонните функции при тяхното изучаване съответната им редица (36).

Условието (A) е еквивалентно с условието ($Б$): Редицата (36) е безкрайна и съдържа ограничена подредица.

Действително, ако (A) е изпълнено, редицата (36) съдържа безбройно много равни помежду си членове и следователно ($Б$) е също изпълнено. Нека сега е изпълнено ($Б$). Щом редицата (36) съдържа ограничена подредица, то тази ограничена подредица, тъй като е съставена от цели положителни числа, съдържа безбройно много равни помежду си членове. Измежду тези безбройно много равни помежду си членове има безбройно много членове, чиито индекси имат еднаква четност. Но тогава редицата от възлите (3) съдържа безбройно много пъти една комбинация с поне 3 члена от вида

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0,\ 1 \text{ или } 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots,\ 1,\ 0.$$

Втората комбинация обаче се свежда към първата със смяна на x с $1-x$. Следователно можем да смятаме, че редицата ε съдържа безбройно много пъти комбинацията

$$-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots,\ 1,\ -1,$$

състояща се от $p\geqq 4$ члена. С това еквивалентността на условията (A) и ($Б$) е доказана,

Нека редицата ε е периодична, т. е. има цяло положително число q, за което

$$\varepsilon_{n+q}=\varepsilon_n;\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ще смятаме, че q е най-малкият период на редицата ε. Ако $q=1$ или 2, то редицата (36) се състои само от един член $\lambda_1=\infty$ и сле-

дователно този случай е изключен от нашите разглеждания. При $q=1$ или 2, съвкупността K_ε се състои от абсолютно монотонните функции [5] и съответната съвкупност K_ε^* съдържа само константата нула.

Ако редицата ε е периодична и примитивният ѝ период $q \geqq 3$, то редицата (36) е безкрайна, периодична и значи ограничена. Следователно разгледаният в [4] случай при $q \geqq 3$ се обхваща от настоящите разглеждания. В [4] е доказано, че при периодична редица ε остатъчната функция $R_\varepsilon(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$f^{(q)}(x) = a^q f(x),$$

където a е положителна константа, а q е периодът на редицата ε. Това следва сега непосредствено от лема 12, като се има предвид, че ако $f(x)$ принадлежи на K_ε^*, то и $f^{(q)}(x)$ също принадлежи на K_ε^*.

В заключение ще отбележим, че теорема 2 може да се обобщи в следния смисъл. Не е необходимо да изискваме всеки възел в редицата (3) да съвпада с една от две дадени точки. За да вървят подобни разсъждения, е необходимо никой от членовете на редицата (3) да не се намира между два члена, които го предхождат.

Постъпила на 10. 4. 1957.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Bernstein. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris, 1926.
2. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. Москва—Ленинград, 1934.
3. Я. А. Тагамлицки. Върху едно обобщение на понятието неразложимост. Годишник на Софийския университет, 46, кн. 1, ч 1 (1953/54), 69.
4. Бл. Сендов. Об одном классе регулярно-монотонных функций. ДАН СССР Том 110, № 1 (1956), 27—30.
5. С. Н. Бернштейн. Абсолютно монотонные функции. Собр. соч. т. I, Москва, 370—425.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНО-МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Бл. Сендов

РЕЗЮМЕ

В работе [4] автор рассматривал функции, неограниченно дифференцируемые в нитервале (0, 1) и удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0, \quad 0 < x < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\varepsilon_n = \pm 1$, при допущении, что последовательность

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \tag{2}$$

периодическая. В настоящей работе автор рассматривает тот самый вопрос при более общем предположении, что последовательность (2) содержит неограниченное число раз комбинацию вида

$$\varepsilon, \ -\varepsilon, \ -\varepsilon, \ldots, \ -\varepsilon, \ \varepsilon$$

$\varepsilon = \pm 1$, имеющую по крайней мере 4 элемента. Доказывается, что каждую функцию, для которой имеет место (1), можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x) P_\nu(x) + AR(x),$$

где $P_\nu(x)$ суть полиномы Абеля-Гончарова, функция $R(x)$, неограниченно дифференцируемая, удовлетворяет условиям (1) и $R^{(\nu)}(x_\nu) = 0$ и не зависит от $f(x)$, а постоянная A не отрицательна.

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER REGULÄRMONOTONEN FUNKTIONEN

Bl. Sendov

ZUZAMMENFASSUNG

In einer früheren Arbeit [4] betrachtete der Verfasser die Funktionen, die im Intervall (0, 1) unbeschränkt differenzierbar sind und den Bedingungen

$$\varepsilon_n f^{(n)}(x) \geqq 0, \quad 0<x<1, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

genügen, wo $\varepsilon_n = \pm 1$, unter der Voraussetzung, daß

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \tag{2}$$

periodisch ist. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit derselben Frage unter den allgemeineren Voraussetzungen, daß in der Folge (2) eine Kombination der Art

$$\varepsilon, \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon, \ldots, \quad -\varepsilon, \quad \varepsilon$$

$\varepsilon = \pm 1$, mit wenigstens 4 Elementen, unendlich viel mal vorkommt. Man beweist, daß jede, die Bedingungen (1) erfüllende Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x) P_\nu(x) + AR(x)$$

dargestellt werden kann, wo $P_\nu(x)$ die Abel-Gontscharoffschen Polynome bedeuten und wo die von $f(x)$ unabhängige Funktion $R(x)$ den Bedingungen (1) und $R^{(\nu)}(x_\nu) = 0$ genügt. $A \geqq 0$ ist eine Konstante.